



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT

RODSON DA SILVA SANTOS

ELEMENTOS DA TRIGONOMETRIA TRIANGULAR ESFÉRICA

Boa Vista - RR
2014

RODSON DA SILVA SANTOS

ELEMENTOS DA TRIGONOMETRIA TRIANGULAR ESFÉRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática-SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.

Boa Vista - RR
2014

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S237e Santos, Rodson da Silva.
Elementos da Trigonometria Triangular Esférica / Rodson da Silva Santos. --
Boa Vista, 2014.
73f : il.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Mestrado em
Matemática Profissional - PROFMAT.

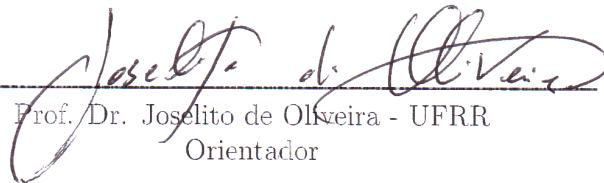
1 – . Geometria esférica. 2 – Teorema de Girard. 3 – Trigonometria nos
triângulos esféricos. I – Título. II. – Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU- 514.116

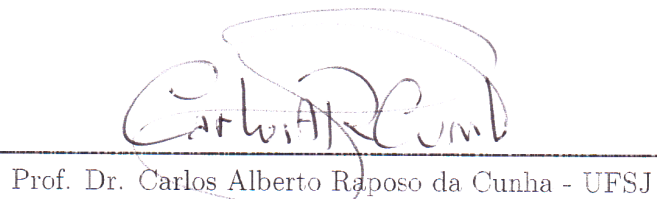
RODSON DA SILVA SANTOS

ELEMENTOS DA TRIGONOMETRIA TRIANGULAR ESFÉRICA

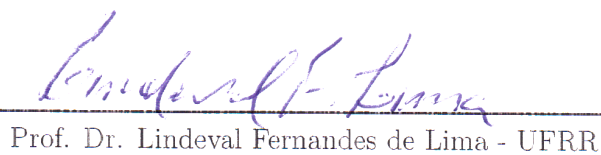
Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática-SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, defendida em 26 de abril de 2014, e avaliado pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. Joselito de Oliveira - UFRR
Orientador



Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha - UFSJ



Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima - UFRR

À memória dos meus antepassados,
homens e mulheres,
cativos e livres.
Por terem lutado e sobrevivido
a inclemência do mundo desde
a origem dos tempos,
permitindo que eu
estivesse aqui hoje,
deixando meus passos sobre
a superfície esférica da Terra.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me presentear com o maravilhoso dom da vida.

Aos meus pais Maria e Antônio, pelo amor e educação que recebi, por terem cuidado de mim e pelos sacrifícios que fizeram para que eu pudesse estudar.

Ao meu avô Francisco, pelos conselhos para a vida e pelo exemplo de ser humano que é.

Aos meus irmãos, pelo apoio e companheirismo por toda a vida e pelo incentivo durante o mestrado.

Ao professor Joselito de Oliveira, por ter me orientado e auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação ao PROFMAT como coordenador local.

Aos professores que participaram de todas as etapas da minha formação, desde a infância, pela contribuição com seu bem mais precioso, o conhecimento.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e à Universidade Federal de Roraima - UFRR, por me darem a oportunidade de cursar um mestrado do nível do PROFMAT.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo auxílio financeiro.

Aos colegas e amigos que fiz na turma PROFMAT 2012, Denis, Wender, Admilson, Eduardo, Ana, Jerrimar e José Walter, pela troca de experiências e aprendizado.

Em especial à Caroline dos Santos Vontobel, pelo amor, companheirismo, cuidado, incentivo, compreensão e paciência, sem os quais esse mestrado não teria sido possível para mim.

RESUMO

O principal objetivo deste trabalho foi estudar, em triângulos construídos sobre uma superfície esférica, versões para resultados conhecidos da geometria euclidiana plana e da trigonometria nos triângulos planos. Inicialmente apresentam-se os conceitos fundamentais da geometria esférica e alguns elementos de trigonometria triangular esférica. Para isso, iniciou-se com uma breve revisão de alguns desses resultados e também com algumas definições da geometria plana necessárias para a construção de resultados da geometria esférica. Feito isso, foram construídas, em um triângulo esférico, versões para a lei dos senos, a lei dos cossenos e outros resultados da trigonometria triangular plana. Também foi visto o Teorema de Girard, onde pode-se estudar a área de um triângulo construído sobre a superfície de uma esfera de raio R e a soma de seus ângulos internos, que ao contrário do que ocorre nos triângulos planos inscritos em um círculo de raio r , não é constante. Foi apresentado um contraexemplo, neste ambiente, em que o famoso teorema de Pitágoras não vale. Ao longo do texto são apresentados alguns exemplos com a utilização das relações trigonométricas estudadas, bem como alguns conceitos elementares de coordenadas geográficas e aplicações práticas da trigonometria esférica na aviação e na geografia. Finalmente, observa-se que esse trabalho utiliza fortemente a matemática do Ensino Básico, facilitando assim a compreensão e o acesso de alunos e professores do Ensino Médio, bem como profissionais que fazem uso da matemática.

Palavras-chave: Geometria esférica. Teorema de Girard. Trigonometria nos triângulos esféricos.

ABSTRACT

The main objective of this work was to study in triangles constructed on a spherical surface, versions of known results of the plane euclidean geometry and trigonometry in plans triangles. Initially it presents the fundamental concepts of spherical geometry and some elements of spherical triangular trigonometry. For this, begins with a brief review of some of these results and also with some definitions of plane geometry required for the construction of spherical geometry results. That done, are build, in a spherical triangle, versions for the law of sines, law of cosines and other results of the plane triangular trigonometry. Was also seen is the theorem of Girard, where can study the area of a triangle built on the surface of a sphere of radius R and the sum of its internal angles, which is not constant unlike what occurs in triangles plans built on disc of radius r . The Pythagorean theorem is not true in this environment and a counter-example will be presented. Throughout the text will be presented some examples with the use of trigonometric relations, as well as some elementary concepts of geographical coordinates and practical applications of spherical trigonometry in aviation and geography. Finally it is observed that this work strongly uses the mathematics of basic education, facilitating the understanding of the said theory, of students and teachers of basic education, as well as of the professionals who use math.

Keywords: Spherical Geometry. Girard's Theorem. Trigonometry in the spherical triangles.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	8
1 PRELIMINARES	10
1.1 Triângulo	12
1.2 Lei dos Cossenos	15
1.3 Lei dos Senos	18
2 A GEOMETRIA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO	27
2.1 A Superfície Esférica	27
2.2 Circunferência Máxima	29
2.2.1 Elementos Notáveis da Superfície Esférica	29
2.3 As Circunferências Máximas e os Postulados de Euclides	30
2.4 Distância Entre Dois Pontos.	35
2.5 Ângulo sobre a Superfície Esférica	37
2.6 Fuso Esférico	38
2.7 Triângulo Esférico	41
2.8 Teorema de Girard	41
3 A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO ESFÉRICO	45
3.1 Razões Trigonométricas nos Triângulos Esféricos	45
3.2 Lei dos Cossenos nos Triângulos Esféricos	46
3.3 Lei dos Senos nos Triângulos Esféricos	51
3.4 Exemplos	54
4 APLICAÇÕES	56
4.1 O Raio da Terra	56
4.2 Coordenadas Geográficas	57
4.3 Distância entre duas cidades	60
4.3.1 Fórmula para o Cálculo da Distância entre Cidades	65
4.4 O Teorema de Pitágoras e os Triângulos Esféricos	68
CONSIDERAÇÕES FINAIS	70
REFERÊNCIAS	72

INTRODUÇÃO

Em Geometria Plana, sabe-se que um triângulo possui seis elementos, três lados e três ângulos. E se conhecemos as medidas de três desses elementos, sendo pelo menos um deles um dos lados do triângulo, podemos determinar todos os demais elementos do triângulo, bem como sua área. Para isso usa-se as relações conhecidas para triângulos no plano, como a lei dos senos e a lei dos cossenos (MUNIZ NETO, 2013). Mas se quisermos, por exemplo, conhecer as distâncias entre duas cidades separadas uma da outra por alguns milhares de quilômetros, mesmo conhecendo suas coordenadas geográficas e utilizando outra cidade como referência para obter um triângulo, ainda assim não teríamos a mesma precisão que temos quando trabalhamos sobre o plano. A Terra é uma esfera (ou quase uma, como será visto adiante), e sua curvatura deve ser considerada quando executamos operações desse tipo, uma vez que tal curvatura influencia na obtenção das medidas (COUTINHO, 2001 e ZANELLA, 2013). É nesse contexto que entra em cena a Geometria Esférica, onde estudamos por exemplo, que em um triângulo construído sobre a esfera, a soma de seus ângulos internos é maior que 180 graus (COUTINHO, 2001 e DE BARROS, 2013). Este trabalho se limitará ao estudo de alguns resultados da trigonometria triangular plana no contexto da trigonometria esférica. Estudou-se os elementos de um triângulo construído sobre a esfera, com foco especialmente em algumas relações trigonométricas, como a lei dos senos e a lei dos cossenos em triângulos esféricos. Nessa abordagem, a superfície esférica será o ambiente em substituição ao plano, onde apresenta-se o triângulo esférico e algumas relações trigonométricas, tendo como referência básica Coutinho (2001), De Barros (2013), Todhunter (1886) e Zanella (2013).

Apresenta-se a geometria e a trigonometria esférica de maneira simples e acessível, e também algumas de suas aplicações, pois acredita-se que este deve ser um assunto ensinado em nossas escolas. Se não, deve constar pelo menos na formação do professor de matemática, dado que é uma parte interessante e enriquecedora da matemática.

No capítulo 1 fez-se uma revisão de algumas definições e resultados da geometria euclidiana plana que são importantes para o desenvolvimento desse trabalho, como as demonstrações da lei dos cossenos, lei dos senos e que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

No capítulo 2 apresentam-se os conceitos elementares da geometria esférica, como

ângulo, circunferência máxima, fuso esférico e os principais elementos da superfície esférica. Além de apresentarmos a definição de triângulo esférico, cujas relações trigonométricas são o principal objeto de estudo desse trabalho. Também será apresentado o Teorema de Girard.

No capítulo 3 são apresentadas e demonstradas a lei dos cossenos e a lei dos senos para triângulos esféricos, que são os teoremas centrais desse trabalho.

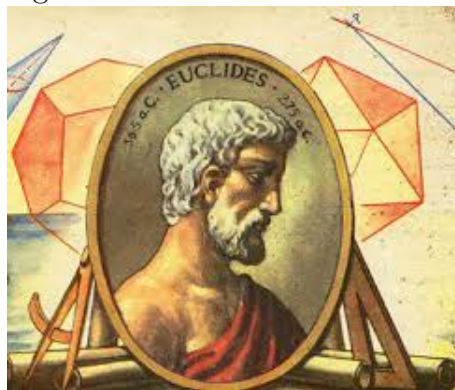
Ao final, no capítulo 4 expõe-se alguns conceitos básicos de coordenadas geográficas e algumas aplicações do Teorema de Girard e da lei dos senos e lei dos cossenos para triângulos esféricos. Também neste capítulo é dado um contraexemplo para o Teorema de Pitágoras.

Capítulo 1

PRELIMINARES

O estudo da geometria vem sendo desenvolvido desde a antiguidade e o conhecimento geométrico que se tem hoje é o resultado de contribuições de diferentes povos, como gregos, egípcios, árabes e hindus. Mas não podemos deixar de frisar aqui, a importância de Euclides de Alexandria¹, que foi o primeiro a organizar a geometria de maneira sistemática e dedutiva, partindo de informações simples e inegáveis como verdadeiras, e construindo toda uma cadeia de demonstrações a partir delas.

Figura 1.1: Euclides de Alexandria.



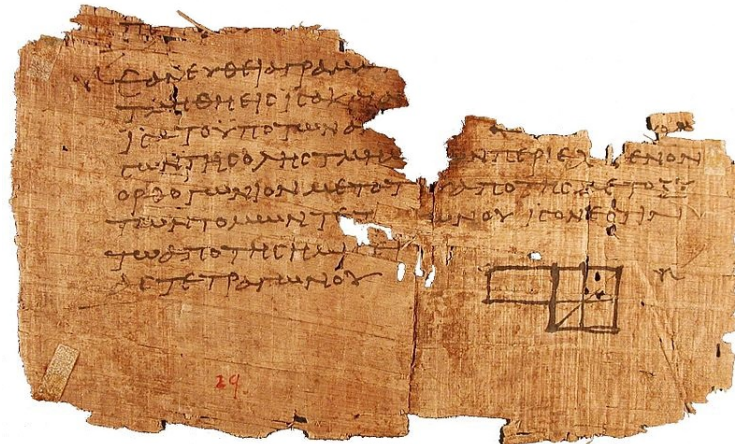
Fonte: Os Maiores da Humanidade²

A obra de Euclides *Os Elementos*, composta de treze volumes, foi escrita por volta do ano 300 a.C., e reúne todo o conhecimento de geometria da Grécia Antiga. Por vinte e três séculos, exerceu grande influência sobre o conhecimento matemático no mundo inteiro.

¹**Euclides de Alexandria:** viveu no século III a.C. Convidado por Ptolomeu I para lecionar na Academia de Alexandria, no Egito. Escreveu a mais importante obra de geometria de todos os tempos: *Os Elementos* (BOYER, 2010).

²Disponível em: <http://osmaioresdahumanidade.blogspot.com.br/2013/03/os-donos-dos-numeros-euclides.html>. Acesso em 20/03/2014.

Figura 1.2: Fragmento de *Os Elementos*, datado do ano 100 d. C.



Fonte: Os Maiores da Humanidade³

Euclides baseou a construção de sua geometria em 10 axiomas separados em dois grupos: cinco foram classificados como “noções comuns”, e os outros como “postulados”. As noções comuns parecem ter sido consideradas como hipóteses aceitáveis a todas as ciências ou a todas as pessoas inteligentes, enquanto que os postulados eram considerados como hipóteses características da geometria (BARBOSA, 2006, p. 105).

As cinco noções comuns propostas por Euclides são:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si;
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais;
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais;
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra;
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

E os postulados são:

1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos;
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente;
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;

³Disponível em: <http://osmaioresdahumanidade.blogspot.com.br/2013/03/os-donos-dos-numeros-euclides.html>. Acesso em 20/03/2014.

4. Todos os ângulos retos são iguais;
5. Se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 (num mesmo plano), de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de r é menor do que dois retos, então r_1 e r_2 , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r .

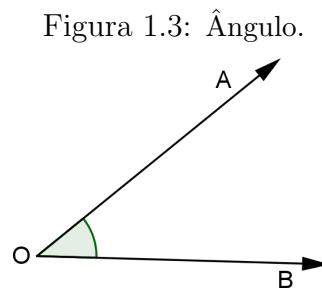
O postulado 1 e especialmente o postulado 5, chamado Postulado das Paralelas, ocupam um papel importante no assunto abordado nesse trabalho. Estudaremos isso com mais detalhes no capítulo 2.

Neste capítulo apresentamos alguns resultados importantes da geometria e trigonometria planas, necessários para a compreensão desse trabalho ou que terão um correspondente na geometria esférica, para fins de comparações.

1.1 Triângulo

Nesta seção estuda-se o triângulo plano e a nomenclatura de seus elementos mais importantes, como vértices, lados e ângulos.

Definição 1.1.1 (Ângulo). *Dadas, no plano, duas semirretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} , um ângulo (ou região angular) de vértice O e lados \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semiretas \overrightarrow{OA} e \overrightarrow{OB} .*



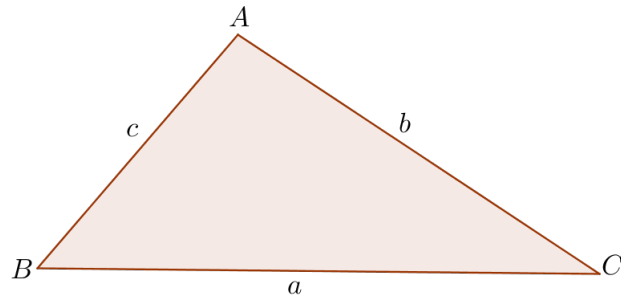
Fonte: Autor

Observação 1.1.1. *Para denotar um ângulo como o da figura pode-se usar as notações: $\angle AOB$ ou $A\hat{O}B$ que indicam que o ponto O é o vértice do ângulo, ou simplesmente \hat{O} , quando não houver risco de confusão com outro ângulo.*

Definição 1.1.2. *Considere três pontos A , B e C no plano. Se C estiver sobre a reta \overleftrightarrow{AB} , diz-se que A , B e C são **colineares**, caso contrário, afirma-se que A , B e C são **não colineares**.*

Definição 1.1.3 (Triângulo). *É a figura geométrica plana que ocupa o espaço interno limitado por três segmentos de retas que concorrem, dois a dois, em três pontos distintos e não colineares. E sendo A , B e C tais pontos, diz-se que A , B e C são os vértices do triângulo ABC .*

Figura 1.4: O triângulo ABC de lados a , b e c .



Fonte: Autor

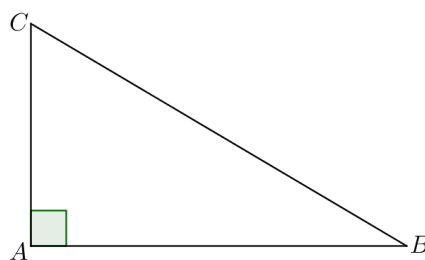
Diz-se também que os segmentos AB , AC e BC (ou seus comprimentos) são os lados do triângulo. Usualmente escreve-se $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{BC} = a$ para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo ABC , (Figura:1.4).

Definição 1.1.4. *Um triângulo ABC é denominado:*

- (a) **Equilátero**, se $a = b = c$.
- (b) **Isósceles**, se ao menos dois entre a , b e c forem iguais.
- (c) **Escaleno**, se $a \neq b \neq c \neq a$.

Definição 1.1.5 (Triângulo Retângulo). *Diz-se que um triângulo é retângulo quando este possui um ângulo de 90 graus (Figura:1.5).*

Figura 1.5: Triângulo Retângulo.

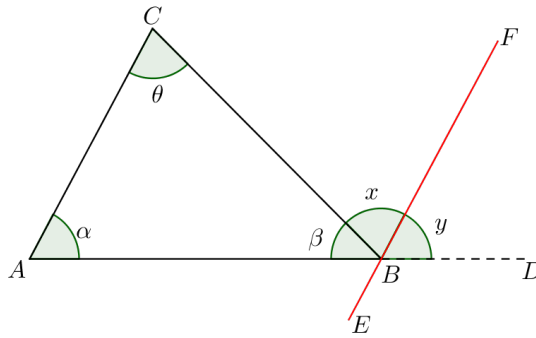


Fonte: Autor

Teorema 1.1.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° .*

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer e \overleftrightarrow{EF} a reta paralela a \overleftrightarrow{AC} e passando por B , (Figura: 1.6). E seja BD o prolongamento do lado AB e os ângulos $D\hat{B}F = y$, $C\hat{B}F = x$, $A\hat{B}C = \beta$, $B\hat{C}A = \theta$ e $B\hat{A}C = \alpha$. Temos que:

Figura 1.6: Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Fonte: Autor

I. O ângulo α é congruente ao ângulo y (correspondentes).

II. O ângulo θ é congruente ao ângulo x (alternos internos).

Isto é:

$$\alpha = y \quad (1.1)$$

$$\theta = x. \quad (1.2)$$

Além disso, a soma dos ângulos β , x e y formam um ângulo raso (180°), isto é,

$$\beta + x + y = 180^\circ. \quad (1.3)$$

Substituindo (1.1) e (1.2) em (1.3), temos:

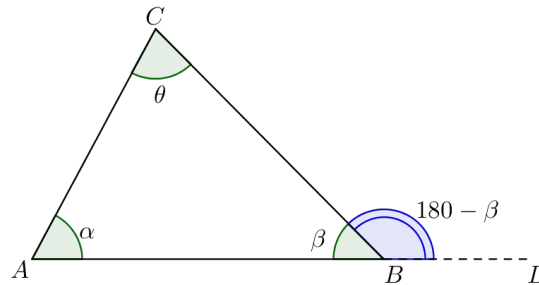
$$\alpha + \theta + \beta = 180^\circ.$$

□

Corolário 1.1.1 (Teorema do Ângulo Externo). *Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.*

Demonstração. Basta ver que, $\widehat{CBD} = 180 - \beta$. (Figura:1.7).

Figura 1.7: O teorema do ângulo externo.



Fonte: Autor

E pelo teorema (1.1.1), temos que:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \theta &= 180^\circ \\ 180^\circ - \beta &= \alpha + \theta\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\widehat{CBD} = \alpha + \theta$$

□

1.2 Lei dos Cossenos

O teorema principal desse trabalho é uma versão para a superfície esférica da conhecida lei dos cossenos, que é apresentada nesta seção.

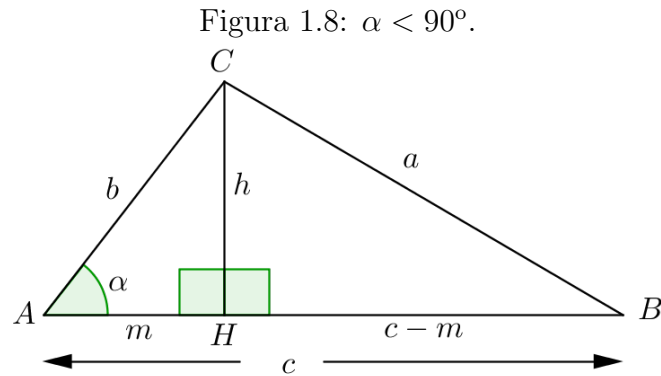
Teorema 1.2.1 (Lei dos Cossenos). *Em qualquer triângulo de lados a , b e c , o quadrado de um dos lados é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles, isto é,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

onde α é o ângulo formado pelos lados de comprimentos b e c .

Demonstração. Consideremos três casos distintos:

Caso I: $\alpha < 90^\circ$ Sejam:



Fonte: PAIVA (1995, p. 573)

- \overline{CH} a altura relativa ao lado \overline{AB} ;
- \overline{AH} a projeção ortogonal do lado \overline{AC} sobre o lado \overline{AB} ;
- \overline{BH} a projeção ortogonal do lado \overline{BC} sobre o lado \overline{AB} .

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos HBC e HAC , temos que:

$$h^2 + (c - m)^2 = a^2 \quad (1.4)$$

$$h^2 + m^2 = b^2. \quad (1.5)$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (1.4) e (1.5)

$$\begin{aligned} (c - m)^2 - m^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 - 2cm + m^2 - m^2 &= a^2 - b^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cm. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Do triângulo HAC , temos:

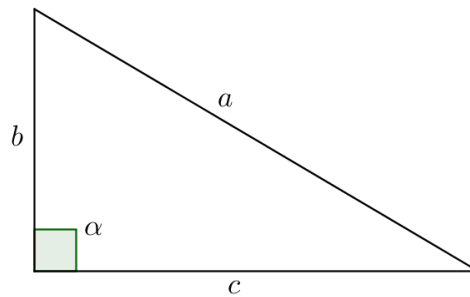
$$m = b \cdot \cos \alpha \quad (1.7)$$

E substituindo (1.7) em (1.6), temos finalmente:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Caso II: $\alpha = 90^\circ$

Figura 1.9: $\alpha = 90^\circ$.



Fonte: PAIVA (1995, p. 574)

Pelo Teorema de Pitágoras temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0.$$

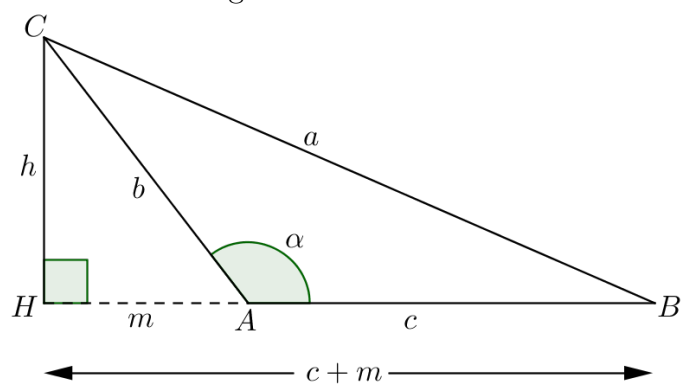
Mas $\cos 90^\circ = 0$, então:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

Assim, o teorema também é válido para $\alpha = 90^\circ$.

Caso III: $\alpha > 90^\circ$

Figura 1.10: $\alpha > 90^\circ$.



Fonte: PAIVA (1995, p.574)

Sejam:

- \overline{CH} a altura relativa ao lado \overline{AB} ;
- \overline{AH} a projeção ortogonal do lado \overline{AC} sobre o lado \overline{AB} ;
- \overline{BH} a projeção ortogonal do lado \overline{BC} sobre a reta que contém o lado \overline{AB} .

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos BHC e AHC , temos que:

$$h^2 + (c + m)^2 = a^2 \quad (1.8)$$

$$h^2 + m^2 = b^2. \quad (1.9)$$

Subtraindo membro a membro as igualdades (1.8) e (1.9):

$$\begin{aligned} (c + m)^2 - m^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 + 2cm + m^2 - m^2 &= a^2 - b^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 + 2cm. \end{aligned} \quad (1.10)$$

No triângulo AHC , a medida de \widehat{HAC} é $180^\circ - \alpha$. Assim:

$$\begin{aligned} m &= b \cdot \cos(180^\circ - \alpha) \\ m &= -b \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1.11)$$

E substituindo (1.11) em (1.10), encontramos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha.$$

□

Observação 1.2.1. *A lei dos cossenos é a generalização do Teorema de Pitágoras, que como se vê, é o caso particular em que $\alpha = 90^\circ$ (caso II).*

1.3 Lei dos Senos

Na geometria plana, ao se conhecer a medida de um dos lados de um triângulo e as medidas de seus ângulos, pode-se determinar a medida dos outros dois lados com o auxílio da lei dos senos. Combinando a lei dos senos com a lei dos cossenos, muitos problemas envolvendo triângulos podem ser solucionados.

Este resultado, possui também uma versão na trigonometria esférica, que será apresentada adiante.

Para provar a lei dos senos precisamos do seguinte teorema:

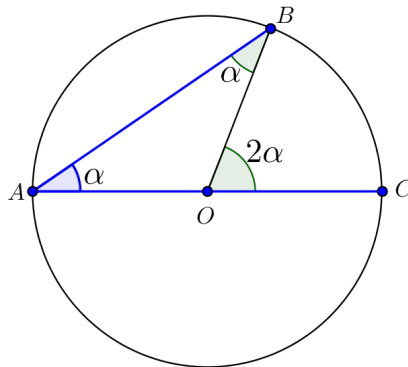
Teorema 1.3.1 (Ângulo Inscrito). *Se AB e AC são cordas de uma circunferência de centro O , então, a medida do ângulo inscrito \widehat{BAC} é igual à metade do ângulo central \widehat{BOC} .*

Demonstração. Consideremos três casos distintos.

Caso I: O centro O está sobre um dos lados de \widehat{BAC} .

Observe que o triângulo inscrito ABO , é isósceles de base AB , pois $AO=BO$. Então $\widehat{OAB} = \widehat{OBA}$, cuja medida chamaremos de α , (Figura: 1.11).

Figura 1.11: Ângulo inscrito quando o centro está sobre o mesmo.



Fonte: Autor

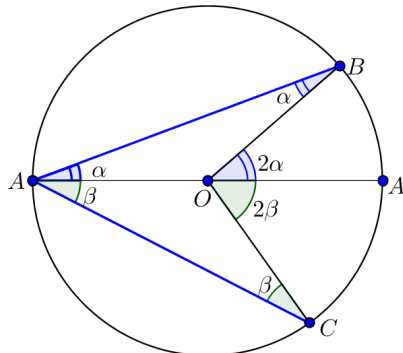
Pelo Teorema do Ângulo Externo (Corolário: 1.1.1), temos que:

$$\widehat{BOC} = \alpha + \alpha = 2\alpha = 2\widehat{BAC}$$

Ou seja, o dobro de \widehat{BAC} , como queríamos.

Caso II: O ângulo \widehat{BAC} contém o centro O em seu interior, (Figura: 1.12).

Figura 1.12: Ângulo inscrito quando o centro pertence ao mesmo.



Fonte: Autor

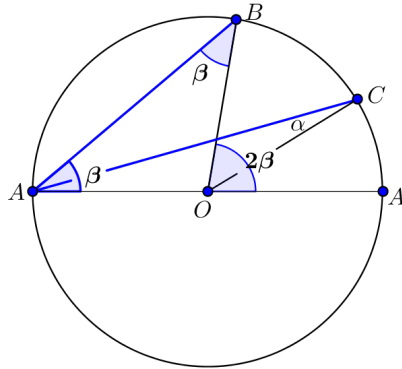
Tracemos por A o diâmetro AA' , e tracemos também os segmentos OB e OC . Os triângulos OAC e OAB são isósceles de bases AC e AB , respectivamente. Assim, seja $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \alpha$ e $O\hat{A}C = O\hat{C}A = \beta$. Dessa maneira, $B\hat{A}C = \alpha + \beta$, e pelo caso anterior, segue que $B\hat{O}A' = 2\alpha$ e $C\hat{O}A' = 2\beta$. Daí,

$$B\hat{O}C = B\hat{O}A' + C\hat{O}A' = 2(\alpha + \beta) = 2B\hat{A}C.$$

Caso III: O ângulo $B\hat{A}C$ não contém o centro O em seu interior.

Traçando o diâmetro AA' e os raios OB e OC , temos novamente dois triângulos isósceles, OAB e OAC , de bases AB e AC , (Figura:1.13).

Figura 1.13: Ângulo inscrito quando o centro não pertence ao mesmo.



Fonte: Autor

Fazendo $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \beta$ e $O\hat{A}C = O\hat{C}A = \alpha$, temos $B\hat{A}C = \beta - \alpha$, e pelo teorema do ângulo externo, $C\hat{O}A' = 2\alpha$ e $B\hat{O}A' = 2\beta$. Logo,

$$B\hat{O}C = B\hat{O}A' - C\hat{O}A' = 2(\beta - \alpha) = 2B\hat{A}C$$

□

Corolário 1.3.1. *Todos os ângulos inscritos que subtendem uma mesma corda (ou arco) têm a mesma medida. Em particular, todos os ângulos que subtendem um diâmetro (ou que estejam inscritos em uma semicircunferência) são retos.*

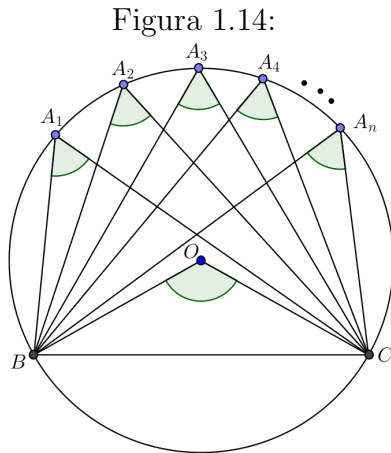
Demonstração.

- a) Do teorema anterior tem-se que, os ângulos $B\hat{A}_1C$, $B\hat{A}_2C$, $B\hat{A}_3C, \dots, B\hat{A}_nC$ que subtendem a corda BC (Figura:1.14), são todos iguais a $\frac{1}{2}B\hat{O}C$. E pelo 1º axioma⁴ de Euclides, do grupo de axiomas conhecidos como noções comuns, tem-se:

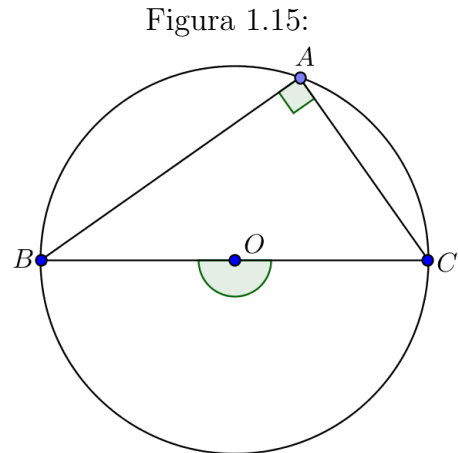
$$B\hat{A}_1C = B\hat{A}_2C = B\hat{A}_3C = \dots = B\hat{A}_nC.$$

⁴Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si. (Página 11).

b) Seja BC um diâmetro, isto é, $\widehat{BOC} = 180^\circ$ (Figura:1.15). Do teorema do ângulo inscrito segue que $\widehat{BAC} = 90^\circ$.



Fonte: Autor



Fonte: Autor

Teorema 1.3.2 (Lei dos Senos). *Em qualquer triângulo ABC de lados a , b e c , a razão entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.*

Isto é,

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}} = 2R,$$

onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo.

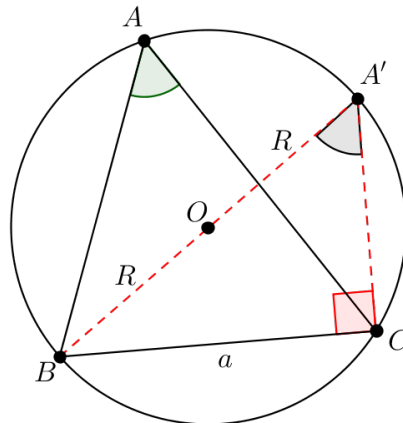
Demonstração. Consideremos três casos distintos:

Caso I: O centro O da circunferência circunscrita é um ponto interior ao triângulo.

Seja ABC um triângulo inscrito numa circunferência de raio R . Pelo vértice B do triângulo, tracemos o diâmetro correspondente BA' e liguemos A' com C , (Figura:1.16).

Pelo corolário (1.3.1), temos que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ por subtenderem, na circunferência, a mesma corda BC , e temos também que o triângulo $A'BC$ é retângulo em C , pois subtende o diâmetro BA' .

Figura 1.16: Lei dos Senos, primeiro caso.



Fonte: Autor

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\widehat{A}' &= \frac{a}{2R} \\ a &= 2R \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}' \\ a &= 2R \cdot \operatorname{sen}\widehat{A}. \\ \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} &= 2R. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Analogamente prova-se que:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = 2R. \tag{1.13}$$

E que:

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R \tag{1.14}$$

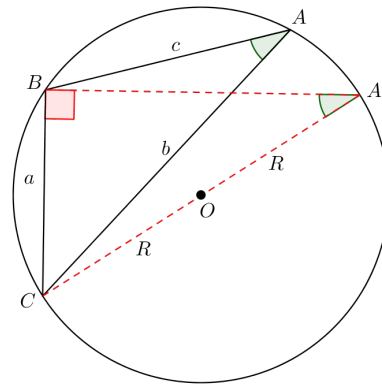
Assim, de (1.12), (1.13) e (1.14), tem-se que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R.$$

Caso II: O centro O da circunferência circunscrita é um ponto exterior ao triângulo.

Seja ABC o triângulo inscrito numa circunferência de raio R , de maneira que o centro O da circunferência seja exterior a ABC . Sendo CA' um diâmetro dessa circunferência, temos que o ângulo $\widehat{CBA'}$ é reto, pois subtende um diâmetro (Corolário:1.3.1).

Figura 1.17: Lei dos Senos, segundo caso.



Fonte: PAIVA (1995, p.579)

Tem-se então, que:

$$\text{sen}\widehat{A}' = \frac{a}{2R}.$$

Porém, os ângulos \widehat{A} e \widehat{A}' são congruentes, pois subtendem a mesma corda BC . Logo, temos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}\widehat{A}' &= \text{sen}\widehat{A} = \frac{a}{2R} \\ \frac{a}{\text{sen}\widehat{A}} &= 2R. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Traçando por A o diâmetro AC' , temos analogamente que:

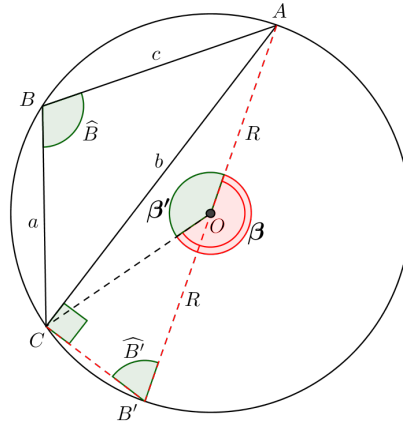
$$\frac{c}{\text{sen}\widehat{C}} = 2R. \quad (1.16)$$

Observe que, como o ângulo \widehat{B} é obtuso, não se consegue mostrar a validade da razão $\frac{b}{\text{sen}\widehat{B}} = 2R$, de forma análoga a que fizemos com \widehat{A} e \widehat{C} e seus respectivos lados opostos. Para isto, faz-se uma outra construção.

Para o lado b e seu ângulo oposto \widehat{B} , façamos o seguinte: tracemos por A o diâmetro AB' , e teremos os ângulos, \widehat{B} e \widehat{B}' (Figura: 1.18).

Na circunferência temos os arcos: $\widehat{AB'C}$ e \widehat{ABC} , e os ângulos β e β' , subtendem esses arcos, respectivamente.

Figura 1.18:



Fonte: Autor

Observe que:

$$\beta + \beta' = 360^\circ. \quad (1.17)$$

Além disso, pelo teorema (1.3.1) e o corolário (1.3.1), temos:

$$A\widehat{C}B' = 90^\circ \quad (1.18)$$

$$\widehat{B} = \frac{\beta}{2} \quad (1.19)$$

$$\widehat{B}' = \frac{\beta'}{2}. \quad (1.20)$$

De (1.17), (1.19) e (1.20), temos as igualdades:

$$\begin{aligned} \widehat{B} + \widehat{B}' &= 180^\circ \\ \widehat{B}' &= (180^\circ - \widehat{B}). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Por (1.18) e (1.21) temos que:

$$\text{sen}\widehat{B}' = \text{sen}(180^\circ - \widehat{B}) = \frac{b}{2R}. \quad (1.22)$$

Mas

$$\text{sen}(180^\circ - \widehat{B}) = \text{sen}\widehat{B}. \quad (1.23)$$

Finalmente, por (1.22) e (1.23):

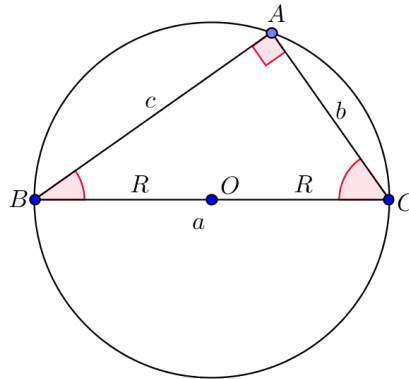
$$\frac{b}{\text{sen}\widehat{B}} = 2R. \quad (1.24)$$

Assim, por (1.15), (1.16) e (1.24), concluímos que:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} = 2R.$$

Caso III: O centro O da circunferência circunscrita pertence a um dos lados do triângulo (Figura:1.19).

Figura 1.19: Lei dos senos, terceiro caso.



Fonte: Autor

Como BC é um diâmetro, tem-se que $a = 2R$ e que \widehat{A} é reto, pois está inscrito numa semicircunferência. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\widehat{B} &= \frac{b}{2R} \\ \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} &= 2R. \end{aligned} \quad (1.25)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\widehat{C} &= \frac{c}{2R} \\ \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}} &= 2R. \end{aligned} \quad (1.26)$$

E, como $a = 2R$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2R} &= 1 = \operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen}\widehat{A} \\ \frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} &= 2R. \end{aligned} \quad (1.27)$$

De (1.25), (1.26) e (1.27) concluimos que:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}}A} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}}B} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}}C} = 2R.$$

□

Capítulo 2

A GEOMETRIA DO TRIÂNGULO ESFÉRICO

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos da Geometria Esférica, encontrados em ZANELLA (2013), DE BARROS (2013) e COUTINHO (2001).

Estuda-se a superfície esférica e seus principais elementos. A importância desse estudo se deu devido ao fato de que a superfície esférica está para a geometria esférica assim como o plano está para a geometria euclidiana plana. Assim, os elementos estudados, como os correspondentes esféricos às retas, ângulos e triângulos da geometria euclidiana, são todos construídos sobre essa superfície. O estudo das superfícies esféricas tem sido de interesse humano desde a antiguidade, prova disso é que o tratado de matemática grego mais antigo sobrevivente é, *Sobre a Esfera Movente*, de Autolycus de Pitane.

2.1 A Superfície Esférica

Apresenta-se aqui a geometria básica da superfície esférica, fundamental para o entendimento desse trabalho.

Definição 2.1.1 (Esfera). *Seja O um ponto no espaço e $r > 0$ um número real. Chama-se esfera de centro O e raio r o conjunto de todos os pontos P do espaço tais que a distância entre O e P é menor ou igual a r , isto é: $d(O, P) \leq r$.*

Definição 2.1.2 (Superfície Esférica). *A Superfície Esférica de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos P do espaço, tais que $d(O, P) = r$.*

Definição 2.1.3 (Corda da Superfície Esférica). *Denomina-se por corda o segmento de reta determinado por dois pontos distintos da superfície esférica.*

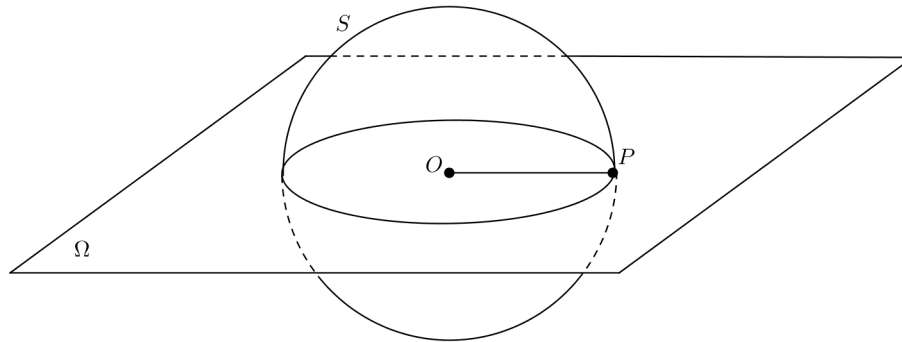
Definição 2.1.4 (Diâmetro da Superfície Esférica). Chama-se diâmetro da superfície esférica a corda que passa pelo seu centro O .

Definição 2.1.5 (Pontos Antípodas). Dado um ponto P na superfície esférica, seu antípoda P' é o único ponto da superfície esférica tal que o segmento de reta PP' contém o centro O .

Observação 2.1.1. Dois pontos distintos de uma superfície esférica são antípodas um do outro quando são os extremos de um diâmetro da superfície esférica.

Teorema 2.1.1. A intersecção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio que a superfície esférica.

Figura 2.1: Intersecção do plano Ω com a superfície esférica S .



Fonte: Autor

Demonstração. Seja S a superfície esférica de centro O e raio r , e seja Ω o plano que passa por O , (Figura: 2.1). Queremos mostrar que:

$$S \cap \Omega = \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$$

Para isso é necessário que:

1. $S \cap \Omega \subset \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$, e que:
 2. $\{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\} \subset S \cap \Omega$.
1. Dado $P' \in S \cap \Omega$, segue que $P' \in S$ e $P' \in \Omega$, como $P' \in S$, então $d(P', O) = r$, logo $P' \in \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$. E como P' é um ponto genérico de $S \cap \Omega$, segue que:

$$S \cap \Omega \subset \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}. \quad (2.1)$$

2. Dado $P' \in \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$, temos que $d(P, O) = r$. Logo, além de P' pertencer a Ω , temos também que P' pertence a S , portanto: $P' \in S \cap \Omega$. E como P' é um ponto genérico de $\{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\}$, segue que:

$$\{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\} \subset S \cap \Omega \quad (2.2)$$

Das igualdade (2.1) e (2.2), segue que:

$$S \cap \Omega = \{P \in \Omega \mid d(P, O) = r\} \quad (2.3)$$

Observe que o segundo membro da igualdade (2.3) é a definição de uma circunferência de centro O e raio r (veja MUNIZ NETO). O que conclui a nossa demonstração. \square

2.2 Circunferência Máxima

Sobre uma superfície esférica S pode-se traçar circunferências com diferentes raios, mas algumas dessas circunferências desempenham papel importantíssimo na trigonometria esférica, são as chamadas circunferências máximas.

Definição 2.2.1 (Circunferência Máxima). *Seja S uma superfície esférica de centro O e raio r . Denomina-se circunferência máxima a circunferência em S de centro O e raio r .*

Observação 2.2.1. *A circunferência do teorema (2.1.1) é uma circunferência máxima.*

2.2.1 Elementos Notáveis da Superfície Esférica

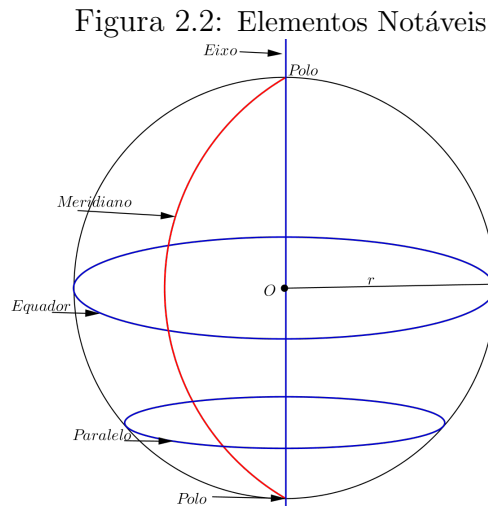
Apresentam-se agora elementos importantes da superfície esférica, obtidos a partir de circunferências, pontos e intersecções de retas com esta superfície. Os nomes de alguns elementos vistos aqui nos são familiares do estudo da geografia, (Figura: 2.2). Como se vê adiante, são essenciais para a determinação das coordenadas geográficas, permitindo localizar a posição de qualquer ponto sobre a Terra.

A abordagem aqui se dá de maneira mais geral, pois refere-se a qualquer superfície esférica e não somente a Terra.

Definição 2.2.2 (Elementos Notáveis da Superfície Esférica).

- (i) **Eixo:** *É qualquer reta que contém o centro O .*
- (ii) **Polos:** *Chamamos de polos os pontos de intersecção do eixo com a superfície esférica.*

- (iii) **Meridiano:** *É uma semicircunferência máxima cujo plano contém o eixo e liga os polos.*
- (iv) **Equador:** *É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.*
- (v) **Paralelo** *É uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo. Ela é paralela ao equador.*



Fonte: Autor

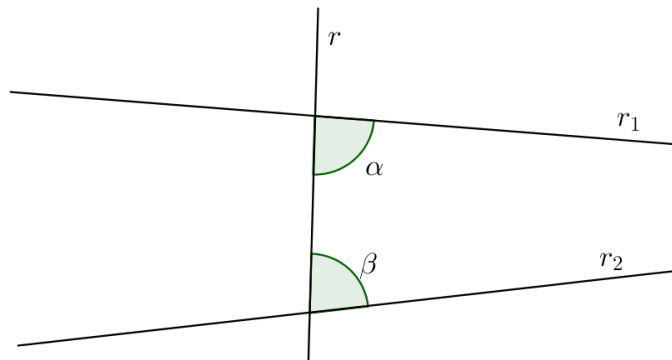
2.3 As Circunferências Máximas e os Postulados de Euclides

As circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica, isto é, são aquelas que têm o mesmo raio da superfície esférica. Na geometria esférica essas circunferências ocupam o lugar das retas na geometria euclidiana, e a própria superfície esférica ocupa o lugar do plano. Podemos dizer então que as circunferências máximas, construídas sobre essa superfície, são as retas na Geometria Esférica. Com isso surge o questionamento: Qual o comportamento das circunferências máximas em relação aos postulados de Euclides que tratam das retas? Os teoremas e proposições desta seção nos permitirão chegar a algumas conclusões sobre a relação das circunferências máximas com os seguintes postulados de Euclides.

Postulado 2.3.1 (Primeiro postulado de Euclides). *Dois pontos distintos determinam uma única reta que os contém¹.*

Postulado 2.3.2 (Postulado das Paralelas). *Se uma reta r corta duas outras retas r_1 e r_2 (num mesmo plano), de modo que a soma dos ângulos interiores de um mesmo lado de r é menor do que dois retos, então r_1 e r_2 , quando prolongadas suficientemente, se cortam daquele lado de r (Figura (2.3)) .*

Figura 2.3: $\alpha + \beta < \pi$.



Fonte: Autor

Pouco evidente para ser aceito sem demonstração, o Postulado das Paralelas foi objeto de estudo de muitos matemáticos ao longo dos séculos, que em vão tentaram demonstrá-lo a partir dos outros quatro:

O postulado 5 (chamado o Postulado das Paralelas) é definitivamente não evidente e, durante vários séculos, geômetras de todas as origens tentaram demonstrá-lo a partir dos outros postulados. Embora sem aplicações práticas imediatas, o problema teve, como logo veremos, implicações filosóficas e matemáticas da maior importância (CARMO, 1987, p.27).

Uma das implicações mencionadas pelo autor foi o surgimento das geometrias não euclidianas, que são aquelas onde não se aplica o quinto postulado.

Ainda segundo (CARMO, 1987, p.27): “Existem várias formas equivalentes do Postulado 5, das quais a mais famosa é atribuída a Playfair² (que em 1795 publicou uma edição de *Os Elementos* de Euclides) e que se enuncia da maneira seguinte”:

Postulado 2.3.3. *Dados uma reta r e um ponto A , fora de r , existe uma única reta s que passa por A e é paralela a r .*

¹O 1º postulado já foi apresentado no início do capítulo 1. Apresenta-se aqui a forma utilizada nos dias atuais, equivalente àquela apresentada por Euclides.

²**John Playfair** nasceu em Benvie na Escócia, em 10 de março de 1748. Lecionou matemática na universidade de Edimburgo. Faleceu em Burntisland, também na Escócia, em 20 de julho de 1819 (FAUL, 1983).

Figura 2.4: John Playfair.

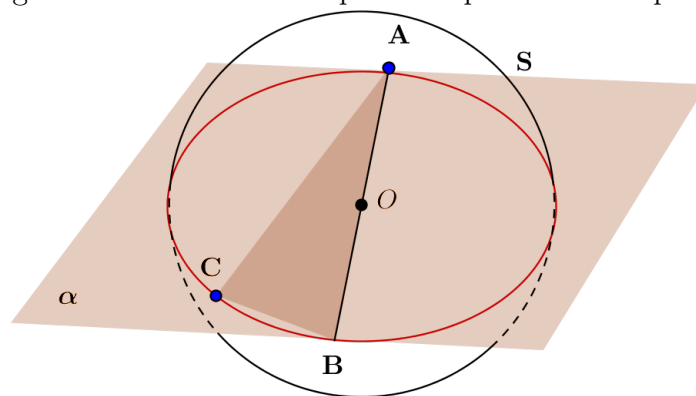


Fonte: The Artchive³

Teorema 2.3.1. *Por dois pontos distintos de uma superfície esférica S de centro O e raio r , sempre passa uma circunferência máxima.*

Demonstração. Dados dois pontos distintos A e B , sobre a superfície esférica S , temos duas, e apenas duas possibilidades, A e B são antípodas um do outro ou A e B não são antípodas.

Caso I: Suponha que A e B sejam antípodas um do outro.

Figura 2.5: Circunferência passando por A e B antípodas.

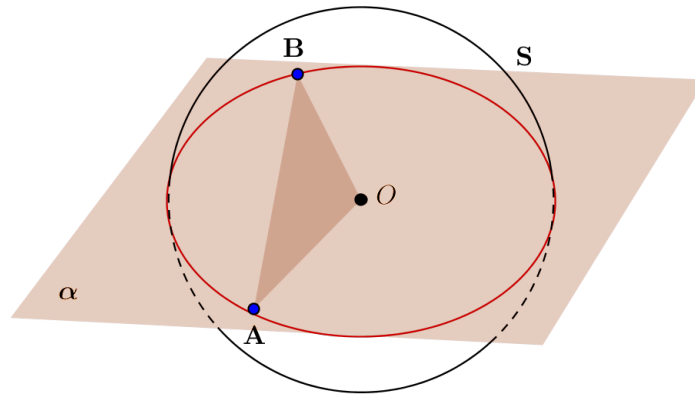
Fonte: Autor

Nesse caso, o segmento AB é um diâmetro e contém o centro O da superfície esférica. Tomando-se os pontos A , B e um ponto C sobre S , distinto de A e B , obtemos um plano

³Disponível em: <http://www.artchive.com/web-gallery/S/Sir-Henry-Raeburn/John-Playfair,-c.1814.html>. Acesso em 21/03/2014.

α que os contém. Portanto α contém o segmento AB e, conseqüentemente, o centro O de S , já que AB é o diâmetro de S . Pelo teorema (2.1.1), temos que α intersecta a superfície esférica formando uma circunferência máxima que contém A e B (Figura:2.5). Assim, se A e B são antípodas, existe uma circunferência máxima que passa por esses dois pontos. Caso II: Suponha agora que A e B não sejam antípodas um do outro.

Figura 2.6: Circunferência sobre dois pontos quaisquer.



Fonte: Autor

Da geometria euclidiana temos que os pontos A , B e O , que é o centro de S , determinam um único plano α que os contém (Figura:2.6). Como α contém o centro O da superfície esférica, segue do teorema (2.1.1), que existe uma circunferência máxima passando por A e B . \square

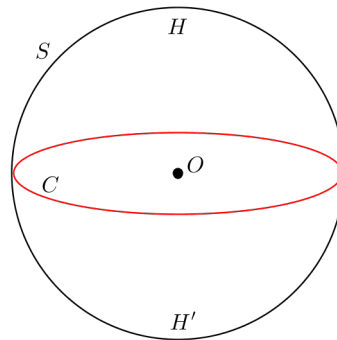
Como foi dito no início desta seção, na geometria esférica a superfície esférica é o equivalente ao plano na geometria plana, e as circunferências máximas são equivalentes às retas. Considerando o teorema (2.3.1), pode-se analisar as diferenças entre o comportamento das retas no plano e na superfície esférica, em relação aos postulados (2.3.1) e (2.3.3). No caso I, do teorema (2.3.1), mostramos que por dois pontos antípodas de S sempre passa uma circunferência máxima. Mas na verdade pode-se mostrar que se A e B são antípodas um do outro, existem infinitas circunferências máximas sobre S que os contém, faremos isso adiante, na proposição (2.3.2).

Definição 2.3.1 (Hemisfério). *Uma circunferência máxima divide a superfície esférica S em duas regiões chamadas hemisférios, que são as chamadas superfícies semiesféricas.*

Proposição 2.3.1. *Dada uma circunferência máxima C e um ponto P na superfície esférica fora dela, toda circunferência máxima que passa por P intersecta C .*

Demonstração. Seja C uma circunferência máxima sobre S . Pela definição (2.3.1), temos que C divide S em dois hemisférios H e H' , (Figura: 2.7).

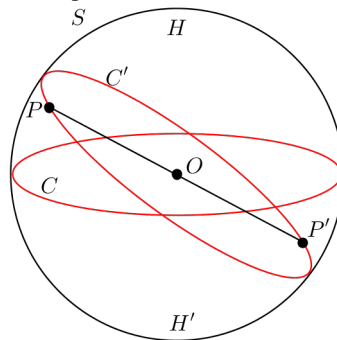
Figura 2.7: Circunferência C dividindo S em dois hemisférios.



Fonte: Autor

Tomando sobre H um ponto arbitrário P , temos que seu antípoda P' encontra-se em H' , pois pela definição (2.1.5) a corda que os une passa necessariamente pelo centro O de S , (Figura: 2.8).

Figura 2.8: Intersecção de duas circunferências máximas.



Fonte: Autor

Seja C' uma circunferência máxima qualquer que passa por P . Como são antípodas, P e P' são diametralmente opostos, portanto C' contém P e P' . Como P e P' estão situados em hemisférios diferentes, divididos por C , temos que C' intersecta C . \square

A proposição(2.3.1) nos revela um ponto importante da geometria esférica. Sendo as circunferências máximas modelos para as retas e a superfície esférica um modelo para o plano, essa proposição garante a não validade do Postulado das Paralelas na geometria esférica, caracterizando-a como uma geometria não euclidiana, pois, dado um ponto arbitrário P sobre S , não pertencente a uma circunferência máxima C dada, qualquer circunferência máxima (reta) C' que passa por P , intersecta C . De maneira que, não existem retas paralelas na geometria esférica.

Proposição 2.3.2. *Sejam A e B pontos antípodas um do outro sobre uma superfície esférica S de centro O . Existem infinitas circunferências máximas em S passando por A e B .*

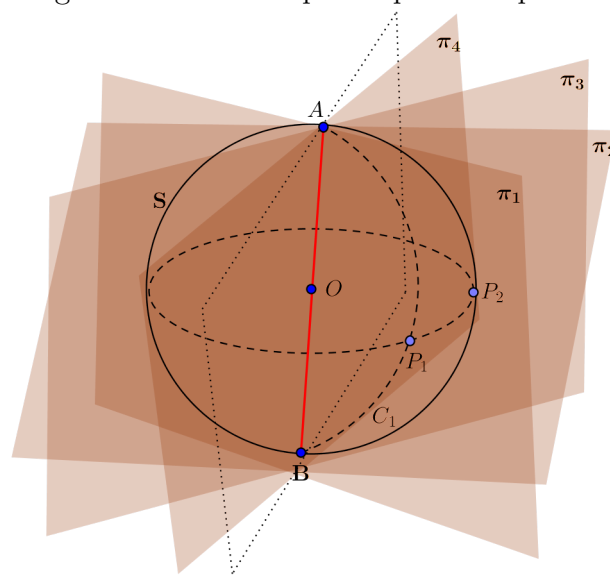
Demonstração. Pelo teorema (2.3.1) existe uma circunferência máxima C_1 que contém os pontos antípodas A e B .

Pela proposição (2.3.1) C_1 intersecta o equador. Seja P_1 um ponto de intersecção de C_1 com o equador, então P_1 , A e B determinam um plano π_1 .

Tomemos agora um ponto P_2 pertencente ao equador, onde $P_2 \neq P_1$. Então P_2 , A e B determinam um plano $\pi_2 \neq \pi_1$. Como $O \in \pi_2$ então $C_2 = \pi_2 \cap S$ é uma circunferência máxima.

Como o equador é uma circunferência, possui infinitos pontos, e podemos continuar com o mesmo raciocínio, obtendo-se infinitos planos (Figura:2.9).

Figura 2.9: Infinitos planos passando por O .



Fonte: Autor

□

Com a proposição (2.3.2) mostramos a não validade do primeiro postulado de Euclides na geometria esférica, pois por dois pontos de S podem passar infinitas “retas”, bastando para isso que os mesmos sejam antípodas um do outro. No caso em que A e B não forem antípodas um do outro, a circunferência máxima que passa por esses dois pontos é única, dado que o plano que passa por A , B e O , centro de S , é único, coincidindo com o primeiro postulado de Euclides.

2.4 Distância Entre Dois Pontos.

A forma de medir a distância entre dois pontos pode variar, dependendo do tipo de superfície em que eles se encontram. Mas em qualquer superfície e utilizando qualquer sistema de medida, a distância é dada pelo caminho mais curto para se chegar de um

ponto a outro. Conforme Alves:

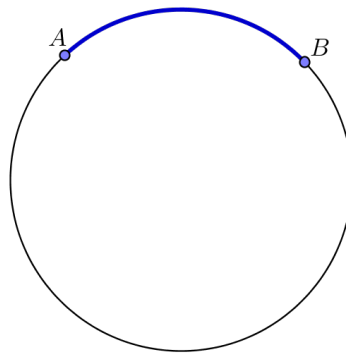
A distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B , é essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias ligando A e B . No plano, a trajetória de menor comprimento é o segmento de reta AB e seu comprimento \overline{AB} é a distância entre A e B . Sobre uma superfície esférica, no entanto, não existe um segmento de linha reta uma vez que ela é curvada em todas as direções [...](ALVES, 2009, p.71).

Como podemos então medir a distância entre dois pontos que se encontram sobre uma superfície esférica?

O resultado a seguir responde a essa pergunta. Sua demonstração encontra-se em (ALVES, 2009, p.74-75), e está além dos objetivos da abordagem nesse trabalho, por isso é enunciado aqui como definição.

Definição 2.4.1 (Distância ente dois pontos). *A distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B sobre uma superfície esférica S é o comprimento do arco menor \widehat{AB} da circunferência máxima que passa por A e B (Figura: 2.10).*

Figura 2.10: Distância entre dois pontos A e B .



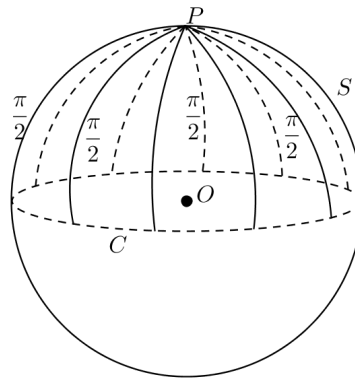
Fonte: Autor

Se o comprimento do menor arco de circunferência máxima que liga os pontos A e B for de 90° (ou $\frac{\pi}{2}$ radianos), esse arco recebe um nome especial, conforme a definição a seguir.

Definição 2.4.2 (Quadrante). *Um quadrante é um arco de circunferência máxima que mede exatamente $\frac{\pi}{2}$ radianos ou 90° graus.*

Definição 2.4.3 (Polo de uma circunferência máxima). *Seja C uma circunferência máxima sobre a superfície esférica S . Chamamos de **polo** da circunferência máxima C o ponto P sobre S tal que, a distância de P a qualquer ponto de C é igual a $\frac{\pi}{2}$. (Figura: 2.11).*

Figura 2.11: Polo de uma circunferência máxima.



Fonte: Autor

Proposição 2.4.1. *Sejam A , C e P pontos sobre a superfície esférica tais que A e C não são antípodas um do outro. Se os arcos de circunferências máximas que ligam o ponto P aos pontos A e C forem, cada um deles igual a um quadrante, então P é um polo da circunferência máxima que passa por A e C .*

Demonstração. Seja O o centro da superfície esférica, como PA e PC são quadrantes os ângulos \widehat{POA} e \widehat{POC} são retos. Daí, o segmento PO é perpendicular ao plano AOC , e P é um polo da circunferência máxima que passa por A e C .

□

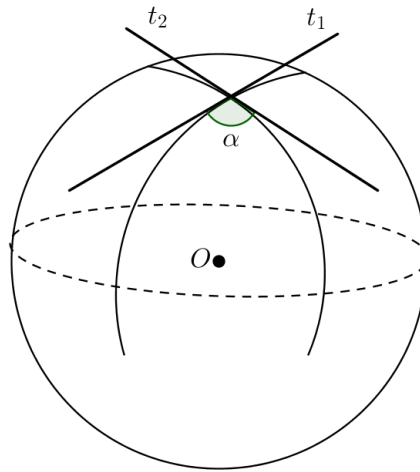
Os conceitos de quadrante e polo de uma circunferência máxima, serão utilizados adiante, na demonstração de um dos principais teoremas apresentados neste trabalho, a lei dos cossenos nos triângulos esféricos.

2.5 Ângulo sobre a Superfície Esférica

A definição de ângulo na geometria esférica está intrinsecamente ligada à definição de ângulo da geometria euclidiana. E como se vê ao longo desse trabalho, elementos da geometria euclidiana são sempre utilizados como suporte para a geometria esférica.

Definição 2.5.1 (Ângulo Esférico). *O ângulo esférico α é a intersecção de dois arcos de circunferências máximas, e sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção (Figura: 2.12).*

Figura 2.12: Ângulo entre dois arcos de circunferências máximas.



Fonte: Autor

Observe que os ângulos são definidos entre circunferências máximas, ou arcos de circunferência máximas, assim como na geometria euclidiana, são definidos por retas ou partes de retas, como segmentos ou semirretas.

2.6 Fusos Esféricos

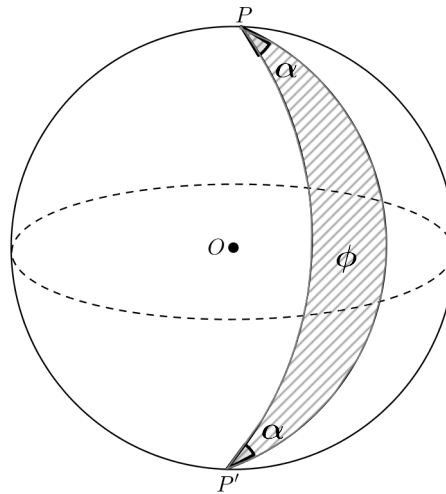
Com apenas dois arcos de circunferência máxima, consegue-se construir sobre S uma figura geométrica fechada. Na geometria plana, precisa-se de pelo menos três segmentos de retas para construir um polígono, que nesse caso é um triângulo. Na geometria esférica, com dois arcos obtém-se uma região chamada de fuso esférico ou biângulo esférico, (Figura: 2.13).

Definição 2.6.1 (Fuso Esférico). *Um fuso esférico é a região da superfície esférica compreendida entre dois meridianos.*

Definição 2.6.2 (Vértices do Fuso Esférico). *Chamamos de vértices do fuso esférico aos dois pontos em comum pertencentes aos meridianos e diametralmente opostos.*

Definição 2.6.3 (Ângulo do Fuso Esférico). *O ângulo do fuso é o ângulo entre os dois meridianos que constituem os lados do fuso.*

Proposição 2.6.1 (Área do Fuso Esférico). *Se o ângulo do fuso construído sobre uma superfície esférica de raio r mede α radianos, a área desse fuso é igual a $2.\alpha.r^2$.*

Figura 2.13: Fuso esférico ϕ de vértices P e P'.

Fonte: Autor

Demonstração. Seja A_f a área do fuso esférico. Essa área está para a área da superfície esférica $4\pi r^2$, assim como o ângulo do fuso α radianos está para 2π .

$$\begin{aligned} \frac{A_f}{4\pi r^2} &= \frac{\alpha}{2\pi} \\ A_f &= 2\alpha r^2. \end{aligned}$$

□

Exemplo 2.6.1.

Um fuso de ângulo $\alpha = \pi$ é um hemisfério (cuja área é $2\pi r^2$).

Exemplo 2.6.2.

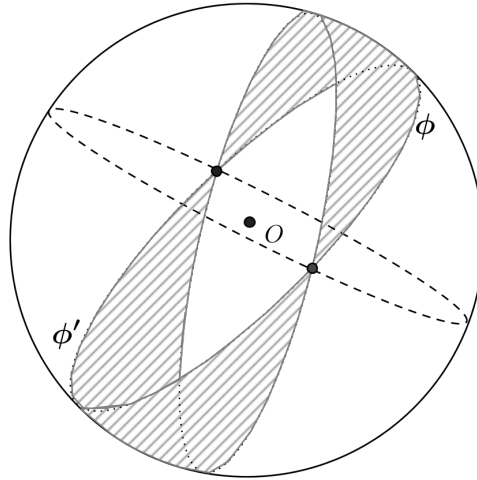
Um fuso de ângulo $\frac{\pi}{2}$ ocupa $\frac{1}{4}$ da superfície esférica, de maneira que sua área será de πr^2 , que é a área de um círculo de raio r .

Definição 2.6.4 (Fuso Completo). Dado um fuso ϕ na superfície esférica, o conjunto formado por todos os antípodas dos pontos de ϕ é também um fuso ϕ' , chamado de fuso antípoda de ϕ . A reunião $\Phi = \phi \cup \phi'$ chama-se um fuso completo.

Proposição 2.6.2. Seja ϕ o fuso construído sobre uma superfície esférica de raio r e ϕ' o fuso antípoda de ϕ . Então, a área do fuso completo $\Phi = \phi \cup \phi'$ é igual a $4\alpha r^2$, onde α é o ângulo do fuso esférico.

Demonstração. Como ϕ' é formado por todos os pontos antípodas de ϕ , segue que ϕ' tem a mesma área que ϕ (que como vimos na proposição 2.6.1 é de $2\alpha r^2$). Ou seja, a área do fuso completo é $2 \cdot 2\alpha r^2 = 4\alpha r^2$. □

Figura 2.14: Fuso Completo.



Fonte: Autor

Teorema 2.6.1. *Seja Φ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da superfície esférica S , a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R e R' do fuso completo Φ contidas em cada um desses hemisférios têm a mesma área $2\alpha r^2$.*

Demonstração. Consideremos a função $f : S \rightarrow S$, que transforma cada ponto $x \in S$ em seu antípoda $f(x) = x'$. Esta função tem as seguintes propriedades:

- 1^a Se x é um ponto do hemisfério H , seu antípoda $x' = f(x)$ pertence ao hemisfério oposto H' ;
- 2^a Se x é um ponto do fuso completo Φ , seu antípoda $x' = f(x)$ ainda pertence a Φ ;
- 3^a Dada qualquer região R da superfície esférica, a região antípoda $R' = f(R)$, formada pelos pontos antípodas dos pontos de R , tem a mesma área que R . Portanto, se chamarmos de R a parte do fuso completo Φ situada no hemisfério H , veremos que sua região antípoda R' é a parte de Φ situada no hemisfério H' e que a área de $\Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2 \cdot (\text{área de } R)$. Portanto, a área de $R = 2\alpha r^2$.

□

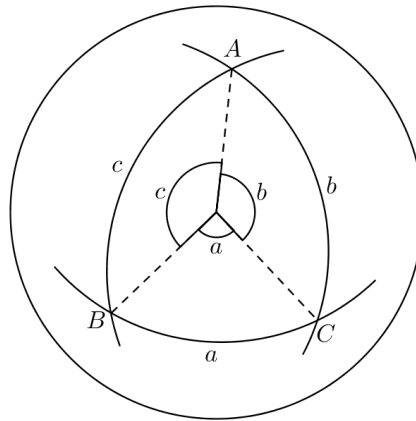
Observação 2.6.1. *O resultado anterior será utilizado na demonstração do Teorema de Girard, que será visto adiante.*

2.7 Triângulo Esférico

Os triângulos esféricos são o principal objeto desse estudo, pois os dois teoremas principais abordados aqui tratam das relações trigonométricas nesses triângulos. Pode-se calcular a área desses triângulos, bem como estudar as relações entre seus lados e ângulos.

Definição 2.7.1 (Triângulo Esférico). *Sejam A , B e C três pontos distintos sobre um mesmo hemisfério da superfície esférica S , e não pertencentes a mesma circunferência máxima. A figura formada pelos arcos de circunferências máximas, que unem esses pontos dois a dois, chama-se triângulo esférico.*

Figura 2.15: Triângulo Esférico.



Fonte: COUTINHO (2001, p. 84)

Os lados \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{AB} do triângulo esférico são denotados por a , b e c , respectivamente, e correspondem a medida, em graus (ou radianos), dos ângulos subtendidos por eles no centro da superfície esférica. Os ângulos do triângulo ABC são os ângulos esféricos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , (Figura: 2.15).

2.8 Teorema de Girard

Apresenta-se agora o Teorema de Girard, que permite encontrar a área de um triângulo esférico, dados seus ângulos internos e o raio da superfície esférica que o contém. Demonstrado em 1629 pelo francês Albert Girard⁴, o teorema permite obter, além da área, uma série de informações sobre os triângulos esféricos.

⁴**Albert Girard:** nasceu em Saint-Mihiel na França em 1595, mas migrou ainda jovem para a Holanda, fugindo da perseguição aos calvinistas em sua terra natal. Viveu na cidade de Leiden, onde desenvolveu trabalhos em matemática, engenharia, óptica e música. Morreu em 8 de dezembro de 1632. (BOYER, 2010).

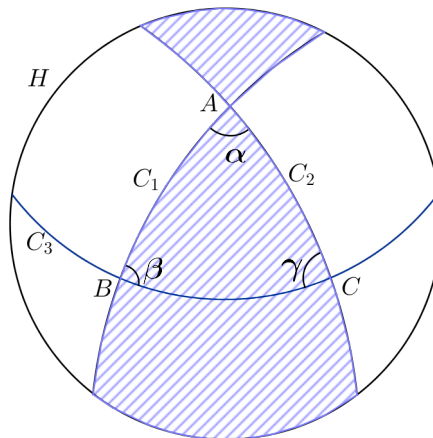
Figura 2.16: Albert Girard.



Fonte: Wikimedia Commons⁵

Teorema 2.8.1 (Teorema de Girard). *Se α , β e γ são os ângulos internos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então: $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$, onde A é a área do triângulo e r é o raio da superfície esférica que o contém.*

Demonstração. Seja H um hemisfério que contenha o triângulo esférico gerado pelas intersecções das circunferências máximas C_1 , C_2 e C_3 (Figura: 2.17). Prolongando nos dois sentidos os lados que formam o ângulo α até encontrarem o bordo do hemisfério H , obtém-se uma região R_α , cuja área mede $2 \cdot \alpha \cdot r^2$ de acordo com o teorema (2.6.1). Procedendo

Figura 2.17: Vista superior da superfície esférica contendo o triângulo esférico ABC .

Fonte: LIMA (1984, p. 6)

da mesma maneira com os lados que formam os ângulos β e γ obtém-se as regiões R_β e R_γ , cujas áreas são $2 \cdot \beta \cdot r^2$ e $2 \cdot \gamma \cdot r^2$, respectivamente.

⁵Disponível em: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jodocus-Hondius.jpg>. Acesso em 20/03/2014

Observe que a reunião das regiões R_α , R_β e R_γ formam o hemisfério H , porém com a área do triângulo dado sendo contada três vezes, ou seja, duas vezes mais do que o necessário. Assim,

$$\text{Área}(R_\alpha) + \text{Área}(R_\beta) + \text{Área}(R_\gamma) - 2A = \text{Área}(H).$$

Onde A é a área do triângulo esférico, ou seja:

$$2.\alpha.r^2 + 2.\beta.r^2 + 2.\gamma.r^2 = 2.\pi.r^2 + 2A$$

Dividindo toda a equação acima por $2.r^2$, obtemos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}. \quad (2.4)$$

□

Corolário 2.8.1. *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que π .*

Demonstração. Sendo A a área do triângulo esférico, temos que $A > 0$. Considerando esse fato e a igualdade (2.4), concluímos que:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi. \quad (2.5)$$

□

Ao contrário do que ocorre nos triângulos construídos sobre uma superfície plana, onde a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a π . Entretanto, observa-se também da igualdade (2.4) que, quanto menor for a área do triângulo em relação à superfície esférica que o contém, mais próximo de π será a soma dos seus ângulos internos, pois $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{A}{r^2} = 0$.

Corolário 2.8.2. *A soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é menor que 3π .*

Demonstração. Todo ângulo interno de um triângulo esférico é menor que π , então:

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi + \pi + \pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

□

Dos corolários (2.8.1) e (2.8.2) conclui-se que, em qualquer triângulo esférico de ângulos internos α , β e γ :

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Ou , em graus:

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ.$$

Corolário 2.8.3 (Área de um triângulo esférico). *A área de um triângulo esférico é dada por:*

$$A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$

Demonstração. Esse fato é consequência imediata da igualdade (2.4). □

Este corolário garante que, se ABC e DEF são triângulos sobre S e se os ângulos de ABC forem iguais aos ângulos de DEF , então esses dois triângulos têm áreas iguais.

Capítulo 3

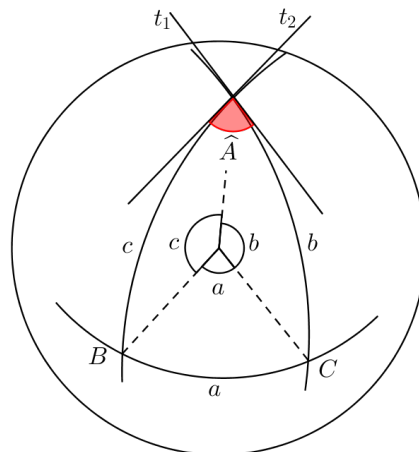
A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO ESFÉRICO

Neste capítulo são apresentadas e demonstradas a lei dos cossenos e a lei dos senos para triângulos esféricos, que são os teoremas principais desse trabalho. Esses dois teoremas, associados ao Teorema de Girard visto no capítulo 2, permitem a obtenção de muitas informações sobre um triângulo esférico.

3.1 Razões Trigonométricas nos Triângulos Esféricos

Nos triângulos esféricos pode-se falar em seno e cosseno de seus ângulos internos e também de seus lados. Mas como se obter essas e outras razões trigonométricas nesses triângulos?

Figura 3.1: Razões trigonométricas no triângulo esférico.



Fonte: Autor

Como foi visto na definição de ângulo esférico (Definição: 2.5.1), os ângulos internos de um triângulo esférico são obtidos a partir dos ângulos planos formados pelas tangentes tiradas do ponto de intersecção dos arcos que formam cada ângulo. Assim, os valores do seno, cosseno, tangente e demais razões para os ângulos internos de um triângulo esférico, são as mesmas dos ângulos planos formados pelas retas tangentes ao ponto de intersecção de seus lados.

De forma semelhante, as medidas dos lados \widehat{AB} , \widehat{AC} e \widehat{BC} de um triângulo esférico ABC são dadas em graus (Definição: 2.7.1). Assim, as razões trigonométricas para esses lados, que são arcos, serão as mesmas do arco correspondente no ciclo trigonométrico.

3.2 Lei dos Cossenos nos Triângulos Esféricos

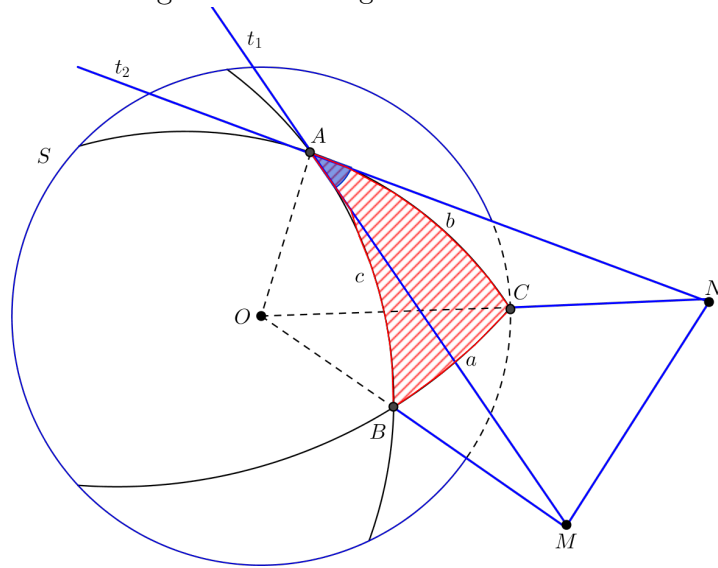
A lei dos cossenos nos triângulos esféricos é o principal resultado abordado nesse trabalho. Ele permite obter outros resultados da geometria esférica, como a lei dos senos, que será vista adiante. A partir desse teorema também será obtida uma fórmula que facilitará o cálculo da distância entre dois pontos quaisquer da superfície da Terra, desde que sejam conhecidas suas coordenadas geográficas.

Teorema 3.2.1 (Lei dos Cossenos nos Triângulos Esféricos). *Em qualquer triângulo esférico de lados a , b e c , e ângulos opostos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , respectivamente, o cosseno de um de seus lados é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados, mais o produto dos senos dos referidos lados pelo cosseno do ângulo formado por eles, ou seja,*

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A}.$$

Demonstração. Seja S a superfície esférica de centro O e raio r , que contém o triângulo ABC , de lados a , b e c , medidos respectivamente pelos ângulos planos: \widehat{BOC} , \widehat{AOC} e \widehat{AOB} . Sejam t_1 e t_2 tangentes às circunferências máximas AB e AC , no ponto A . O prolongamento dos raios OB e OC encontram as tangentes t_1 e t_2 nos pontos M e N , respectivamente. Assim, os segmentos AO e AM e, AO e AN são, respectivamente perpendiculares, (Figura: 3.2).

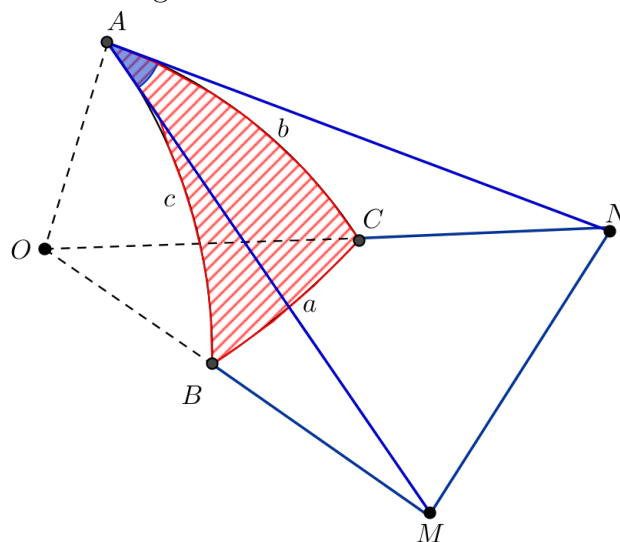
Figura 3.2: Triângulo ABC sobre S .



Fonte: ZANELLA (2013, p. 93)

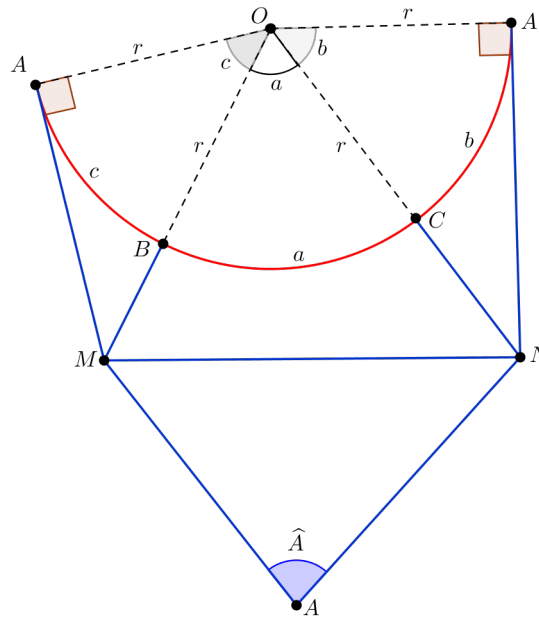
Observe que os pontos A , O , M e N formam os vértices de um poliedro de faces triangulares. (Figura: 3.3).

Figura 3.3: Poliedro $AMNO$.



Fonte: Autor

Planificando esse poliedro obtemos os seguintes triângulos planos:

Figura 3.4: Planificação do poliedro $AMNO$.

Fonte: ZANELLA (2013, p. 94)

Na figura 3.4, os triângulos OAM e OAN são retângulos em A . Daí:

$$\cos b = \frac{AO}{NO} \quad (3.1)$$

$$\sen b = \frac{AN}{NO} \quad (3.2)$$

$$\cos c = \frac{AO}{MO} \quad (3.3)$$

$$\sen c = \frac{AM}{MO} \quad (3.4)$$

Além disso:

$$NO^2 = AO^2 + AN^2 \quad (3.5)$$

$$MO^2 = AO^2 + AM^2 \quad (3.6)$$

Somando (3.5) e (3.6) membro a membro:

$$\begin{aligned} MO^2 + NO^2 &= 2.AO^2 + AM^2 + AN^2 \\ 2.AO^2 &= (MO^2 - AM^2) + (NO^2 - AN^2) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos planos MNO e MNA :

$$MN^2 = MO^2 + NO^2 - 2.MO.NO.\cos a \quad (3.8)$$

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2.AM.AN.\cos \hat{A} \quad (3.9)$$

Subtraindo-se (3.9) de (3.8), obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= (MO^2 - AM^2) + (NO^2 - AN^2) - 2.MO.NO.\cos a + 2.AM.AN.\cos \hat{A} \\ 2.MO.NO.\cos a &= (MO^2 - AM^2) + (NO^2 - AN^2) + 2.AM.AN.\cos \hat{A} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo (3.7) em (3.10), temos:

$$2.MO.NO.\cos a = 2.AO^2 + 2.AM.AN.\cos \hat{A} \quad (3.11)$$

Dividindo a equação (3.11) por (2.NO.MO), obtemos:

$$\cos a = \frac{AO}{NO} \cdot \frac{AO}{MO} + \frac{AN}{NO} \cdot \frac{AM}{MO} \cdot \cos \hat{A} \quad (3.12)$$

E substituindo as equações (3.1), (3.2), (3.3) e (3.4) na equação (3.12), obtemos:

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sen b.\sen c.\cos \hat{A}. \quad (3.13)$$

Com construções análogas a essa, porém traçando as tangentes t_1 e t_2 pelos vértices B e C , respectivamente, mostramos que:

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sen a.\sen c.\cos \hat{B} \quad (3.14)$$

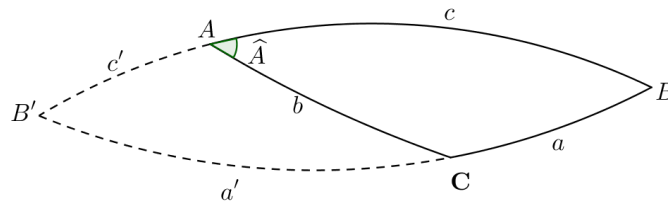
$$\cos c = \cos a.\cos b + \sen a.\sen b.\cos \hat{C}. \quad (3.15)$$

Porém, na construção anterior, tivemos que assumir que os lados que formam o ângulo \hat{A} são ambos menores que um quadrante¹, pois assumimos que as tangentes ao ponto A encontram os prolongamentos dos raios OB e OC . Devemos agora mostrar que a fórmula obtida também é válida se esses lados não forem ambos menores que um quadrante. Para isso, vamos analisar os seguintes casos: apenas um dos lados é maior que um quadrante, os dois lados são maiores que um quadrante, um dos lados é igual a um quadrante e o outro menor, um dos lados é igual a um quadrante e o outro é maior, e finalmente o caso em que os dois lados são quadrantes.

Caso I. Suponhamos que apenas um dos lados que formam o ângulo \hat{A} seja maior que um quadrante, por exemplo AB . Traçemos o prolongamento dos lados AB e BC até o ponto B' , antípoda de B . Assim teremos $AB' = c'$, $AC = b$ e $CB' = a'$, (Figura: 3.5).

¹Quadrantes são os arcos de circunferências máximas que medem exatamente 90° , ou $\frac{\pi}{2}$ radianos, conforme a definição (2.4.2).

Figura 3.5: Caso em que apenas um dos lados de \widehat{A} é maior que um quadrante.



Fonte: Autor

A partir do que já foi provado, no triângulo $AB'C$, temos que:

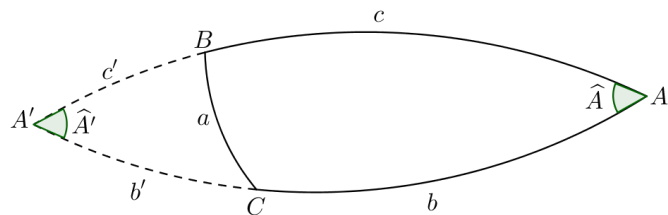
$$\cos a' = \cos b \cdot \cos c' + \sin b \cdot \sin c' \cdot \cos(B'\widehat{A}C)$$

Mas, $a' = \pi - a$, $c' = \pi - c$ e $(B'\widehat{A}C) = \pi - A$. Assim:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A}.$$

Caso II. Suponhamos que ambos os lados que formam o ângulo \widehat{A} sejam, cada um deles, superior a um quadrante. Fazemos então o prolongamento dos lados AB e AC até o ponto A' , antípoda de A . Assim, teremos o triângulo $A'BC$, com $A'B = c'$ e $A'C = b'$. (Figura: 3.6).

Figura 3.6: Caso em que os dois lados de \widehat{A} são maiores que um quadrante.



Fonte: Autor

E como antes:

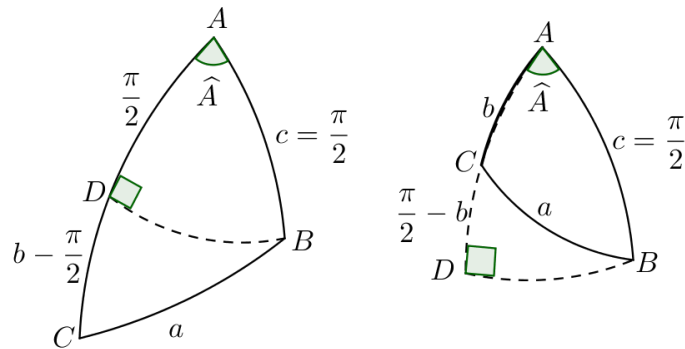
$$\cos a = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos \widehat{A}'$$

Mas $b' = \pi - b$, $c' = \pi - c$ e $\widehat{A}' = \widehat{A}$. Assim

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \widehat{A}.$$

Caso III. Suponhamos que um dos lados do ângulo \widehat{A} é um quadrante, por exemplo AB , e o outro maior, (Figura: 3.7 a esquerda) ou menor (Figura: 3.7 a direita). Tomemos D de maneira que AD seja um quadrante.

Figura 3.7: Casos em que um dos lados é um quadrante.



Fonte: Autor

Se BD for um quadrante, então B é um polo da circunferência máxima que passa por AC (proposição: 2.4.1), e neste caso: $a = c = A = \frac{\pi}{2}$, e a fórmula se verifica. Por outro lado, se BD não for um quadrante, o triângulo BCD nos dá:

$$\cos a = \cos(\widehat{CD}) \cdot \cos(\widehat{BD}) + \sin(\widehat{CD}) \sin \widehat{BD} \cdot \cos(\widehat{CDB})$$

e $\cos(\widehat{CDB}) = 0$, $\cos(\widehat{CD}) = \cos(\frac{\pi}{2} - b) = \cos(b - \frac{\pi}{2}) = \sin b$ e $\cos(\widehat{BD}) = \cos \widehat{A}$.

O que resulta:

$$\cos a = \sin b \cdot \cos \widehat{A}.$$

e é a essa identidade que se reduz à fórmula (3.13), quando $c = \frac{\pi}{2}$.

Caso IV. Suponhamos que ambos os lados que formam o ângulo \widehat{A} sejam quadrantes. A fórmula (3.13) torna-se: $\cos a = \cos \widehat{A}$. E isso é obviamente verdadeiro, pois assim, A é polo da circunferência máxima que passa por BC , o que garante que $A = a$. \square

3.3 Lei dos Senos nos Triângulos Esféricos

A partir da lei dos cossenos para triângulos esféricos, obtém-se o equivalente esférico para a lei dos senos (Teorema: 1.3.2), resultado conhecido da geometria euclidiana.

Teorema 3.3.1 (Lei dos Senos nos Triângulos Esféricos). *Em qualquer triângulo esférico ABC , de lados a , b e c , a razão entre o senos de qualquer um dos lados e o seno do seu ângulo oposto tem o mesmo valor numérico, isto é:*

$$\frac{\text{sena}}{\text{sen} \widehat{A}} = \frac{\text{sen} b}{\text{sen} \widehat{B}} = \frac{\text{senc}}{\text{sen} \widehat{C}}$$

Demonstração. Esse resultado é consequência da Lei dos cossenos nos triângulos esféricos, demonstrada anteriormente. Da fórmula (3.13), temos que:

$$\begin{aligned}
 \cos \widehat{A} &= \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \\
 \operatorname{sen}^2 \widehat{A} &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \right)^2 \\
 \operatorname{sen}^2 \widehat{A} &= 1 - \frac{(\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c} \\
 \operatorname{sen}^2 \widehat{A} &= \frac{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c - (\cos a - \cos b \cdot \cos c)^2}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c} \\
 \operatorname{sen}^2 \widehat{A} &= \frac{(1 - \cos^2 b) \cdot (1 - \cos^2 c) - (\cos^2 a - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c)}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c} \\
 \operatorname{sen}^2 \widehat{A} &= \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b + \cos^2 b \cdot \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c} \\
 \operatorname{sen} \widehat{A} &= \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c}
 \end{aligned}$$

O radical à direita deve ser tomado com sinal positivo, pois $\operatorname{sen} b$, $\operatorname{sen} c$ e $\operatorname{sen} \widehat{A}$, são todos positivos, já que pela definição de triângulo esférico $0 < b, c, \widehat{A} < \pi$. Assim:

$$\operatorname{sen} \widehat{A} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \quad (3.16)$$

e analogamente:

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c} \quad (3.17)$$

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b} \quad (3.18)$$

Dividindo $\operatorname{sen} \widehat{A}$ por $\operatorname{sen} \widehat{B}$, conforme as igualdades (3.16) e (3.17), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{sen} \widehat{A}}{\operatorname{sen} \widehat{B}} &= \frac{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \\
 \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} &= \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \widehat{B}}
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Analogamente, fazendo $\frac{\operatorname{sen} \widehat{A}}{\operatorname{sen} \widehat{C}}$ (conforme (3.16) e (3.18)), obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} \quad (3.20)$$

E de (3.19) e (3.20), temos:

$$\frac{\text{sen } a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{\text{sen } b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{\text{sen } c}{\widehat{\text{sen}C}}.$$

□

Através do Limite Trigonométrico Fundamental, $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\text{sen } a}{a} = 1$ (STEWART, 2007, vol.1, p.212), observa-se que, se o valor de a tornar-se muito próximo de zero, o valor de $\text{sen } a$ torna-se cada vez mais próximo de a . Deste modo temos que:

$$\text{sen } a \cong a, \quad \text{sen } b \cong b, \quad \text{sen } c \cong c.$$

Então a igualdade:

$$\frac{\text{sen } a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{\text{sen } b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{\text{sen } c}{\widehat{\text{sen}C}}$$

torna-se próxima de:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen}A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen}B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen}C}}$$

que é a lei dos senos para triângulos planos.

Através da Série de Maclaurin (STEWART, 2007, vol.2, p.764) temos que a representação de $\cos x$ para valores de x próximos de zero é:

$$\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2}. \quad (3.21)$$

De forma semelhante a que ocorre com a lei dos senos para triângulos esféricos, se em um triângulo seus lados a , b e c têm comprimentos próximos de zero, pelo teorema (3.2.1), pela igualdade (3.21), e pelo limite trigonométrico fundamental, temos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a^2}{2} &= \left(1 - \frac{b^2}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + b \cdot c \cdot \widehat{\cos A} \\ 1 - \frac{a^2}{2} &= 1 + \frac{b^2 \cdot c^2}{4} - \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2} + b \cdot c \cdot \widehat{\cos A} \\ a^2 &= -\frac{b^2 \cdot c^2}{2} + c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \widehat{\cos A}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Como se está tomando valores de a , b e c muito próximos de zero, temos que em (3.22), a parcela $-\frac{b^2 \cdot c^2}{2}$ tem um valor desprezível, o que torna a igualdade muito próxima de:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \widehat{\cos A}.$$

Que é a lei dos cossenos para triângulos planos.

3.4 Exemplos

Pela Lei dos Senos (Teorema: 1.3.2), foi visto que, num triângulo, plano a razão entre a medida de um lado e a medida do seno do ângulo oposto a ele é sempre constante e igual à $2R$, onde R é o raio da circunferência circunscrita ao triângulo. Pode-se construir diferentes triângulos inscritos em uma mesma circunferência de raio R que, como vimos, a razão permanecerá sempre a mesma, isto é: $2R$.

Dessa forma, surge naturalmente a pergunta: nos triângulos esféricos a razão entre o seno de um lado do triângulo e o seno do ângulo oposto a ele permanece constante se mudadas as medidas do triângulo sobre a mesma superfície esférica de raio R ? Para verificar isso, tomemos como exemplo o triângulo ABC construído sobre a superfície esférica de raio 1 e cujos ângulos internos são: $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 60^\circ$ e $\widehat{C} = 45^\circ$ e com o lado $a = 70^\circ$. Pelo teorema 3.3.1, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sen } 70^\circ}{\text{sen } 90^\circ} &= \frac{\text{sen } b}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } 45^\circ} \\ \frac{0,94}{1} &= \frac{\text{sen } b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\text{sen } c}{\frac{\sqrt{2}}{2}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Utilizando (3.23), obtem-se:

$$\begin{aligned} \text{sen } b &= 0,813 \\ b &= \text{arcsen } 0.813 \\ b &= 54,5^\circ. \end{aligned}$$

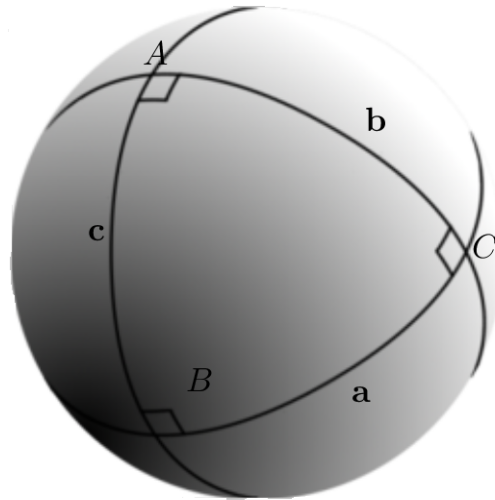
Analogamente, $\text{sen } c = 0.665$ e $c = 41,5^\circ$.

Mas o principal interesse aqui é na razão:

$$\frac{\text{sen } 70^\circ}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{\text{sen } 54,5^\circ}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{\text{sen } 41,5^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = 0,94$$

Sobre essa mesma superfície esférica, tomemos agora o triângulo que tem o vértice A sobre um dos polos e os outros dois sobre o equador. Como AB e AC são arcos de circunferências máximas perpendiculares ao equador, os ângulos \widehat{B} e \widehat{C} desse triângulo são retos. Se tomamos $\widehat{A} = 90^\circ$ temos um triângulo trirretângulo (3 ângulos retos) que ocupa exatamente $\frac{1}{8}$ dessa superfície esférica. Dessa maneira, os lados a , b e c também medem 90° cada um (Figura 3.8).

Figura 3.8: Triângulo trirretângulo.



Fonte: Wikimedia Commons²

E pela lei dos senos para triângulos esféricos temos:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} \widehat{C}} = 1$$

E como $1 \neq 0,94$, concluímos que a razão não permanece constante quando mudamos o triângulo sobre uma superfície esférica, ao contrário do que ocorre na lei dos senos para triângulos planos.

²Disponível em: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Triangle-trirectangle.png>. Acesso em 29/03/2014.

Capítulo 4

APLICAÇÕES

Ainda na antiguidade, Aristóteles chegou à conclusão de que a Terra era necessariamente esférica, embora seus argumentos para isso exigissem também que a mesma ocupasse o centro do Universo. Bem mais tarde, o português Fernão de Magalhães (1480 - 1521), navegando a serviço da Espanha, empreendeu a primeira viagem de circunavegação do mundo, ao partir de Sevilha, em 1519, contornando o Estreito de Magalhães (Patagônia) até chegar às Filipinas (na Ásia) pelo Oceano Pacífico, comprovando o formato arredondado da Terra. E finalmente, em 12 de abril de 1961 o cosmonauta soviético Yuri Gagarin, tornou-se o primeiro ser humano a ver a esfericidade da Terra a partir do espaço, realizando um grande sonho da humanidade.

Neste capítulo apresentam-se alguns conceitos iniciais de coordenadas geográficas e aplicações da lei dos cossenos esféricos, lei dos senos esféricos e do Teorema de Girard para o cálculo de distâncias e de áreas sobre a superfície da Terra.

4.1 O Raio da Terra

Foi Eratóstenes, nascido em 276 a.C. em Cirene, uma colônia grega do Norte da África, o primeiro a realizar a façanha de calcular a circunferência e o raio da Terra.

Em 212 a.C., Eratóstenes de Cirene [...] tornou-se a primeira pessoa a medir a circunferência da Terra. Seu cálculo causou uma sensação entre seus concidadãos, demonstrando como era pequeno o pedaço do planeta conhecido por sua civilização (MLODINOW, 2008, p.50).

Eratóstenes realizou seu célebre feito quando vivia em Alexandria, como diretor da famosa biblioteca daquela cidade. Seus cálculos para o raio e circunferência da Terra continham um erro de apenas 4%, um valor surpreendentemente exato, considerando os

recursos de sua época.

Hoje, sabe-se que a Terra não é uma esfera perfeita, portanto não há um único valor que sirva como seu raio natural. Ao invés disso, sendo quase esférica, vários valores, desde o raio polar (de 6357 km) ao raio equatorial (6378 km) são utilizados, de acordo com a necessidade. Como a diferença entre o maior e o menor dos raios é pequena (21 km) em relação ao imenso tamanho da terra, e para facilitar os cálculos, assumiremos esta como uma esfera perfeita e tomaremos seu raio médio de 6370 km, como o raio dessa esfera perfeita.

4.2 Coordenadas Geográficas

Uma circunferência máxima na superfície da Terra é a Linha do Equador, que conforme as definições (2.3.1) e (4.2), é a circunferência que divide a Terra em dois hemisférios e é perpendicular ao eixo que passa pelos polos. Ainda segundo a definição (4.2), os paralelos são circunferências paralelas ao Equador, sendo que a própria linha imaginária do Equador é um paralelo. O paralelo 0° corresponde ao Equador, o 90° ao Pólo Norte e o -90° ao Pólo Sul (Figura: 4.1).

Figura 4.1: Paralelos

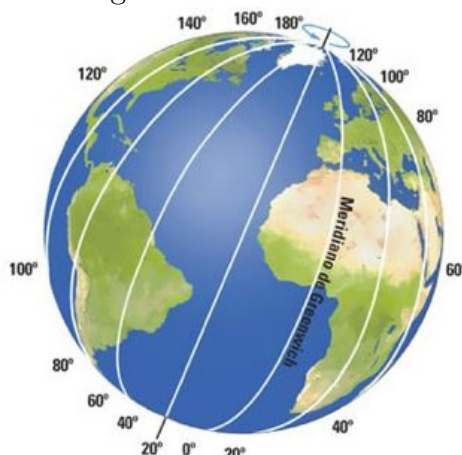


Fonte: Not1 ®¹

Já os meridianos são semicircunferências máximas perpendiculares ao Equador que vão do Pólo Norte ao Pólo Sul e cruzam com os paralelos (Figura:4.2).

¹Disponível em: <http://not1.xpg.uol.com.br/rotacao-e-translacao-da-terra-e-hemisferios-explicacoes-completas/foto-2/primary>. Acesso em 29/03/2014.

Figura 4.2: Meridianos.



Fonte: Grupoescolar²

Todos os meridianos possuem o mesmo tamanho e o ponto de partida para a numeração dos meridianos é o meridiano que passa pelo observatório de Greenwich, um distrito de Londres, na Inglaterra. Logo, o meridiano de Greenwich é o meridiano principal 0° . A leste de Greenwich os meridianos são medidos por valores crescentes até 180° e, a oeste, suas medidas são decrescentes até o limite de -180° .

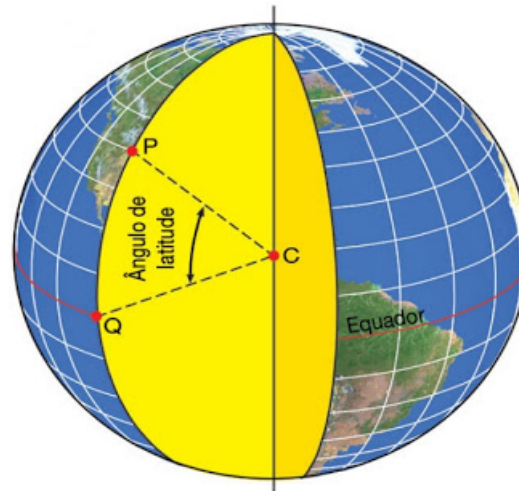
Com os meridianos, paralelos e a Linha do Equador, foi possível desenvolver um sistema capaz de localizar qualquer ponto da superfície da Terra. Esse sistema é chamado de Coordenadas Geográficas e a localização de pontos na face da terra é feito por meio das intersecções dos meridianos com os paralelos.

As coordenadas são a latitude (Figura: 4.3) e a longitude (Figura: 4.4), e o princípio utilizado é a graduação, dada em graus, minutos e segundos. Os paralelos e meridianos são indicados por graus de circunferências. Um grau (1°) equivale a uma das 360 partes iguais em que a circunferência pode ser dividida. Um grau por sua vez divide-se em 60 minutos ($60'$) e cada minuto pode ser dividido em 60 segundos ($60''$). Assim um grau é igual a 59 minutos e 60 segundos.

Definição 4.2.1 (Latitude). *É o ângulo formado entre o Equador e um ponto estimado. Todos os pontos do Equador possuem latitude geográfica igual a 0° . Pontos situados ao norte do equador têm latitudes maiores que 0° variando até 90° que é a latitude do pólo geográfico norte. Da mesma forma, variam as latitudes ao sul do equador terrestre, desde 0° a 90° , latitude do pólo geográfico sul. Para se diferenciar os valores, atribui-se sinal positivo para as latitudes norte e negativo para as latitudes sul.*

²Disponível em: <http://www.grupoescolar.com/pesquisa/paralelos-e-meridianos.html>. Acesso em 27/02/2014.

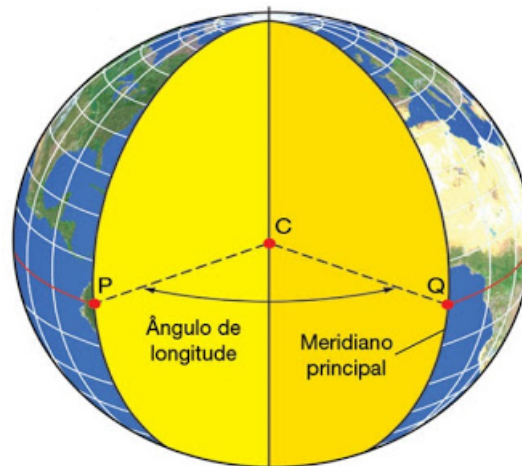
Figura 4.3: Latitude.



Fonte: Geografalando³

Definição 4.2.2 (Longitude). *É o ângulo formado entre o meridiano que passa por determinado lugar e o meridiano de Greenwich. A longitude é medida de 0° a 180° , para leste ou para oeste de Greenwich. Por convenção, atribui-se também sinais para as longitudes: negativo para oeste e positivo para leste.*

Figura 4.4: Longitude.



Fonte: Geografalando⁴

³Disponível em: <http://geografalando.blogspot.com.br/2011/04/localizacao-linhas-imaginarias.html>. Acesso em 20/02/2014.

⁴Disponível em: <http://geografalando.blogspot.com.br/2011/04/localizacao-linhas-imaginarias.html>. Acesso em 20/02/2014.

4.3 Distância entre duas cidades

Se temos a latitude e a longitude de um determinado local, dizemos que temos as coordenadas geográficas do mesmo. Conhecendo as coordenadas geográficas de duas cidades e os resultados dos teoremas estudados no capítulo 3, podemos calcular a distância entre elas, como veremos a seguir.

Exemplo 4.3.1. A distância entre Macapá e Londres

A cidade de Macapá, capital do estado do Amapá, situado na região Norte do Brasil, é cortada pela linha do Equador. As coordenadas geográficas de Macapá são: longitude: $-51^{\circ}03'59''$ e latitude: $-0^{\circ}02'20''$.

E a cidade de Londres na Inglaterra, é cortada em um de seus bairros, pelo meridiano de Greenwich, e tem as seguintes coordenadas geográficas: longitude: $-0^{\circ}7'32''$ e latitude: $51^{\circ}30'30''$.

Um avião saindo de Macapá para Londres, percorrerá quantos quilômetros se seguir a rota mais curta possível?

Este problema pode ser resolvido aplicando a lei dos cossenos para triângulos esféricos e considerando o fato de que a menor distância entre dois pontos sobre uma superfície esférica é o menor dos arcos da circunferência máxima que os contém.

Observe que Macapá fica 51° à oeste de Greenwich e Londres fica 51.5° ao norte do Equador, e a latitude de Macapá e a longitude de Londres são tão próximas de 0° que vamos considerá-las nulas. Além disso, a intersecção do Meridiano de Greenwich com o Equador forma um ângulo de 90° .

Figura 4.5: Localizações de Macapá e Londres.



Fonte: Arteblog⁵

⁵Disponível em: <http://pre-vestibular.arteblog.com.br/47304/HORARIO-DE-VERAO-desde-o-inicio/>. Acesso em 29/03/2014.

Solução: Considerando a intersecção do Meridiano de Greenwich com o Equador como o ponto A e as cidades de Macapá e Londres como os pontos B e C , respectivamente, temos o triângulo esférico ABC , do qual conhecemos os lados $b = 51,5^\circ$ e $c = 51^\circ$, e o ângulo entre eles, $\hat{A} = 90^\circ$. A distância mínima será a medida do lado a do triângulo ABC .

Figura 4.6: Distância de Macapá a Londres.



Fonte: Arteblog⁶

Pela Lei dos cossenos para triângulos esféricos temos que:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos \hat{A}$$

Assim:

$$\cos a = \cos 51,5^\circ \cdot \cos 51^\circ + \operatorname{sen} 51,5^\circ \cdot \operatorname{sen} 51^\circ \cdot \cos 90^\circ$$

$$\cos a = 0,620,63 + 0,780,77 \cdot 0$$

$$\cos a = 0,4$$

$$a = \operatorname{arcos} 0,4$$

$$a = 66,5^\circ.$$

Portanto o menor dos arcos da circunferência máxima que passa por Londres e Macapá mede $66,5^\circ$. Nos resta saber agora a quanto essa medida corresponde em quilômetros. Ora, o comprimento da circunferência de raio r é $C = 2\pi r$, que corresponde aos 360 graus da circunferência. Assim, sendo D a distância procurada e 6370 o raio médio da Terra, temos que:

⁶Disponível em: <http://pre-vestibular.arteblog.com.br/47304/HORARIO-DE-VERAO-desde-o-inicio/>. Acesso em 29/03/2014.

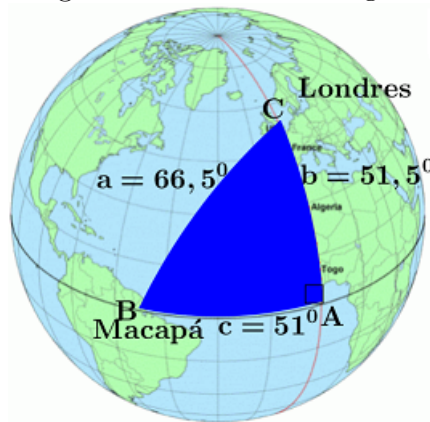
$$\begin{aligned}\frac{D}{2\pi r} &= \frac{66,5}{360} \\ D &= \frac{2\pi(6370).66,5}{360} \\ D &= 7393 \text{ km.}\end{aligned}$$

Concluimos então que a distância entre as cidades de Macapá e Londres é de aproximadamente 7393 km.

Exemplo 4.3.2. Qual a área do triângulo sobre a superfície da Terra que tem os vértices B em Macapá, C em Londres e A na intersecção do Meridiano de Greenwich com a linha do Equador?

Solução: O que se quer obter aqui é a área do triângulo dado na figura (4.6), do exemplo anterior. Observe que já se tem as medidas dos lados: $a = 66,5^\circ$, $b = 51,5^\circ$ e $c = 51^\circ$. Tem-se também a medida do ângulo $\hat{A} = 90^\circ$.

Figura 4.7: Área do triângulo.



Fonte: Arteblog⁷

Agora precisamos usar a lei dos senos nos triângulos esféricos (Teorema: 3.3.1) para obter os valores de \hat{B} e \hat{C} , em graus.

⁷Disponível em: <http://pre-vestibular.arteblog.com.br/47304/HORARIO-DE-VERAO-desde-o-inicio/>. Acesso em 29/03/2014.

Assim, pelo teorema (3.3.1), temos:

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\text{sen}} 66,5^\circ}{\widehat{\text{sen}} 90^\circ} &= \frac{\widehat{\text{sen}} 51,5^\circ}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \\ \frac{0,92}{1} &= \frac{0,78}{\widehat{\text{sen}} \widehat{B}} \\ \widehat{\text{sen}} \widehat{B} &= 0,85 \\ \widehat{B} &= \text{arcseno } 0,85 \\ \widehat{B} &= 58^\circ.\end{aligned}$$

E de forma análoga, $\widehat{C} = 56^\circ$.

Pelo corolário (2.8.3) do Teorema de Girard, temos ainda que, se os ângulos internos α , β e γ de um triângulo esférico são dados em radianos, então a área A do triângulo é dada por:

$$A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2. \quad (4.1)$$

Onde r é o raio da superfície esférica que contém o triângulo.

Transformando os valores $\widehat{A} = 90^\circ$, $\widehat{B} = 58^\circ$ e $\widehat{C} = 56^\circ$, para radianos, obtemos respectivamente: $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\beta = \frac{29\pi}{90}$ e $\gamma = \frac{14\pi}{45}$. E temos ainda que o raio da Terra é de 6370 km.

Substituindo todos esses valores na equação (4.1), obtemos:

$$\begin{aligned}A &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{29\pi}{90} + \frac{14\pi}{45} - \pi\right) \cdot (6370)^2 \\ A &= \left(\frac{12\pi}{90}\right) \cdot (6370)^2 \\ A &= 16\,996\,310 \text{ km}^2.\end{aligned}$$

Portanto, a área do triângulo ABC da figura (4.6) é de 16 996 310 km^2 , quase o dobro da área do Brasil, que é de 8 515 767 km^2 .

Exemplo 4.3.3. Distância entre cidades situadas fora da Linha do Equador e do Meridiano de Greenwich.

No exemplo (4.3.1) o cálculo da distância entre as duas cidades foi facilitado pelo fato de uma está localizada sobre a Linha do Equador e a outra sobre o Meridiano de Greenwich. Veremos agora como calcular a distância entre cidades com quaisquer coordenadas geográficas.

Por exemplo, a cidade de Caracas, capital da Venezuela, e a cidade de Casablanca, capital do Marrocos, no norte da África, possuem as seguintes coordenadas geográficas:

Cidade	Latitude	Longitude
Caracas	$10^{\circ}29'16'' \cong 10,5^{\circ}$	$-66^{\circ}52'45'' \cong -66,9^{\circ}$
Casablanca	$33^{\circ}35'17'' \cong 33,6^{\circ}$	$-7^{\circ}36'40'' \cong -7,6^{\circ}$

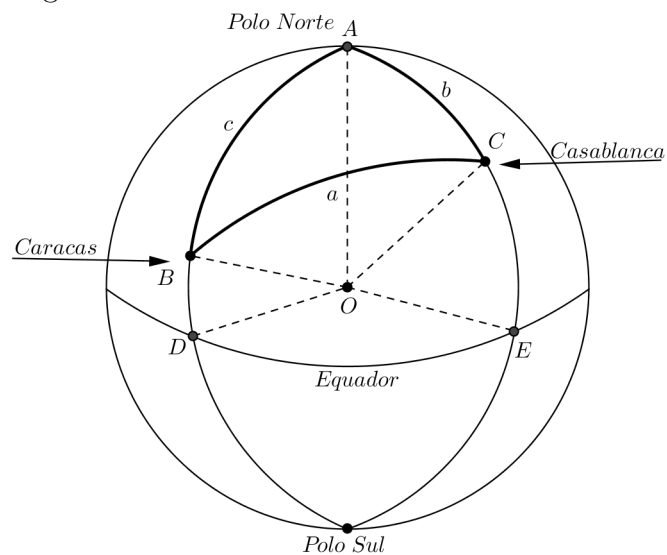
Qual a distância entre essas duas cidades?

Figura 4.8: Arco que liga as cidades de Caracas e Casablanca.



Fonte: Fórum Internacional de Mulheres do Futuro Pela Paz do Planeta⁸

Figura 4.9: Distância entre Caracas e Casablanca.



Fonte: Autor

⁸Disponível em: http://forumdemulheresdofuturo.zip.net/arch2010-04-01_2010-04-30.html. Acesso em 29/03/2014.

Solução: Consideremos o globo terrestre como a superfície esférica S da figura (4.9). Sejam os pontos B a cidade de Caracas, C a cidade de Casablanca e A o polo norte da Terra. Com isso temos o triângulo ABC , e conhecendo as latitudes e longitudes dos pontos B e C , podemos determinar os valores do ângulo \widehat{A} e dos lados b e c .

Como o arco \widehat{AD} tem 90° e o arco \widehat{BD} tem $10,5^\circ$, que é a latitude de Caracas, temos que $c = 90^\circ - 10,5^\circ = 79,5^\circ$. De forma análoga temos que $b = 56,4^\circ$. Como A fica no Polo Norte, o plano que tangencia a Terra em A é paralelo ao plano do Equador, com isso o ângulo \widehat{A} está associado ao arco \widehat{DE} . Para determinar esse arco basta calcular a diferença entre as longitudes das duas cidades. Isto é: $\widehat{A} = -7,6^\circ - (-66,9^\circ) = 66,9^\circ - 7,6^\circ = 59,3^\circ$. De posse desses valores, usamos a lei dos cossenos nos triângulos esféricos (3.2.1), para calcular o lado a .

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos 56,4^\circ \cdot \cos 79,5^\circ + \sin 56,4^\circ \cdot \sin 79,5^\circ \cdot \cos 59,3^\circ \\ \cos a &= 0,55 \cdot 0,18 + 0,83 \cdot 0,98 \cdot 0,51 \\ \cos a &= 0,51 \\ a &= \arccos 0,51 \\ a &= 59,3^\circ. \end{aligned}$$

Precisamos agora transformar essa medida a dada em graus, para a distância D , em quilômetros. Analogamente ao que fizemos no exemplo (4.3.1), sendo D a distância entre Caracas e Casablanca, e 6370 km o raio da Terra, temos:

$$\begin{aligned} \frac{D}{2\pi r} &= \frac{59,3}{360} \\ D &= \frac{2\pi(6370) \cdot 59,3}{360} = 6592,6 \text{ km} \end{aligned}$$

Assim, a distância entre Caracas e Casablanca é de aproximadamente $6592,6 \text{ km}$.

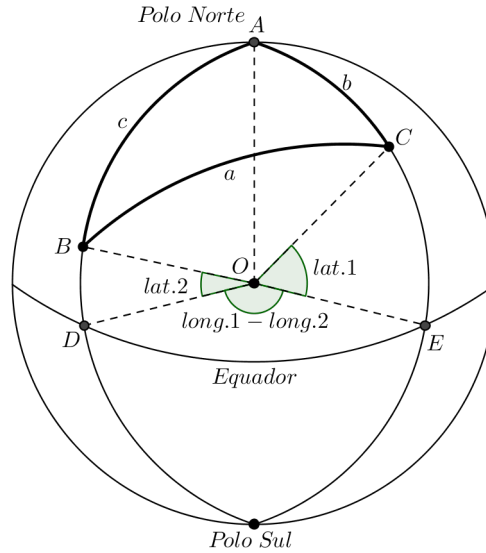
Observação 4.3.1. Para obter o ângulo \widehat{A} , poderíamos ter calculado a diferença entre as longitudes das duas cidades no sentido contrário do que fizemos, isto é, a longitude de Caracas menos a longitude de Casablanca: $\widehat{A} = -66,9^\circ - (-7,6^\circ) = -66,9^\circ + 7,6^\circ = -59,3^\circ$, pois $\cos 59,3^\circ = \cos(-59,3^\circ) = 0,51$, já que o cosseno é uma função par.

4.3.1 Fórmula para o Cálculo da Distância entre Cidades

A partir da lei dos cossenos para triângulos esféricos, pode-se deduzir uma fórmula que permite calcular a distância entre dois pontos B e C quaisquer da superfície da Terra, conhecendo apenas suas coordenadas geográficas, sem a necessidade de executar as subtrações do exemplo (4.3.3).

Consideremos que o vértice A do triângulo ABC coincida sempre com o Polo Norte da Terra.

Figura 4.10: Distância entre dois pontos quaisquer.



Fonte: ZANELLA (2013, p. 97)

Na figura (4.10), tem-se que a latitude do ponto B é dada por $lat.2$ e a latitude do ponto C é dada por $lat.1$. E a medida do ângulo \widehat{A} é dada pela diferença entre as longitudes dos pontos C e B , nessa ordem, ou seja, a longitude de C é $long.1$ e a longitude de B é $long.2$. Substituindo esses valores na fórmula da lei dos cossenos para triângulos esféricos, temos:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos \widehat{A}$$

$$\cos a = \cos(90^\circ - lat.1) \cdot \cos(90^\circ - lat.2) + \operatorname{sen}(90^\circ - lat.1) \cdot \operatorname{sen}(90^\circ - lat.2) \cdot \cos \widehat{A} \quad (4.2)$$

Mas pelas identidades do seno e do cosseno da diferença, temos:

$$\cos b = \cos(90^\circ - lat.1) = \operatorname{sen}(lat.1) \quad (4.3)$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(90^\circ - lat.1) = \cos(lat.1) \quad (4.4)$$

$$\cos c = \cos(90^\circ - lat.2) = \operatorname{sen}(lat.2) \quad (4.5)$$

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen}(90^\circ - lat.2) = \cos(lat.2). \quad (4.6)$$

E temos ainda que:

$$\widehat{A} = (long.1 - long.2) \quad (4.7)$$

Substituindo (4.3),(4.4),(4.5),(4.6)e(4.7)na equação (4.2), temos:

$$\cos a = \operatorname{sen}(lat.1).\operatorname{sen}(lat.2) + \cos(lat.1).\cos(lat.2).\cos(long.1 - long.2) \quad (4.8)$$

A fórmula (4.8) permite calcular a distância entre dois pontos quaisquer da superfície da Terra, dadas suas coordenadas geográficas.

Exemplo 4.3.4. Qual a distância entre a cidade de Boa Vista, capital de Roraima e a Cidade do Cabo, na África do Sul?

Figura 4.11: Distância entre Boa Vista e Cidade do Cabo.



Fonte: Vale do Jequitinhonha⁹

Solução: As coordenadas geográficas dessas duas cidades são as seguintes:

Cidade	Latitude	Longitude
Boa Vista	$2^{\circ}49'12'' \cong 2,8^{\circ} (lat.2)$	$-60^{\circ}40'23'' \cong -60,7^{\circ} (long.2)$
Cidade do Cabo	$-33^{\circ}55'33'' \cong -34^{\circ} (lat.1)$	$18^{\circ}23'23'' \cong 18,4^{\circ} (long.1)$

Vamos utilizar a fórmula (4.8) para calcular a distância entre essas duas cidades.

$$\cos a = \operatorname{sen}(lat.1).\operatorname{sen}(lat.2) + \cos(lat.1).\cos(lat.2).\cos(long.1 - long.2)$$

⁹Disponível em: <http://blogdobanu.blogspot.com.br/2010/03/terra-planeta-agua.html>. Acesso em 29/03/2014.

Substituindo os valores da tabela na equação acima, temos:

$$\begin{aligned}
 \cos a &= \operatorname{sen}(-34^\circ) \cdot \operatorname{sen}(2,8^\circ) + \cos(-34^\circ) \cdot \cos(2,8^\circ) \cdot \cos(18,4^\circ - (-60,7^\circ)) \\
 \cos a &= (-0,56) \cdot 0,04 + 0,83 \cdot 0,99 \cdot 0,18 \\
 \cos a &= 0,125 \\
 a &= \arccos 0,125 \\
 a &= 82,8^\circ
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Fazendo a conversão de a para a distância D em quilômetros, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{2\pi r} &= \frac{82,8}{360} \\
 D &= \frac{2\pi(6370) \cdot 82,8}{360} \\
 D &= 9205,2 \text{ km.}
 \end{aligned}$$

E essa é a distância aproximada entre Boa Vista e a Cidade do Cabo.

O endereço eletrônico <http://codigopostal.ciberforma.pt/ferramentas/coordenadas.asp> fornece as coordenadas geográficas de qualquer ponto da superfície da Terra, inclusive cidades. Para obter as coordenadas de um ponto, basta clicar sobre ele, em um mapa apresentado no próprio endereço. E no sítio www.entrecidadesdistancia.com.br é possível calcular a distância entre várias cidades da Terra, bastando para isso escrever o nome das duas cidades entre as quais se quer saber a distância.

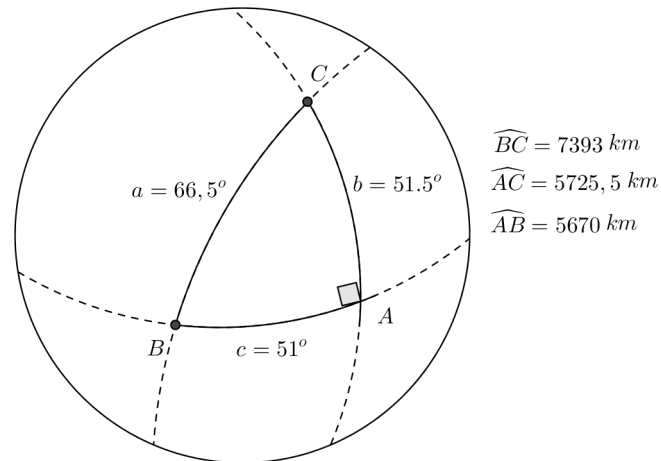
4.4 O Teorema de Pitágoras e os Triângulos Esféricos

Como se viu até agora, existem versões de algumas relações dos triângulos planos para triângulos esféricos. Neste contexto, surge naturalmente a pergunta: O Teorema de Pitágoras continua válido nos triângulos esféricos?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o exemplo estudado na seção 4.3, onde calculamos a distância entre Macapá e Londres usando um triângulo esférico retângulo. Observe o triângulo esférico encontrado na figura 4.6.

De maneira análoga a que fizemos na seção 4.3 para encontrar o comprimento do lado \widehat{BC} em quilômetros, podemos encontrar os seguintes comprimentos: $\widehat{AC} = 5725,5 \text{ km}$ e $\widehat{AB} = 5670 \text{ km}$.

Figura 4.12: O triângulo esférico da seção 4.3.



Fonte: Autor

Observe que os lados \widehat{AB} e \widehat{AC} são os catetos, e o lado \widehat{BC} é a hipotenusa do triângulo esférico ABC . E os quadrados desses lados são:

$$(\widehat{AB})^2 = (5670)^2 = 32\,148\,900 \quad (4.10)$$

$$(\widehat{AC})^2 = (5725,5)^2 = 32\,781\,350,25 \quad (4.11)$$

$$(\widehat{BC})^2 = (7393)^2 = 54\,656\,449 \quad (4.12)$$

Somando os equações (4.10) e (4.11), temos:

$$(\widehat{AB})^2 + (\widehat{AC})^2 = 64\,930\,250,25 \quad (4.13)$$

Das equações (4.12) e (4.13), temos que:

$$(\widehat{AB})^2 + (\widehat{AC})^2 \neq (\widehat{BC})^2$$

Com isso concluímos que o Teorema de Pitágoras não se verifica nos triângulos esféricos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os principais conceitos e alguns resultados da geometria esférica, foram apresentados nesse trabalho utilizando quase que unicamente os recursos da matemática elementar. Essa abordagem permitirá a utilização desse trabalho pelos professores de matemática do ensino médio, podendo ser utilizado também como auxílio no desenvolvimento de projetos com abordagens interdisciplinares nas escolas, como por exemplo, em geografia.

Ressalta-se que, apesar de ser a geometria esférica uma geometria não euclidiana, grande parte de seus resultados foram obtidos com uma larga utilização dos resultados da geometria de Euclides. E muitos conceitos dessas duas geometrias estão estreitamente ligados, como a noção de ponto, por exemplo, que permanece a mesma, e o ângulo entre arcos de circunferências máximas, que é obtido a partir do ângulo entre as retas euclidianas que tangenciam a superfície esférica no ponto de intersecção entre os dois arcos.

Chama-se a atenção aqui para o fato de que, apesar das geometrias não euclidianas terem surgido com a negação de algumas verdades da geometria euclidiana, esta última continua sendo utilizada como parte dos fundamentos para as primeiras, de tal forma que sua grande importância e contribuição para a humanidade permanece inabalável.

Como foram mostradas aqui algumas aplicações da geometria esférica, acreditam-se que o ensino da matemática no ensino básico deve contemplar essa parte tão rica e útil do conhecimento. Além das aplicações diretas dessa geometria, vale ressaltar a não validade do Quinto Postulado de Euclides e do Teorema de Pitágoras, este último tão conhecido no ensino médio, e que permite a resolução de uma enorme variedade de problemas de geometria plana e espacial.

A abordagem aqui está limitada ao estudo de triângulos sobre a superfície esférica, mas sem tratar da geometria analítica ou da obtenção de coordenadas de qualquer natureza sobre a superfície. No capítulo 4, mostrou-se algumas aplicações, mas que necessitam do conhecimento prévio de algumas informações, como as coordenadas geográficas. Também não trabalhou-se com a obtenção de coordenadas geográficas antípodas sobre a superfície da terra. Assim, os próximos trabalhos sobre o assunto podem abordar a obtenção dessas coordenadas. Pode ser verificada ainda, a possibilidade ou não da construção de outras figuras geométricas sobre a superfície esférica, diferentes dos fusos e triângulos, abordados aqui.

Espera-se que esta dissertação contribua com o aperfeiçoamento do professor do ensino básico e com a melhoria no ensino da matemática.

REFERÊNCIAS

- [1] ALVES, Sérgio. A geometria do globo terrestre. In: **Revista de Iniciação Científica OBMEP**, Rio de Janeiro: IMPA 2009.
- [2] ARAGÃO, Maria José. **História da matemática**. Rio de Janeiro: Interciência, 2009.
- [3] BARBOSA, J.L.M. **Geometria euclidiana plana**. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2006.
- [4] BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 3ª edição. São Paulo: Blucher, 2010.
- [5] CARMO, Manfredo Perdigão do. Geometrias Não-Euclidianas. In: **Revista Matemática Universitária**, nº 6, Rio de Janeiro, 1987.
- [6] COUTINHO, Lázaro. **Convite às geometrias não-euclidianas**. Interciência: Rio de Janeiro, 2001.
- [7] DE BARROS, A.A; ANDRADE, P.F. **Introdução à geometria projetiva**. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.
- [8] FAUL, H; FAUL, C. **It began with a stone**. New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [9] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Souza. **Introdução à álgebra linear**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.
- [10] IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar: trigonometria**. 7.ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [11] LIMA, Elon Lages. Ainda sobre o teorema de Euler para poliedros convexos. In: **RPM** nº5. IMPA: Rio de Janeiro, 1984.
- [12] LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.

- [13] MLODINOW, Leonard. **A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço**. São Paulo: Geração Editorial, 2008.
- [14] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática-SBM: Rio de Janeiro, 2013.
- [15] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**, v.1. São Paulo: Moderna, 1995.
- [16] SILVA, Angela M.M.(coordenação); **Manual de normas para apresentação de trabalhos técnico-científicos da UFRR**. Editora da UFRR: Boa Vista, 2012.
- [17] STEWART, James. **Cálculo**, v.1 e 2; Tradução: Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Thomson Learning, 2007.
- [18] TODHUNTER, I. **Spherical Trigonometry for the use of colleges and schools**. Project Gutenberg. London: Macmillan and Co, 1886.
- [19] ZANELLA, Idelmar André. **Geometria esférica: uma proposta de atividades com aplicações**. 2013. p. 129. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.