



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

REGINALDO SILVA BELTRAMI

**ALGUMAS TÉCNICAS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO PROCESSO  
DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DO ENSINO BÁSICO:  
SITUAÇÕES DE MÁXIMOS E MÍNIMOS E LUGARES GEOMÉTRICOS**

Boa Vista - RR

2016

REGINALDO SILVA BELTRAMI

**ALGUMAS TÉCNICAS UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA NO PROCESSO  
DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DO ENSINO BÁSICO:  
SITUAÇÕES DE MÁXIMOS E MÍNIMOS E LUGARES GEOMÉTRICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira

Boa Vista - RR

2016

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

B453a Beltrami, Reginaldo Silva.

Algumas técnicas utilizando o software geogebra no processo de resolução de problemas geométricos do ensino básico: situações de máximos e mínimos e lugares geométricos / Reginaldo Silva Beltrami. – Boa Vista, 2016.  
139f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

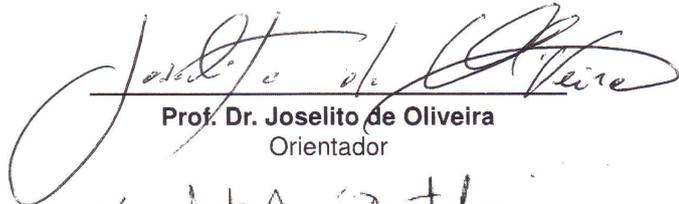
1 – Geometria euclidiana plana. 2 – Geometria analítica plana. 3 GeoGebra. I – Título. II – Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU – 514.12

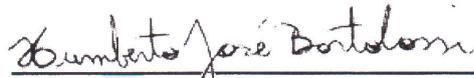
REGINALDO SILVA BELTRAMI

**ALGUMAS TÉCNICAS UTILIZANDO O SOFTWARE  
GEOGEBRA NO PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE  
PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DO ENSINO BÁSICO:  
SITUAÇÕES DE MÁXIMOS E MÍNIMOS E LUGARES  
GEOMÉTRICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 12 de agosto de 2016 e avaliada pela seguinte banca examinadora.



**Prof. Dr. Joselito de Oliveira**  
Orientador



**Prof. Dr. Humberto José Bortolossi**  
UFF



**Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva**  
UFRR

Boa Vista - RR  
2016

*A Deus, que iluminou os meus  
passos durante esta caminhada,  
à minha esposa pelo amor e  
cuidado e à minha família pela  
criação, educação, cuidado, amor  
e pelo apoio durante toda a minha vida.*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por me presentear com o maravilhoso dom da vida e por ser essencial em minha vida, autor de meu destino, meu guia, presente na hora da alegria e da angústia.

À minha mãe, Maria das Graças Silva Beltrami, por ter me dado a luz, amor e cuidado enquanto estava viva.

À minha mãe, Eulina Gonçalves Vieira, pela criação, amor, carinho, compreensão e pelo cuidado que tem por mim.

Ao meu pai, Lourival Pinton Beltrami, que, mesmo morando distante, tem amor, carinho e cuidado por mim.

À minha maravilhosa esposa, Geovanna Marcelle Silva Beltrami, pelo apoio incondicional, constante incentivo, amor, compreensão, carinho, cuidado e dedicação que tem por mim.

Ao meu irmão, Reinaldo Silva Beltrami, por ser meu fiel amigo, ajudando-me nos momentos que mais precisei.

Aos meus irmãos: Regiane, Regina, Adriana, Emerson, Thaís, Thalia e Thierry pelo incentivo, apoio e admiração.

Ao professor, Prof. Dr. Joselito de Oliveira, pela confiança, paciência, incentivo, amizade, por ter me orientado e auxiliado no desenvolvimento deste trabalho, e por sua imensa dedicação ao PROFMAT como coordenador local.

Aos professores presenciais do PROFMAT: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda, Prof. Me. Raimundo Nonato Araújo Pedro, Prof. Me. Silvestre da Cruz Monteiro, Prof. Me. Elzimar de Oliveira Rufino, Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima, Prof. Me. Gilson Costa de Souza e Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva, pela contribuição com seu bem mais precioso, o conhecimento.

Aos colegas e amigos que fiz no PROFMAT de 2012 a 2016: Prof. Me. Jerrimar, Prof. Me. Rodson, Prof. Me. Eduardo Lepletier, Prof. Me. Fabiana, Prof. Me. Eduardo Sindeaux, Prof. Me. Clarissa, Prof. Me. Admilson, Prof. Me. Admilson dos Santos, Prof. Me. Ornélio, Prof. Me. Osmilcy e Samuel pelos estudos em grupos; troca de conhecimento; experiências e aprendizado.

Aos meus grandes amigos do PROFMAT 2013, Prof. Me. Franciel Araújo do Nascimento e Prof. Me. Joerk da Silva Oliveira, por compartilharem o conhecimento e pelo apoio nos momentos que mais precisei.

Ao meu grande amigo, Ediel Pessoa da Silva Junior, pela amizade que temos desde 2004 e por me ajudar sempre.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM/PROFMAT e à Universidade Federal de Roraima - UFRR, por me darem a oportunidade de cursar este mestrado.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro.

Ao Instituto Federal de Roraima, Campus Amajari, pelo apoio para terminar este trabalho.

A todos que contribuíram diretamente e indiretamente para que eu chegasse até aqui e alcançasse esse objetivo.

Sem o apoio de todos, este trabalho não teria sido realizado. A eles, meu muito, muito obrigado.

## RESUMO

Tendo em vista as mudanças ocorridas ao longo do tempo, provenientes dos avanços tecnológicos e contidas em todos os setores, a vida humana tem sido atingida significativamente. Particularmente, procura-se fazer uso dessas novas tecnologias, objetivando motivar a aprendizagem do indivíduo e nos métodos utilizados na educação. E no que diz respeito a consolidação no processo pedagógico, os *softwares* de matemática dinâmica têm como objetivo auxiliar os modelos tradicionais de ensino e contribuir para a evolução do cenário educacional. No Ensino Básico, espera-se que os alunos saibam utilizar essas ferramentas tecnológicas para uma melhor compreensão ou visualização de problemas geométricos. Dessa forma, o principal objetivo desta dissertação é apresentar algumas técnicas que contribuam como facilitadoras do entendimento de problemas geométricos relacionados à geometria plana com abordagem em situações variáveis, utilizando funções reais, o conceito de lugar geométrico e o *software* GeoGebra. Por fim, apresenta-se um acervo de dez problemas geométricos relacionados mais intimamente com os conceitos de lugar geométrico, de máximo e de mínimo, nos quais servirão como referencial para os professores e alunos que desejam explorar essa poderosa ferramenta chamada GeoGebra.

**Palavras-chave:** Geometria euclidiana plana. Geometria analítica plana. GeoGebra.

## ABSTRACT

In view of the changes over time, from the technological advances and contained in all sectors, human life has been affected significantly. In particular, one seeks to make use of these new technologies, aiming to motivate learning of the individual and the methods used in education. And, with regard to consolidation in the educational process, the dynamic software are designed to help traditional models of education and contribute to the development of the educational setting. In basic education, it is expected that students know how to use these technological tools for better understanding and visualization of geometric problems. Thus, the main objective of this dissertation is to present some techniques that contribute to facilitating the understanding of geometric problems related to the flat geometry approach to changing situations using real functions, the concept of locus and GeoGebra software. Finally, we present a collection of ten related geometric problems more closely with the concepts of locus, maximum and minimum, in which will serve as a reference for teachers and students who wish to explore this powerful tool called GeoGebra.

**Key-words:** Euclidean plane geometry. Analytic plane geometry. GeoGebra.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	região convexa (esq.) e não convexa (dir.).....	19
2	regiões angulares no plano.....	20
3	Ângulos agudo (esq.), reto (centro) e obtuso (dir.).....	21
4	Retas concorrentes (esq.) e paralelas (dir.) .....	21
5	Retas perpendiculares e pé da perpendicular .....	22
6	Três pontos colineares ( $A$ , $B$ e $C$ ) e três não colineares ( $D$ , $E$ e $F$ )....	22
7	um polígono convexo de nove vértices (e lados). .....	23
8	Triângulo $ABC$ de vértices $A$ , $B$ e $C$ .....	23
9	Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.).....	24
10	Triângulo Retângulo $ABC$ , reto em $A$ .....	24
11	Bissetriz de um ângulo.....	25
12	Bissetriz interna relativa a $BC$ .....	25
13	Ponto médio $M$ do segmento $AB$ .....	26
14	Mediatriz $r$ de $AB$ .....	26
15	Mediana $AM$ referente ao vértice $A$ .....	26
16	Altura $AH$ referente ao vértice $A$ .....	27
17	Círculo de centro $O$ e raio $r$ .....	27
18	Setor circular de centro $O$ e raio $r$ .....	28
19	Mediatriz como LG .....	29
20	Bissetriz como LG .....	29
21	Baricentro $G$ do triângulo $ABC$ .....	30
22	Circuncentro $O$ do triângulo $ABC$ .....	31
23	Triângulo $ABC$ : retângulo (esq.), acutângulo (centro), obtusângulo (dir.).....	31
24	Incentro $I$ do triângulo $ABC$ .....	32
25	Dois triângulos congruentes .....	32
26	O caso de congruência LAL.....	33
27	O caso de congruência ALA .....	33
28	O caso de congruência LLL .....	34
29	O caso de congruência LAAo.....	34
30	Trapézio $ABCD$ isósceles (esq.), escaleno (centro), retângulo (dir.) ..	35
31	base média e mediana de Euler de um trapézio .....	36
32	Teorema de Thales.....	36
33	O teorema da bissetriz .....	37
34	Dois triângulos semelhantes .....	38
35	Teorema de Pitágoras no triângulo $ABC$ .....	39

36	Quadrado $ABCD$ de lado $l$ .....	40
37	Retângulo $ABCD$ de lados $a$ e $b$ .....	40
38	Paralelogramo $ABCD$ de base $a$ e altura $h$ .....	41
39	Triângulo $ABC$ .....	41
40	Área de um círculo de centro $O$ e raio $R$ .....	42
41	Área de um setor circular de centro $O$ e raio $R$ .....	43
42	Distância entre os pontos $A$ e $B$ .....	46
43	Pontos $A$ , $B$ e $C$ .....	47
44	Perpendicularidade entre duas retas.....	48
45	Fórmula de distância de ponto à reta.....	49
46	Parábola.....	49
47	Elipse.....	52
48	Elementos da Elipse.....	53
49	Hipérbole.....	54
50	Elementos da hipérbole.....	55
51	Área de trabalho do GeoGebra.....	58
52	Menu Arquivo.....	58
53	Menu Editar.....	59
54	Menu Exibir.....	59
55	Menu Opções.....	60
56	Menu Ferramentas.....	61
57	Menu Janela.....	61
58	Menu Ajuda.....	61
59	12 ícones da Barra de Ferramentas.....	62
60	Ferramentas de Movimentos.....	62
61	Ferramentas de Pontos.....	63
62	Ferramentas de Linhas Retas.....	64
63	Ferramentas de Posições Relativas.....	65
64	Ferramentas de Polígonos.....	66
65	Ferramentas de Formas Circulares.....	67
66	Ferramentas de Cônicas.....	68
67	Ferramentas de Ângulos e Medidas.....	69
68	Ferramentas de Transformações.....	70
69	Ferramentas Especiais.....	71
70	Ferramentas de Interface Gráfica.....	72
71	Ferramentas Gerais.....	73
72	Entrada: círculo centrado no ponto $(\sqrt{2}, 1)$ e raio 2.....	74
73	Janela de Álgebra e Janela de Visualização.....	74
74	Outros Recursos.....	75

75	Propriedades: Preferências .....	76
76	Botão Direito do Mouse: Janela de Visualização .....	77
77	Janela de Visualização: Preferências.....	77
78	Ajuda .....	78
79	Retângulo $DEFG$ inscrito no triângulo $ABC$ .....	81
80	Construção do triângulo $ABC$ .....	82
81	Construção do retângulo $DEFG$ .....	83
82	Comportamento dos pontos $(i, pol1)$ e $(j, pol1)$ .....	84
83	Comportamento dos pontos $(i, pol1)$ e $(j, pol1)$ com novos efeitos .....	85
84	Imagem ilustrativa do canteiro com a forma de setor circular .....	88
85	Imagem ilustrativa do setor circular com seus elementos .....	89
86	Dados do controle deslizante sobre $r$ .....	90
87	Ângulo com amplitude fixa em função de $r$ .....	90
88	Ângulo em função de $r$ no GeoGebra .....	91
89	Inspetor de Funções: $f(x) = -x^2 + 49,63x + 7,98$ .....	92
90	Comportamento do ponto $(r, c)$ .....	93
91	Problema 3 .....	93
92	Retângulos $AKIG$ e $JLMH$ .....	95
93	Comportamento dos pontos $N$ e $O$ .....	96
94	Comportamento dos pontos $N$ e $O$ com novos efeitos .....	98
95	Problema 4 .....	99
96	Comportamento do ponto $A$ .....	100
97	Problema 5 .....	101
98	Comportamento do ponto $E$ .....	102
99	Problema 6 .....	104
100	Relação entre $A$ e $r$ .....	105
101	Construção do Problema 6 .....	106
102	Lugar geométrico do Problema 6.....	107
103	Relação entre $r$ e $lg_1$ .....	107
104	Problema 7 .....	108
105	Construção do Problema 7 .....	109
106	Lugar geométrico do Problema 7.....	110
107	Problema 8 .....	111
108	Lugar geométrico do Problema 8.....	112
109	Interpretação geométrica do problema 9 .....	113
110	Construindo o Problema 9 .....	114
111	Lugar geométrico do Problema 9.....	116
112	Problema 10 .....	117
113	Lugar geométrico do Problema 10.....	118

114	Retângulo $DEFG$ inscrito no triângulo $ABC$ .....	123
115	Retângulo $DEFG$ inscrito no triângulo $ABC$ com elementos .....	123
116	Imagem ilustrativa do canteiro com a forma de setor circular .....	125
117	Problema 3 .....	126
118	Problema 3 com elementos .....	127
119	Problema 4 .....	128
120	Problema 5 .....	128
121	Área circundada do Problema 5 .....	128
122	Problema 6 .....	129
123	Construção do Problema 6 .....	129
124	LG de M do Problema 6 .....	130
125	Construção do Problema 7 .....	130
126	Construção do Problema 7 com elementos especiais .....	131
127	LG de M do Problema 7 .....	131
128	Problema 8 .....	132
129	Hipérbole do Problema 8 .....	133
130	Problema 9 .....	133
131	Lugar geométrico do Problema 9 .....	134
132	Problema 10 .....	135
133	Construção geométrica do Problema 10 .....	135
134	Lugar geométrico do Problema 10 .....	136

## SUMÁRIO

	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>16</b>
<b>1</b>	<b>PRELIMINARES</b> .....	<b>19</b>
1.1	MOTIVAÇÃO I .....	19
1.2	CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDI- ANA PLANA.....	19
1.3	LUGARES GEOMÉTRICOS .....	28
<b>1.3.1</b>	<b>Mediatriz</b> .....	<b>28</b>
<b>1.3.2</b>	<b>Bissetriz</b> .....	<b>29</b>
<b>1.3.3</b>	<b>Círculo</b> .....	<b>29</b>
<b>1.3.4</b>	<b>Pontos Notáveis de um Triângulo</b> .....	<b>30</b>
1.3.4.1	Baricentro.....	30
1.3.4.2	Circuncentro .....	30
1.3.4.3	Ortocentro .....	31
1.3.4.4	Incentro .....	31
1.4	CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS .....	32
<b>1.4.1</b>	<b>Trapézio: Base Média e Mediana de Euler</b> .....	<b>35</b>
1.5	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS .....	36
<b>1.5.1</b>	<b>Crterios de Semelhança de Triângulos</b> .....	<b>38</b>
<b>1.5.2</b>	<b>Teorema de Pitágoras</b> .....	<b>38</b>
1.6	ÁREAS DE FIGURAS PLANAS .....	39
<b>1.6.1</b>	<b>Quadrado</b> .....	<b>39</b>
<b>1.6.2</b>	<b>Retângulo</b> .....	<b>40</b>
<b>1.6.3</b>	<b>Paralelogramo</b> .....	<b>40</b>
<b>1.6.4</b>	<b>Triângulo</b> .....	<b>41</b>
<b>1.6.5</b>	<b>Fórmula de Herão</b> .....	<b>41</b>
<b>1.6.6</b>	<b>Círculo</b> .....	<b>42</b>
<b>1.6.7</b>	<b>Setor circular</b> .....	<b>42</b>
1.7	MOTIVAÇÃO II .....	43
1.8	ALGUMAS FUNÇÕES REAIS.....	44
<b>1.8.1</b>	<b>Função</b> .....	<b>44</b>
<b>1.8.2</b>	<b>Função Afim</b> .....	<b>44</b>
<b>1.8.3</b>	<b>Função Polinomial</b> .....	<b>44</b>
<b>1.8.4</b>	<b>Função Quadrática</b> .....	<b>44</b>
<b>1.8.5</b>	<b>Transformação da forma geral para canônica</b> .....	<b>45</b>
<b>1.8.6</b>	<b>Zeros da função quadrática</b> .....	<b>45</b>
1.9	MOTIVAÇÃO III .....	45

1.10	ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA.....	46
1.10.1	<b>Distância Entre Dois Pontos.....</b>	<b>46</b>
1.10.2	<b>O Gráfico da Função Afim.....</b>	<b>47</b>
1.10.3	<b>Distância de um ponto a uma reta.....</b>	<b>49</b>
1.10.4	<b>Parábola.....</b>	<b>49</b>
1.10.5	<b>O Gráfico da Função Quadrática.....</b>	<b>50</b>
1.10.6	<b>Elipse.....</b>	<b>52</b>
1.10.6.1	Elementos da Elipse.....	52
1.10.7	<b>Hipérbole.....</b>	<b>54</b>
1.10.7.1	Elementos da Hipérbole.....	55
<b>2</b>	<b>SOFTWARE GEOGEBRA: BREVE APRESENTAÇÃO E RECURSOS</b>	<b>57</b>
2.1	FERRAMENTAS BÁSICAS A SEREM UTILIZADAS NESTE TRABALHO	57
2.1.1	<b>Barra de Menus.....</b>	<b>58</b>
2.1.1.1	Menu Arquivo.....	58
2.1.1.2	Menu Editar.....	59
2.1.1.3	Menu Exibir.....	59
2.1.1.4	Menu Opções.....	60
2.1.1.5	Menu Ferramentas.....	61
2.1.1.6	Menu Janela.....	61
2.1.1.7	Menu Ajuda.....	61
2.1.2	<b>Barra de Ferramentas.....</b>	<b>62</b>
2.1.2.1	Ferramentas de Movimentos.....	62
2.1.2.2	Ferramentas de Pontos.....	62
2.1.2.3	Ferramentas de Linhas Retas.....	63
2.1.2.4	Ferramentas de Posições Relativas.....	64
2.1.2.5	Ferramentas de Polígonos.....	66
2.1.2.6	Ferramentas de Formas Circulares.....	66
2.1.2.7	Ferramentas de Cônicas.....	68
2.1.2.8	Ferramentas de Ângulos e Medidas.....	68
2.1.2.9	Ferramentas de Transformações.....	69
2.1.2.10	Ferramentas Especiais.....	70
2.1.2.11	Ferramentas de Controles.....	71
2.1.2.12	Ferramentas de Exibições.....	72
2.1.3	<b>Entrada.....</b>	<b>73</b>
2.1.4	<b>Janela de Álgebra e Janela de Visualização.....</b>	<b>74</b>
2.1.5	<b>Outros Recursos.....</b>	<b>75</b>

<b>3</b>	<b>TÉCNICAS UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA UMA MELHOR COM- PREENSÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA GEOMETRIA PLANA DO ENSINO BÁSICO: SITUAÇÕES DE MÁXIMOS E MÍN- IMOS E LUGARES GEOMÉTRICOS.....</b>	<b>79</b>	
3.1	PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA GEOMETRIA PLANA.....	80	
3.2	TÉCNICA EMPREGADA NO PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PRO- BLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS .....	81	
3.2.1	<b>Problema 1 .....</b>	<b>81</b>	
3.2.2	<b>Problema 2 .....</b>	<b>88</b>	
3.2.3	<b>Problema 3 .....</b>	<b>93</b>	
3.2.4	<b>Problema 4 .....</b>	<b>98</b>	
3.2.5	<b>Problema 5 .....</b>	<b>101</b>	
3.3	TÉCNICA EMPREGADA NO PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PRO- BLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS .....	103	
3.3.1	<b>Problema 6 .....</b>	<b>104</b>	
3.3.2	<b>Problema 7 .....</b>	<b>108</b>	
3.3.3	<b>Problema 8 .....</b>	<b>111</b>	
3.3.4	<b>Problema 9 .....</b>	<b>113</b>	
3.3.5	<b>Problema 10 .....</b>	<b>116</b>	
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>119</b>	
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>120</b>	
	 <b>APÊNDICES</b>	 <b>122</b>	
	<b>APÊNDICE A –</b>	<b>ALGUMAS SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NO CAPÍTULO 3 .....</b>	<b>123</b>
	<b>APÊNDICE B –</b>	<b>PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA.....</b>	<b>137</b>

## INTRODUÇÃO

Desde os tempos antigos, a Matemática vem se desenvolvendo como uma importante ferramenta utilizada pela humanidade. A partir dos primeiros problemas de contagem simples de objetos até o desenvolvimento de teorias refinadas e de grande avanço tecnológico, a Matemática se tornou indispensável para o nosso desenvolvimento (OLIVEIRA, 2015).

Ao longo do tempo, temos observado muitas mudanças ocasionadas pelos avanços tecnológicos que estão presentes em todos os setores e dos quais têm atingido de forma significativa a vida humana. E com relação a educação, procura-se fazer uso dessas novas tecnologias para motivar a aprendizagem dos alunos. E quando nos referimos a consolidação no processo pedagógico, os *softwares* de geometria dinâmica têm como objetivo auxiliar os modelos tradicionais para a evolução do cenário educacional. Isso nos mostra a importância da necessidade na formação de professores para o ensino das novas ferramentas tecnológicas e que permitam ao aluno um ambiente mais divertido e interativo, visando o estímulo do raciocínio e da criatividade, facilitando a compreensão dos conteúdos a serem estudados.

Com o objetivo de acrescentar à habitual metodologia de ensino, simplificando e incentivando a evolução de competências e visando a melhoria da aprendizagem dos alunos, o *software* dinâmico GeoGebra pode contribuir para um processo de ensino e aprendizagem, mais rico, motivador e, ainda, estimular a exploração e a descoberta, onde os alunos possam trabalhar o seu próprio ritmo.

Segundo GUEDES (2013), as atividades mediadas pelo uso de *softwares* permitirão ao professor explorar as distintas formas de representar um mesmo problema (gráfica, algébrica e tabular).

Nesse sentido, ALLEVATO (2005) nos assegura que:

A imagem é um recurso fundamental das tecnologias à disposição da Matemática ou de qualquer outra área do conhecimento, considerando-a como um dos elementos que caracterizam novos estilos de construção do conhecimento. (ALLEVATO, 2005, p. 81)

Em OLIVEIRA (2013) encontra-se uma pesquisa que trata de metodologia de ensino utilizando o ambiente de geometria dinâmica, conforme o seguinte resumo:

Este trabalho apresenta uma proposta de abordagem que permite ao professor do ensino médio tratar do conceito de função quadrática. Propõe a construção do conhecimento através de atividades desenvolvidas em ambiente de geometria dinâmica (GeoGebra), explorando as ideias intuitivas de variação e dependência construídas entre objetos

geométricos sem a mediação das representações algébricas e gráficas, comumente empregadas na sala de aula do ensino médio.

Sobre o *software* de geometria dinâmica Cabri-Géomètre II e com o título "Contribuições de um *Software* de Geometria Dinâmica na Exploração de Problemas de Máximos e Mínimos", MENK (2005), em suas conclusões, nos diz que:

Autores como Gorini (1997), Araújo (2002), Rezende (2003), Stewart (2003) entre outros, citam que uma das maiores dificuldades em relação à resolução de um Problema de Máximo e Mínimo é traduzir o enunciado na forma de uma função. Nesse sentido, creio que o Cabri tenha proporcionado situações por meio das quais os alunos puderam interpretar com mais facilidade o enunciado, testar hipóteses, além de levantar outras o que parece ter ajudado a encontrar a função. (MENK, 2005, p. 226)

Assim, entendemos que uma das alternativas para auxiliar o aluno na resolução de problemas geométricos, similares aos presentes em MENK (2005) e OLIVEIRA (2013), e de lugares geométricos, é que se faça primeiro uma reflexão do problema utilizando os *softwares* de geometria dinâmica e, só depois, usando as observações obtidas, partir para o ambiente papel e lápis.

Dessa forma, propomos estudar algumas técnicas, utilizando o GeoGebra, *software* de matemática dinâmica, gratuito e disponível para laptops, celulares, tablets e similares, focadas na **visualização dinâmica** de problemas geométricos, com abordagem em situações variáveis, no contexto do ensino básico.

A seguir faremos uma descrição de como pretendemos escrever a dissertação. No capítulo um, faremos uma revisão de algumas definições, axiomas, proposições e teoremas importantes de alguns conteúdos de geometria plana euclidiana, geometria analítica plana e funções reais para o apoio e desenvolvimento voltados para os objetivos deste trabalho. Na maioria das vezes iremos apenas enunciar os teoremas e proposições sem demonstrá-los, pois não é o objetivo deste trabalho. A maioria desses enunciados e observações podem ser encontrados em NETO (2013), LIMA et al. (2006a), LIMA et al. (2006b) e OLIVEIRA (2015).

Para o segundo capítulo, faremos uma abordagem de algumas ferramentas básicas do *software* GeoGebra voltadas a este trabalho, dos quais serão utilizadas no processo de compreensão de resolução de problemas geométricos.

No terceiro e último capítulo, apresentaremos dez problemas geométricos: Cinco sobre máximos e mínimos, que recaem, em sua maioria, em funções quadráticas, técnica encontrada em MENK (2005), e cinco sobre lugares geométricos, que recaem em cônicas, retas e segmentos de retas, onde ampliaremos a aplicação para esta classe de problemas. E, com o auxílio do *software* GeoGebra aplicaremos as técnicas para contribuir no entendimento desses tipos de problemas geométricos. Além disso,

espera-se que essas técnicas possibilitem ao aluno criar algumas conjecturas sobre o que lhe é pedido no problema, e também criar possibilidades de obter novas conjecturas do que não lhe é pedido no mesmo, durante a construção das figuras.

No Apêndice A, apresentamos as soluções dos dez problemas propostos no terceiro capítulo.

Para o Apêndice B, apresentamos uma proposta de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula em problemas similares aos apresentados no capítulo três.

## 1 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresenta-se alguns teoremas, proposições, definições e axiomas que servirão de base para o entendimento dos capítulos posteriores e apêndices.

### 1.1 MOTIVAÇÃO I

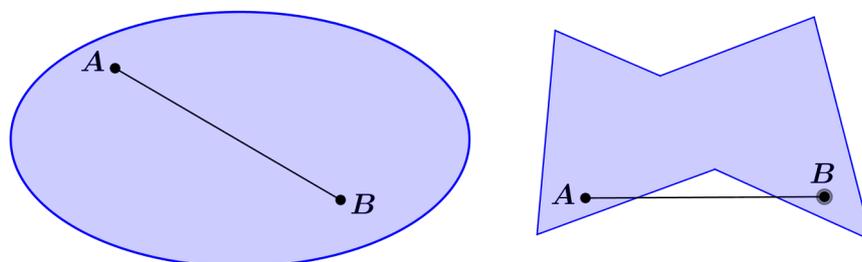
O ensino da Geometria é de fundamental importância para o desenvolvimento intelectual dos alunos do Ensino Médio e do Ensino Fundamental. O estudo da Matemática desprovido do conhecimento básico da Geometria é como se alguma coisa estivesse faltando na formação intelectual dos estudantes. A Geometria nos rodeia, está presente no cotidiano e é praticamente impossível não notá-la. Seria uma incoerência total, um aluno sair do Ensino Médio sem o mínimo de conhecimento sobre as formas geométricas e sem noções básicas de algumas propriedades desta disciplina (DELATORRE, 2013).

### 1.2 CONCEITOS GEOMÉTRICOS BÁSICOS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

Nesta seção, são apresentadas algumas definições e resultados importantes oriundos da geometria euclidiana plana.

**Definição 1.2.1 (Região Convexa e Região Não Convexa).** *Uma região  $\mathcal{R}$  do plano é **convexa** quando, para todos pontos  $A, B \in \mathcal{R}$ , tivermos o **segmento**  $AB \subset \mathcal{R}$ . Caso contrário, diremos que  $\mathcal{R}$  é uma região **não convexa** (Figura 1).*

Figura 1 – região convexa (esq.) e não convexa (dir.).

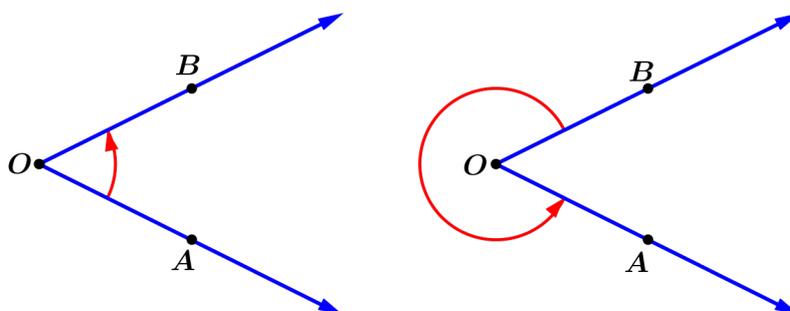


Fonte: Autor

**Observação 1.2.1.** *Tomando-se pontos diferentes  $A$  e  $B$  sobre uma reta  $r$ , o segmento  $AB$  é a porção da reta  $r$  situada de  $A$  a  $B$ .*

**Definição 1.2.2 (Ângulo).** Dadas, no plano, duas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$ , um **ângulo** (ou **região angular**) de **vértice**  $O$  e lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  é uma das duas regiões do plano limitadas pelas semirretas  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  (Figura 2).

Figura 2 – regiões angulares no plano



Fonte: Autor

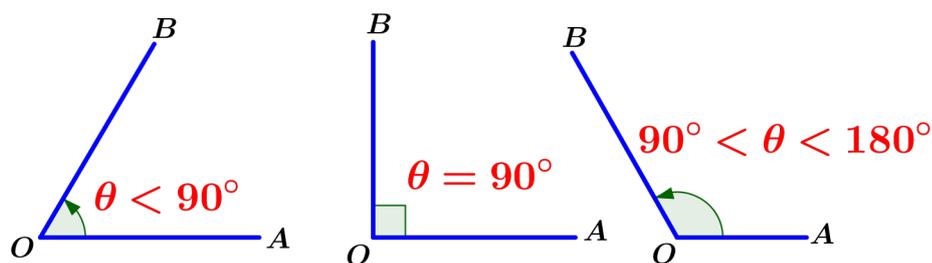
**Observação 1.2.2.** O ângulo da esquerda é convexo e o ângulo da direita é não convexo. Escrevemos  $\angle AOB$  para denotar um ângulo de lados  $\overrightarrow{OA}$  e  $\overrightarrow{OB}$  e o que determinará se o ângulo é convexo ou não convexo é o contexto a que estamos nos referindo.

**Observação 1.2.3.** Objetivando associar a todo ângulo uma medida da região do plano que ele ocupa, divide-se um **círculo**  $C$  de centro  $O$  em 360 arcos iguais e toma-se pontos  $A$  e  $B$ , extremos de um desses 360 arcos iguais. Dizemos que a **medida** do ângulo  $\widehat{AOB}$  é de um **grau** e escreve-se  $\widehat{AOB} = 1^\circ$ . A partir disso, é possível determinar a medida de qualquer ângulo  $\angle AOB$ .

**Definição 1.2.3 (Ângulos agudo, reto e obtuso).** Um ângulo (Figura 3)  $\angle AOB$  é **agudo** quando  $0^\circ < \widehat{AOB} < 90^\circ$ , **reto** quando  $\widehat{AOB} = 90^\circ$  e **obtusos** quando  $90^\circ < \widehat{AOB} < 180^\circ$ . Dizemos ainda que, dois ângulos são **complementares** se a soma de suas medidas é igual a  $90^\circ$ , e **suplementares** se a soma de suas medidas é igual a  $180^\circ$ .

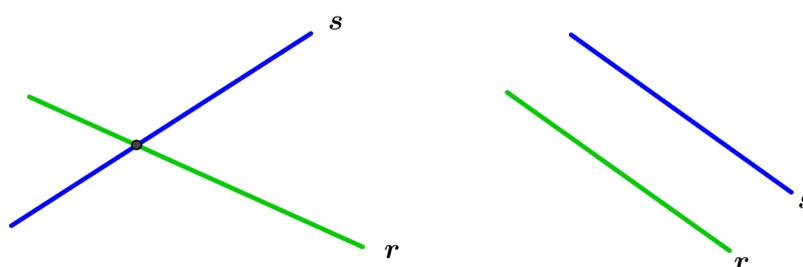
**Definição 1.2.4 (Retas paralelas e concorrentes).** Dadas duas retas  $r$  e  $s$  no plano, temos somente duas possibilidades para as mesmas: ou  $r$  e  $s$  têm um ponto em comum ou não têm nenhum ponto em comum; no primeiro caso, as retas são ditas **concorrentes**; no segundo, as retas são **paralelas** (Figura 4).

Figura 3 – Ângulos agudo (esq.), reto (centro) e obtuso (dir.).



Fonte: Autor

Figura 4 – Retas concorrentes (esq.) e paralelas (dir.).



Fonte: Autor

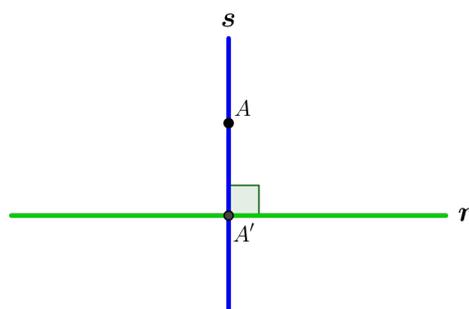
**Definição 1.2.5 (Distância entre dois Pontos).** *Dados os pontos  $A$  e  $B$  no plano, definimos a **distância**  $d(A, B)$  entre os mesmos como o comprimento  $\overline{AB}$  do segmento  $AB$ :*

$$d(A, B) = \overline{AB}.$$

**Definição 1.2.6 (Retas Perpendiculares e Projeção Ortogonal).** *Dadas as retas  $r$  e  $s$  no plano, dizemos que  $r$  é perpendicular a  $s$ , que  $s$  é perpendicular a  $r$  ou, ainda, que  $r$  e  $s$  são **perpendiculares** quando  $r$  e  $s$  tiverem um ponto em comum e formarem ângulos de  $90^\circ$  nesse ponto. Escrevemos  $r \perp s$  para denotar que duas retas  $r$  e  $s$  são perpendiculares. A **projeção ortogonal** de um ponto  $A$  sobre uma reta  $r$  é o ponto  $A'$  de  $r$  tal que  $A'$  é o ponto de interseção entre a reta  $r$  e a reta  $s$  que passa por  $A$  e é perpendicular a  $r$ . O ponto  $A'$  também é denominado o **pé da perpendicular** baixada de  $A$  a  $r$  (Figura 5).*

A **distância** do ponto  $A$  à reta  $r$  é definida como o comprimento do segmento  $AA'$  da Figura 5. Denotando por  $d$  a distância de  $A$  a  $r$ , temos então  $d = \overline{AA'}$ . Prova-se em NETO (2013, p. 56-57), que o comprimento do segmento  $AA'$  é menor que qualquer outro segmento unindo  $A$  a um ponto  $P \in r$ , com  $P \neq A'$ .

Figura 5 – Retas perpendiculares e pé da perpendicular



Fonte: Autor

**Definição 1.2.7.** Considere três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  no plano. Se  $C$  estiver sobre a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , diz-se que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são **colineares**, caso contrário, afirma-se que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são **não colineares** (Figura 6).

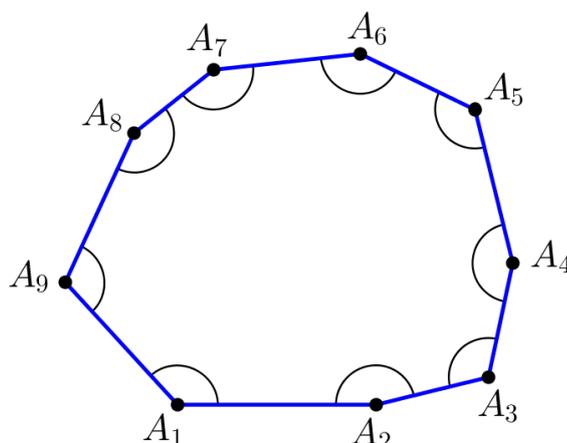
Figura 6 – Três pontos colineares ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ) e três não colineares ( $D$ ,  $E$  e  $F$ )

Fonte: Autor

**Definição 1.2.8 (Polígono (convexo)).** Sejam  $n \geq 3$  um natural e  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  pontos distintos do plano. Dizemos que  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  é um **polígono (convexo)** se, para  $1 \leq i \leq n$ , a reta  $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$  não contém nenhum outro ponto  $A_j$ , mas deixa todos eles em um mesmo semiplano, dentre os que ela determina (aqui,  $A_0 = A_n, A_{n+1} = A_1$  e  $A_{n+2} = A_2$ ). Em geral, dizemos que um polígono  $A_1A_2A_3 \dots A_n$  é um  **$n$ -ágono**, em referência a seu número  $n$  de lados (e de vértices). Contudo, são consagrados pelo uso os nomes **triângulo** para  $n = 3$ , **quadrilátero** para  $n = 4$ , **pentágono** para  $n = 5$ , **hexágono** para  $n = 6$ , **heptágono** para  $n = 7$ , **octógono** para  $n = 8$ , **eneágono** para  $n = 9$  e **decágono** para  $n = 10$ .

**Observação 1.2.4.** Na Figura 7, temos um polígono convexo  $A_1A_2A_3 \dots A_9$  de **vértices**  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_9$ , onde os segmentos  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_8A_9, A_9A_1$  (ou, por vezes, seus comprimentos) são os **lados** desse polígono. A soma dos comprimentos dos **lados** de um polígono é o **perímetro** do mesmo.

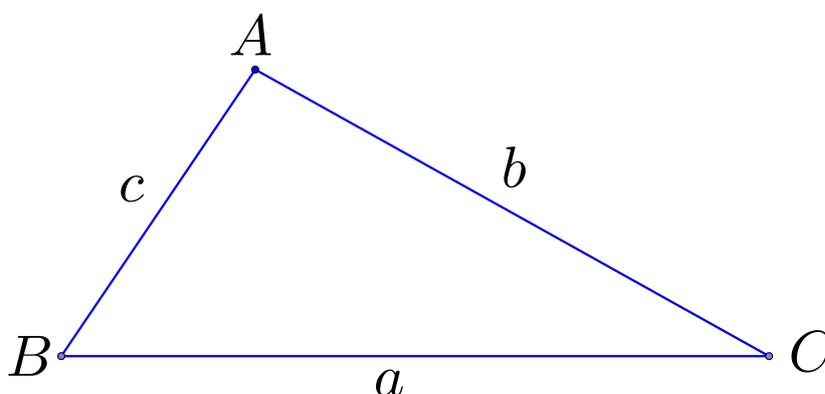
Figura 7 – um polígono convexo de nove vértices (e lados).



Fonte: Autor

**Definição 1.2.9 (Triângulo).** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  três pontos distintos e não colineares do plano. **Triângulo** é a figura plana formada pelos três segmentos determinados por  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Neste caso, dizemos que  $A$ ,  $B$  e  $C$  são os vértices do triângulo  $ABC$  (Figura 8).*

Figura 8 – Triângulo  $ABC$  de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$



Fonte: Autor

Diz-se também que os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$  (ou seus comprimentos) são os **lados** do triângulo. Usualmente escreve-se  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$  para denotar os comprimentos dos lados de um triângulo  $ABC$  (Figura 8). Da definição (1.2.8), se  $2p$  é o perímetro do triângulo  $ABC$ , então  $p = \frac{a + b + c}{2}$  é o seu **semiperímetro**.

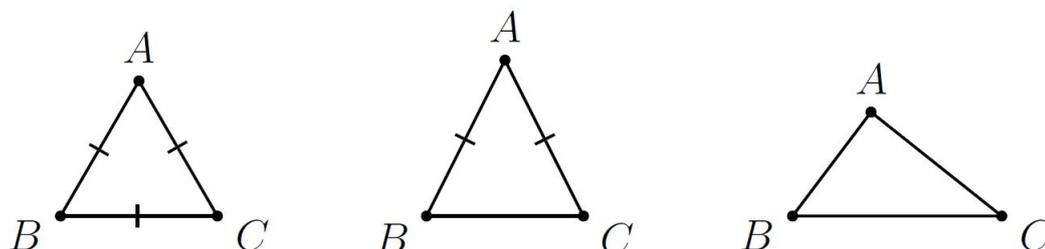
**Definição 1.2.10.** *Um triângulo  $ABC$  é denominado:*

(a) **Equilátero**, se  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ .

(b) **Isósceles**, se ao menos dois dentre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$  forem iguais.

(c) **Escaleno**, se  $\overline{AB} \neq \overline{AC} \neq \overline{BC} \neq \overline{AB}$ .

Figura 9 – Triângulos equilátero (esq.), isósceles (centro), escaleno (dir.).

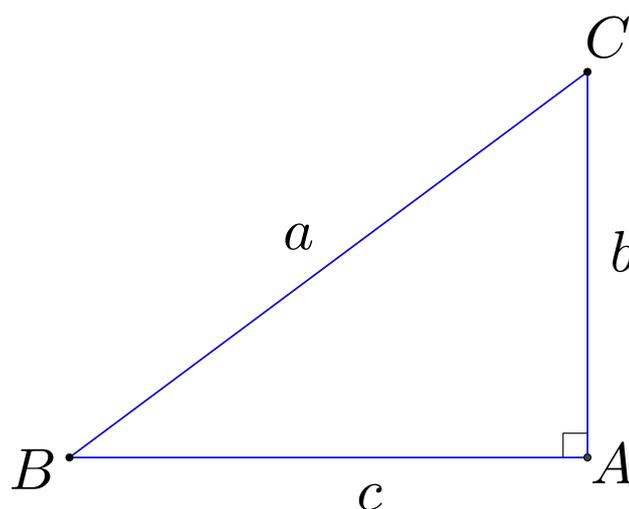


Fonte: NETO (2013)

**Definição 1.2.11 (Triângulos Acutângulo, Retângulo e Obtusângulo).** Um triângulo é **acutângulo** se todos os seus ângulos internos forem agudos, **retângulo** se tiver um ângulo reto e **obtusângulo** se tiver um ângulo obtuso.

No triângulo retângulo  $ABC$ , reto em  $A$ , da Figura 10, o lado maior  $BC$  é chamado de hipotenusa e os lados menores  $AB$  e  $AC$  são chamados de catetos.

Figura 10 – Triângulo Retângulo  $ABC$ , reto em  $A$

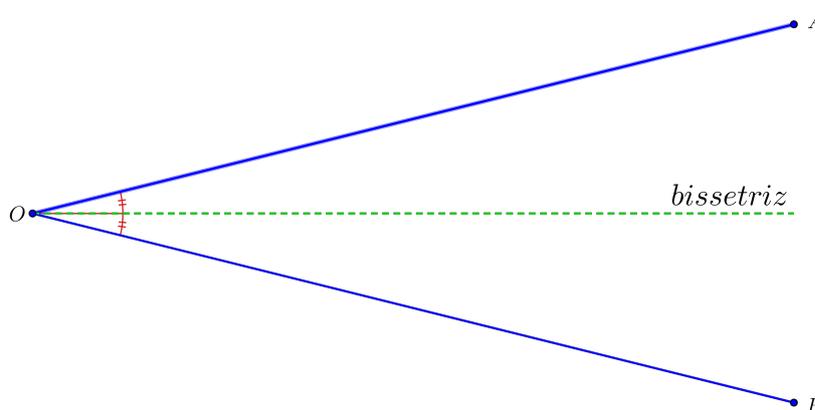


Fonte: Autor

**Definição 1.2.12 (Bissetriz de um ângulo).** Dado um ângulo  $\angle AOB$ , a **bissetriz** (Figura 11) de  $\angle AOB$  é a semirreta  $\overrightarrow{OC}$  que o divide em dois ângulos iguais. Neste caso, dizemos ainda que  $\overrightarrow{OC}$  bissecta  $\angle AOB$ . Assim,

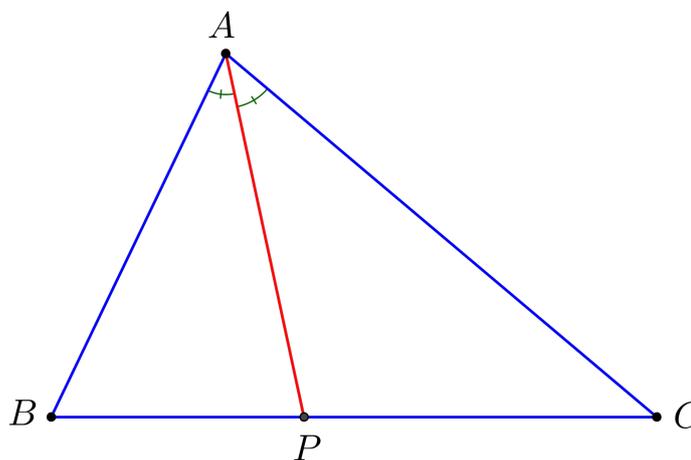
$$\overrightarrow{OC} \text{ bissecta } \angle AOB \Leftrightarrow \widehat{AOC} = \widehat{BOC}.$$

Figura 11 – Bissetriz de um ângulo



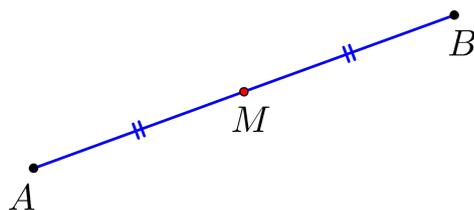
Fonte: Autor

Segundo NETO (2013), em um triângulo  $ABC$ , a **bissetriz interna** relativa a  $BC$  (ou ao vértice  $A$ ) é a porção  $AP$  da bissetriz do ângulo interno  $\angle A$  do triângulo, desde  $A$  até o lado  $BC$ ; o ponto  $P \in BC$  é o **pé da bissetriz interna** relativa a  $BC$ . De modo análogo, temos em  $ABC$  as bissetrizes internas aos lados  $AC$  e  $AB$  (ou aos vértices  $B$  e  $C$ , respectivamente), de modo que todo triângulo possui exatamente três bissetrizes internas (Figura 12).

Figura 12 – Bissetriz interna relativa a  $BC$ 

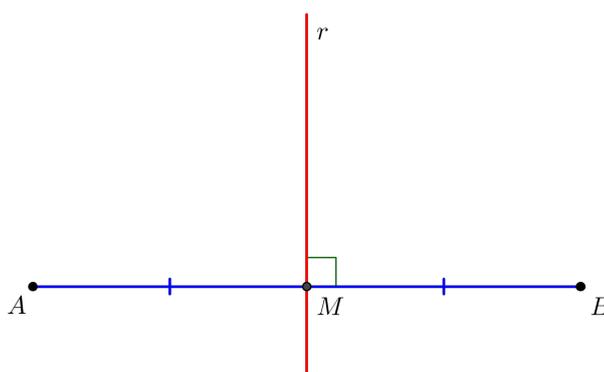
Fonte: Autor

**Definição 1.2.13 (Ponto médio de um segmento).** O **ponto médio** de um segmento  $AB$  é o ponto que o divide em duas partes iguais (Figura 13).

Figura 13 – Ponto médio  $M$  do segmento  $AB$ 

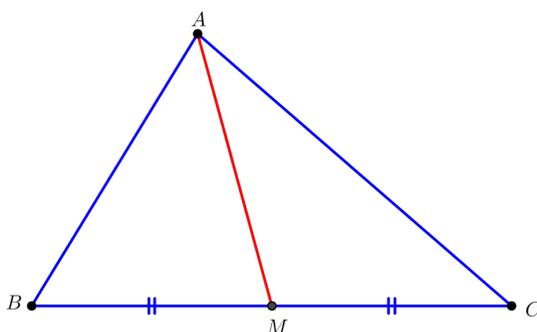
Fonte: Autor

**Definição 1.2.14 (Mediatriz do segmento  $AB$ ).** Dados os pontos  $A$  e  $B$  do plano, definimos a **mediatriz** do segmento  $AB$  como sendo a reta perpendicular a  $AB$  e que passa por seu ponto médio (Figura 14).

Figura 14 – Mediatriz  $r$  de  $AB$ 

Fonte: Autor

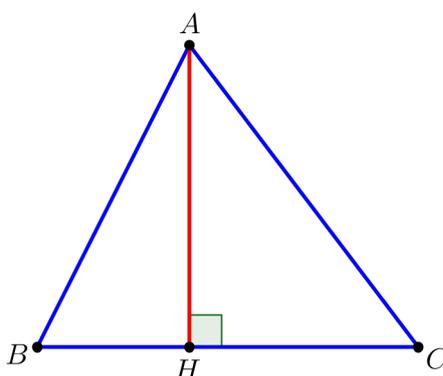
**Definição 1.2.15 (Mediana de um triângulo).** A **mediana** de um triângulo é um segmento que une um vértice do mesmo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice (Figura 15).

Figura 15 – Mediana  $AM$  referente ao vértice  $A$ 

Fonte: Autor

**Definição 1.2.16 (Altura de um triângulo).** Em um triângulo  $ABC$ , a **altura** relativa ao lado  $BC$  (ou ao vértice  $A$ ) é o segmento que une o vértice  $A$  ao pé da perpendicular baixada de  $A$  à reta  $\overleftrightarrow{BC}$ . Nesse caso, denominamos o pé da perpendicular em questão de **pé da altura** relativa a  $BC$ . De forma análoga, temos em  $ABC$  alturas relativas aos lados  $AC$  e  $AB$  (ou aos vértices  $B$  e  $C$ , respectivamente), de modo que todo triângulo possui exatamente três alturas.

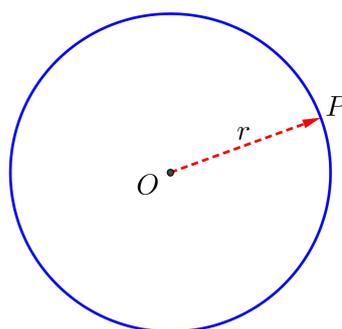
Figura 16 – Altura  $AH$  referente ao vértice  $A$



Fonte: Autor

**Definição 1.2.17 (Círculo).** Dados um ponto  $O$  e um real  $r > 0$  (que deve ser pensado como o comprimento de um segmento), o **círculo**  $\mathcal{T}$  de **centro**  $O$  e **raio**  $r$ ,  $\mathcal{T}(O; r)$ , é o conjunto dos pontos  $P$  do plano que estão à distância  $r$  de  $O$ , i.e., tais que  $\overline{OP} = r$ ;

Figura 17 – Círculo de centro  $O$  e raio  $r$



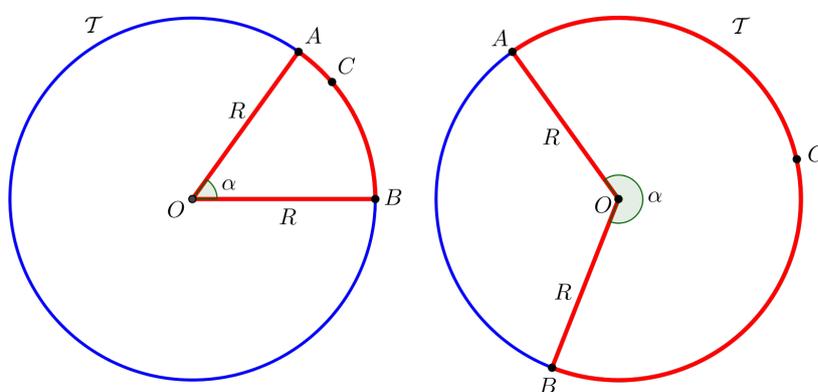
Fonte: Autor

De NETO (2013, p. 229 a 238), podemos concluir que o **comprimento** do círculo da Figura 17 é dado por  $2\pi r$ .

**Definição 1.2.18 (Setor Circular).** Dados um círculo  $\mathcal{T}$ , de centro  $O$  e raio  $R$ , e um arco  $\widehat{AB}$  de  $\mathcal{T}$ , definimos o **setor circular**  $A\widehat{O}B$  como a porção de  $\mathcal{T}$  formada pela

união dos raios  $OC$ , tais que  $C \in \widehat{AB}$ . Se  $\widehat{AOB} = \alpha$ , dizemos que  $\widehat{AOB}$  é um setor de ângulo  $\alpha$ .

Figura 18 – Setor circular de centro  $O$  e raio  $r$



Fonte: Autor

**Observação 1.2.5.** O arco  $\widehat{AB}$  a que fazemos referência é a porção, em vermelho, do círculo  $\mathcal{T}$  delimitada pelos pontos  $A$  e  $B$ . Também podemos escrever  $\widehat{ACB}$  para denotar o arco  $\widehat{AB}$  (em vermelho), já que existe um outro arco  $\widehat{AB}$  (em azul) também delimitado pelos pontos  $A$  e  $B$ .

### 1.3 LUGARES GEOMÉTRICOS

**Definição 1.3.1 (Lugar Geométrico).** Dada uma propriedade  $\mathcal{P}$  relativa a pontos do plano, o **lugar geométrico** (abreviamos **LG**) dos pontos que possuem a propriedade  $\mathcal{P}$  é o subconjunto  $\mathcal{L}$  do plano que satisfaz as duas condições a seguir:

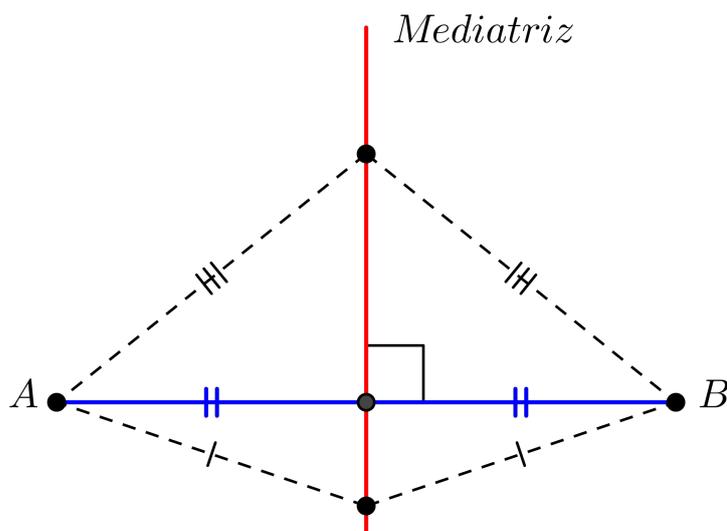
- Todo ponto de  $\mathcal{L}$  possui a propriedade  $\mathcal{P}$ .
- Todo ponto do plano que possui a propriedade  $\mathcal{P}$  pertence a  $\mathcal{L}$ .

Também podemos caracterizar a mediatriz de um segmento e a bissetriz de um ângulo como LG. Veja as proposições a seguir, cujas demonstrações podem ser encontradas em NETO (2013, p. 85-87 e 84-85).

#### 1.3.1 Mediatriz

**Proposição 1.3.1 (Mediatriz como LG).** Dados os pontos  $A$  e  $B$  no plano, a mediatriz do segmento  $AB$  é o LG dos pontos do plano que equidistam de  $A$  e de  $B$  (Figura 19).

Figura 19 – Mediatriz como LG

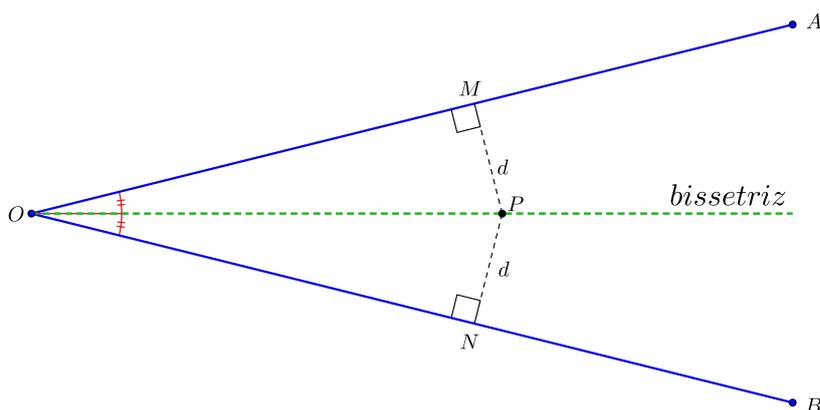


Fonte: Autor

### 1.3.2 Bissetriz

**Proposição 1.3.2 (Bissetriz de um ângulo como LG).** *Seja  $\angle AOB$  um ângulo dado. Se  $P$  é um ponto do mesmo, então  $d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \Leftrightarrow P \in (\text{bissetriz de } \angle AOB)$ .*

Figura 20 – Bissetriz como LG



Fonte: Autor

### 1.3.3 Círculo

**Proposição 1.3.3 (Círculo como LG).** *Dados um real positivo  $r$  e um ponto  $O$  do plano, Figura 17, o LG dos pontos do plano que estão à mesma distância  $r$  do ponto  $O$*

é o círculo de centro  $O$  e raio  $r$ :

$$\overline{PO} = r \Leftrightarrow P \in \mathcal{T}(O; r).$$

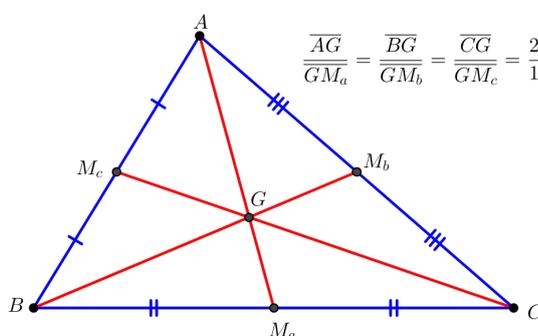
### 1.3.4 Pontos Notáveis de um Triângulo

Nesta subseção, aplica-se o conceito de lugar geométrico no estudo de alguns *pontos notáveis* de um triângulo, que são o *baricentro*, o *circuncentro*, o *ortocentro* e o *incentro*. A demonstração da proposição relacionada ao baricentro de um triângulo pode ser encontrada em NETO (2013, p. 71-72). Para as demais proposições dos outros três pontos notáveis, as demonstrações podem ser encontradas em NETO (2013, p. 92-96).

#### 1.3.4.1 Baricentro

**Proposição 1.3.4 (Baricentro de um triângulo).** *Em todo triângulo, as três medianas passam por um único ponto, o **baricentro** do triângulo. Ademais, o baricentro divide cada mediana, a partir do vértice correspondente, na razão 2 : 1 (Figura 21).*

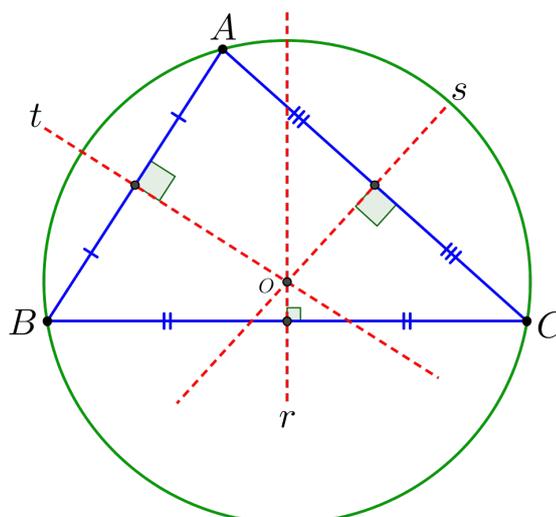
Figura 21 – Baricentro  $G$  do triângulo  $ABC$



Fonte: Autor

#### 1.3.4.2 Circuncentro

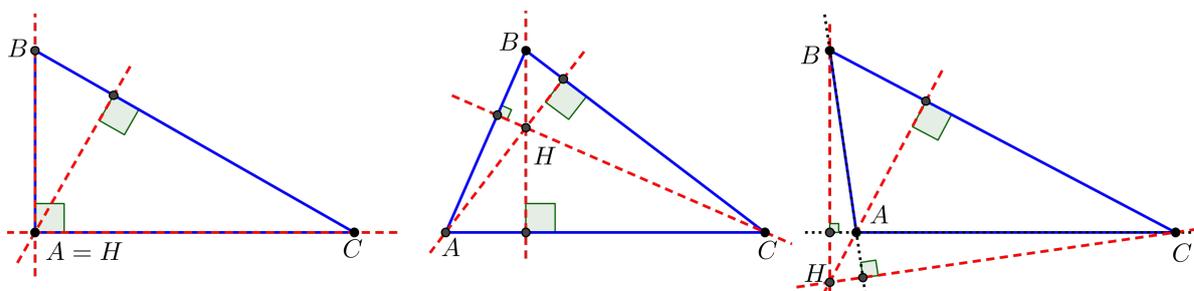
**Proposição 1.3.5 (Circuncentro de um triângulo).** *Em todo triângulo, as mediatrizes dos lados passam todas por um mesmo ponto, o **circuncentro** do mesmo (Figura 22).*

Figura 22 – Circuncentro  $O$  do triângulo  $ABC$ 

Fonte: Autor

## 1.3.4.3 Ortocentro

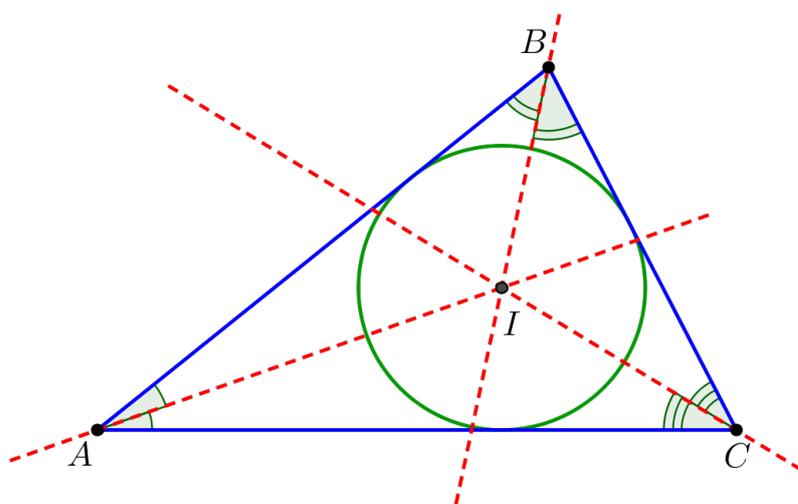
**Proposição 1.3.6 (Ortocentro de um triângulo).** *Em todo triângulo, as três alturas se intersectam em um só ponto  $H$ , o **ortocentro** do triângulo (Figura 23).*

Figura 23 – Triângulo  $ABC$ : retângulo (esq.), acutângulo (centro), obtusângulo (dir.).

Fonte: Autor

## 1.3.4.4 Incentro

**Proposição 1.3.7 (Incentro de um triângulo).** *As bissetrizes de um triângulo concorrem em um único ponto, o **incentro** do triângulo (Figura 24).*

Figura 24 – Incentro  $I$  do triângulo  $ABC$ 

Fonte: Autor

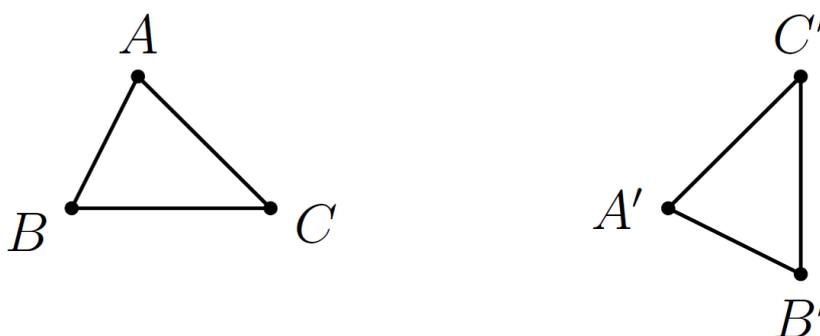
#### 1.4 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, apresenta-se quatro casos de congruências, no qual será denotado da seguinte forma: **LAL** (lado, ângulo, lado), **ALA** (ângulo, lado, ângulo), **LLL** (lado, lado, lado) e **LAAo** (lado, ângulo, ângulo oposto).

**Definição 1.4.1 (Congruência de Segmentos).** Dizemos que dois segmentos  $AB$  e  $CD$  são **congruentes** quando  $\overline{AB} = \overline{CD}$ ; dizemos que dois ângulos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  são congruentes se eles têm a mesma medida.

**Definição 1.4.2 (Congruência de Triângulos).** Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices, de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

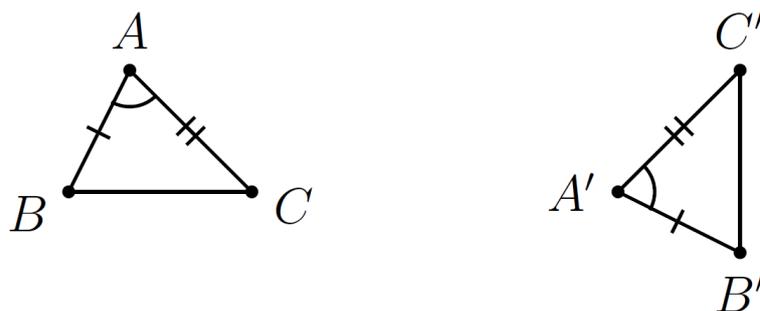
Figura 25 – Dois triângulos congruentes



Fonte: OLIVEIRA (2015 apud NETO, 2013)

**Axioma 1.4.1 (Caso de congruência LAL).** *Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por esses dois lados forem respectivamente congruentes a dois lados de outro triângulo e ao ângulo formado por esses dois lados, então os dois triângulos são congruentes.*

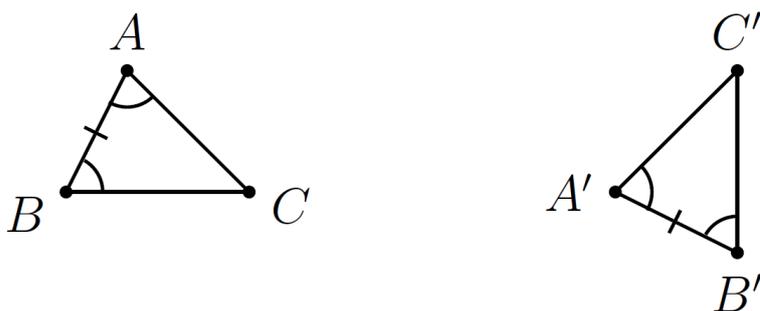
Figura 26 – O caso de congruência LAL



Fonte: OLIVEIRA (2015 apud NETO, 2013)

**Axioma 1.4.2 (Caso de congruência ALA).** *Se dois ângulos de um triângulo e o lado compreendido entre esses dois ângulos forem respectivamente iguais a dois ângulos de outro triângulo e ao lado compreendido entre esses dois ângulos, então os dois triângulos são congruentes.*

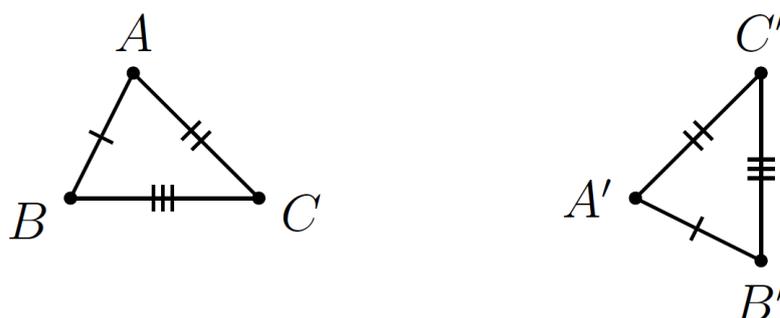
Figura 27 – O caso de congruência ALA



Fonte: OLIVEIRA (2015 apud NETO, 2013)

**Axioma 1.4.3 (Caso de congruência LLL).** *Se os três lados de um triângulo são, em alguma ordem, respectivamente congruentes aos três lados de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.*

Figura 28 – O caso de congruência LLL



Fonte: OLIVEIRA (2015 apud NETO, 2013)

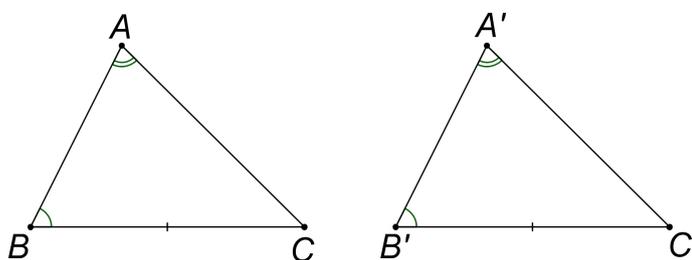
O 4º e último caso de congruência é conhecido como o caso de congruência **LAAo** e será apresentado como Teorema.

**Teorema 1.4.1 (Caso de congruência LAAo).** *Se dois ângulos de um triângulo e o lado oposto a um desses ângulos forem respectivamente congruentes a dois ângulos de outro triângulo e ao lado oposto ao ângulo correspondente nesse outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes. Em símbolos, dados triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , temos:*

$$\overline{BC} = \overline{B'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } \hat{B} = \hat{B}' \implies ABC \equiv A'B'C'$$

com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$ ,  $C \leftrightarrow C'$ . Em particular, também temos  $\hat{C} = \hat{C}'$ ,  $\overline{AC} = \overline{A'C'}$  e  $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ .

Figura 29 – O caso de congruência LAAo

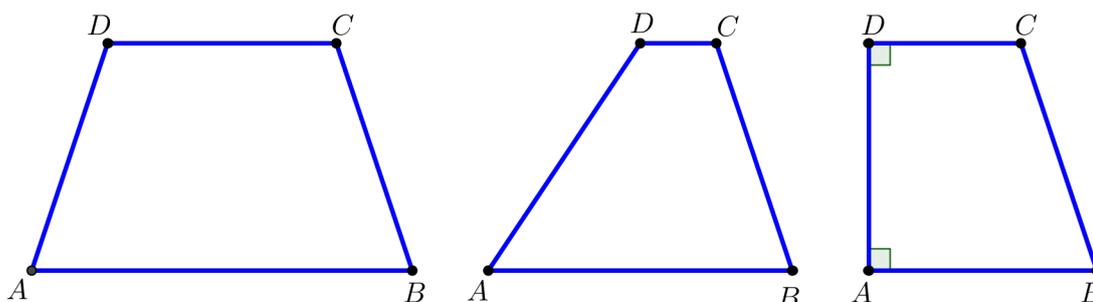


Fonte: OLIVEIRA (2015)

Uma demonstração simples e elegante deste Teorema pode ser encontrada em OLIVEIRA (2015)

**Definição 1.4.3 (Trapézio).** *Trapézio é um quadrilátero tal que dois lados opostos são paralelos, podendo ou não terem a mesma medida. É **isósceles** se os lados não-paralelos tiverem o mesmo comprimento; **Escaleno**, se os lados não-paralelos não têm a mesma medida; **Retângulo**, se possui dois ângulos retos (Figura 30).*

Figura 30 – Trapézio  $ABCD$  isósceles (esq.), escaleno (centro), retângulo (dir.).



Fonte: Autor

#### 1.4.1 Trapézio: Base Média e Mediana de Euler

Convenciona-se que o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio é a **base média** do mesmo, ao passo que o segmento que une os pontos médios das diagonais de um trapézio é sua **mediana de Euler**<sup>1</sup>. Uma demonstração da proposição a seguir utiliza congruência de triângulos e pode ser encontrada em NETO (2013, p. 75), na qual nos mostra como calcular os comprimentos de tais segmentos em função dos comprimentos das bases do trapézio.

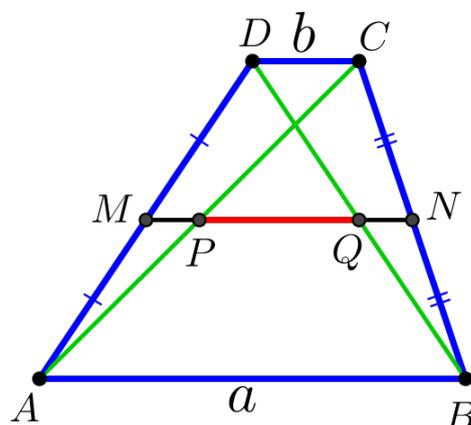
**Proposição 1.4.1 (Base média e mediana de Euler de um trapézio).** *Seja  $ABCD$  um trapézio de bases  $AB$  e  $CD$  e lados não paralelos  $AD$  e  $BC$ . Sejam, ainda,  $M$  e  $N$  os pontos médios dos lados não paralelos  $AD$  e  $BC$ , respectivamente, e  $P$  e  $Q$  os pontos médios das diagonais  $AC$  e  $BD$ , também respectivamente (Figura 31). Então:*

a)  $M, N, P$  e  $Q$  são colineares e  $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ;

b)  $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD})$  e  $\overline{PQ} = \frac{1}{2} | \overline{AB} - \overline{CD} |$ .

<sup>1</sup> Após Leonhard Euler, matemático suíço do século XVIII.

Figura 31 – base média e mediana de Euler de um trapézio



Fonte: Autor

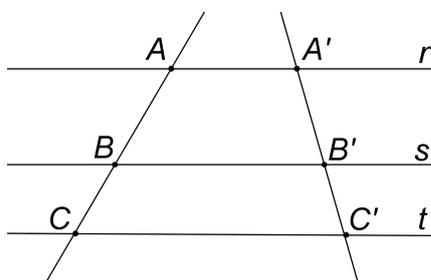
## 1.5 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Nesta seção, estuda-se o conceito de semelhança de triângulos. Antes disso, enunciamos o Teorema de Thales<sup>2</sup> e uma aplicação dele no teorema da bissetriz, cujas demonstrações encontram-se em NETO (2013, p. 138-146).

**Teorema 1.5.1 (Teorema de Thales).** *Sejam  $r$ ,  $s$  e  $t$  retas paralelas. Escolhemos pontos  $A, A' \in r$ ,  $B, B' \in s$  e  $C, C' \in t$ , de modo que  $A, B, C$  e  $A', B', C'$  sejam dois ternos de pontos colineares. Então*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$

Figura 32 – Teorema de Thales



Fonte: OLIVEIRA (2015)

**Teorema 1.5.2 (Teorema da bissetriz).** *Seja  $ABC$  um triângulo tal que  $\overline{AB} \neq \overline{AC}$ .*

<sup>2</sup> Thales de Mileto: filósofo, matemático, engenheiro, homem de negócios e astrônomo da Grécia Antiga, o primeiro filósofo ocidental de que se tem notícia.

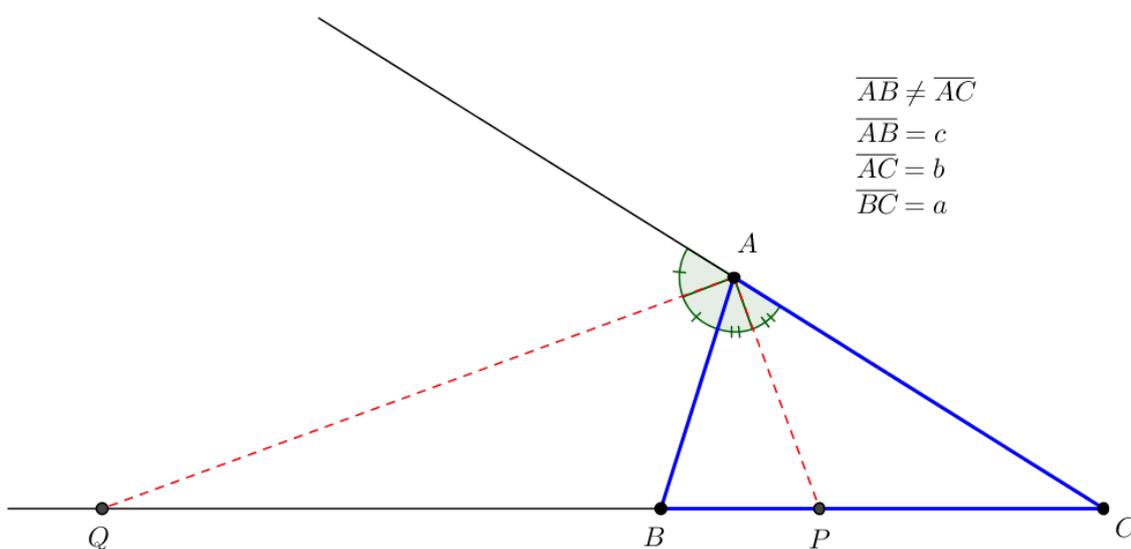
a) Se  $P$  é o pé da bissetriz interna e  $Q$  é o pé da bissetriz externa relativas ao lado  $BC$  (Figura 33), então

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{AC}}.$$

b) Sendo  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ , temos

$$\begin{cases} \overline{BP} = \frac{ac}{b+c} \\ \overline{PC} = \frac{ab}{b+c} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \overline{BQ} = \frac{ac}{|b-c|} \\ \overline{QC} = \frac{ab}{|b-c|} \end{cases}.$$

Figura 33 – O teorema da bissetriz



Fonte: Autor

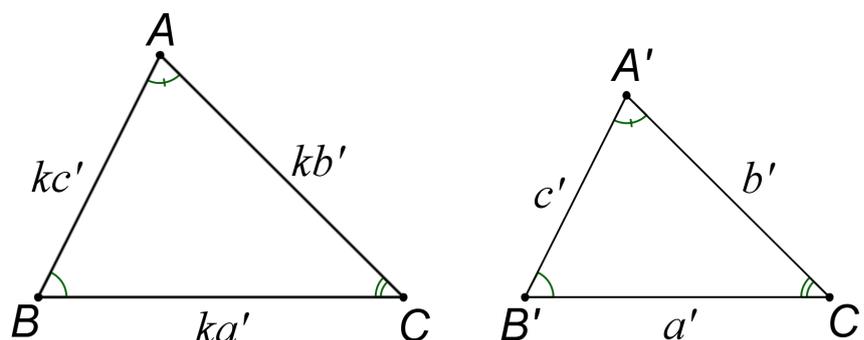
**Definição 1.5.1.** Dizemos que dois triângulos são **semelhantes** quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma.

**Observação 1.5.1.** Escrevemos  $ABC \sim A'B'C'$  para denotar que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, com a correspondência de vértices  $A \leftrightarrow A'$ ,  $B \leftrightarrow B'$  e  $C \leftrightarrow C'$ . Na Figura 34, o número real positivo  $k$  é denominado **razão de semelhança** entre os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , nessa ordem.

Com base na definição (1.5.1), temos que, se os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  são semelhantes, então, valem, simultaneamente as seguintes relações:

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}' \text{ e } \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

Figura 34 – Dois triângulos semelhantes



Fonte: OLIVEIRA (2015)

### 1.5.1 Critérios de Semelhança de Triângulos

Os três critérios de semelhança de triângulos a seguir serão dados por meio de teoremas e serão denotados da seguinte forma: **AA** (ângulo, ângulo), **LAL** (lado, ângulo, lado) e **LLL** (lado, lado, lado) e suas demonstrações podem ser encontrados em OLIVEIRA (2015 apud BARBOSA, 2012, p. 128-131).

**Teorema 1.5.3 (Critério AA).** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\hat{B} = \hat{B}'$ , então, os triângulos são semelhantes.*

**Teorema 1.5.4 (Critério LAL).** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se  $\hat{A} = \hat{A}'$  e  $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ , então, os triângulos são semelhantes.*

**Teorema 1.5.5 (Critério LLL).** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$ , se*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

*então, os triângulos são semelhantes.*

A seguir, anuncia-se o Teorema de Pitágoras. Um resultado importantíssimo da geometria plana que pode ser demonstrado por semelhança de triângulos.

### 1.5.2 Teorema de Pitágoras

**Teorema 1.5.6.** *Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*

*Demonstração.* Por um triângulo  $ABC$  (Figura 35), retângulo em  $A$ , traça-se a altura  $AH$ , de medida  $h$ , e verifica-se que os triângulos  $AHB$  e  $AHC$  são semelhantes ao triângulo  $ABC$ .

Como os triângulos  $AHC$  e  $ABC$  são semelhantes, então, pelo Teorema (1.5.3),

$$\frac{\overline{CH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{m}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a \cdot m. \quad (1.1)$$

Da semelhança dos triângulos  $ABC$  e  $AHB$ , temos

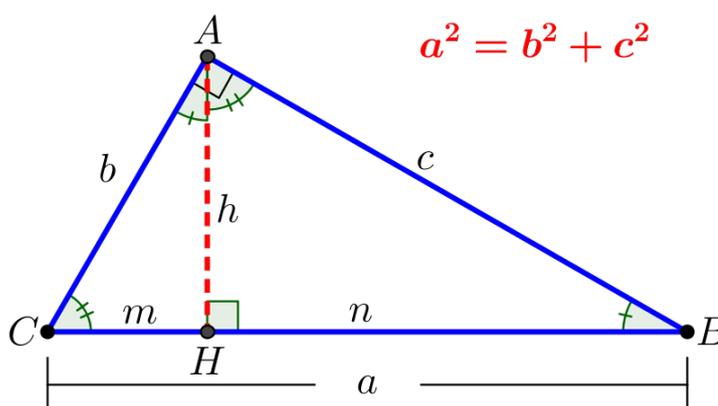
$$\frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{n}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = a \cdot n. \quad (1.2)$$

Somando as equações (1.1) e (1.2), membro a membro, obtemos

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2.$$

□

Figura 35 – Teorema de Pitágoras no triângulo ABC



Fonte: Autor

## 1.6 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

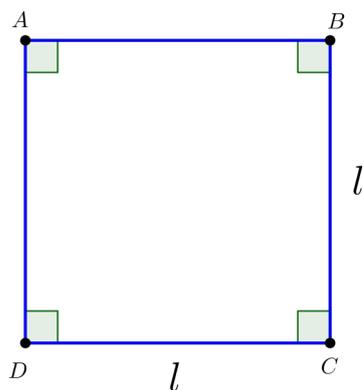
Intuitivamente, a *área* de uma região no plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar o espaço por ela ocupado (NETO, 2013, p. 206).

As demonstrações das seis proposições a seguir podem ser encontradas em NETO (2013, p. 208-210 e 229-238).

### 1.6.1 Quadrado

**Proposição 1.6.1 (Área de um quadrado).** *Um quadrado de lado  $l$  tem área  $l^2$ .*

Figura 36 – Quadrado  $ABCD$  de lado  $l$

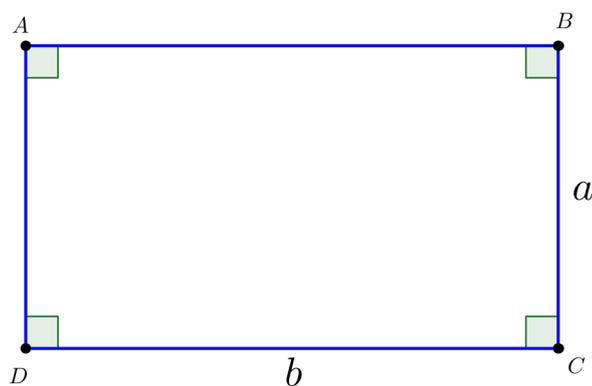


Fonte: Autor

### 1.6.2 Retângulo

**Proposição 1.6.2 (Área de um retângulo).** *Um retângulo de lados  $a$  e  $b$  tem área  $a \cdot b$ .*

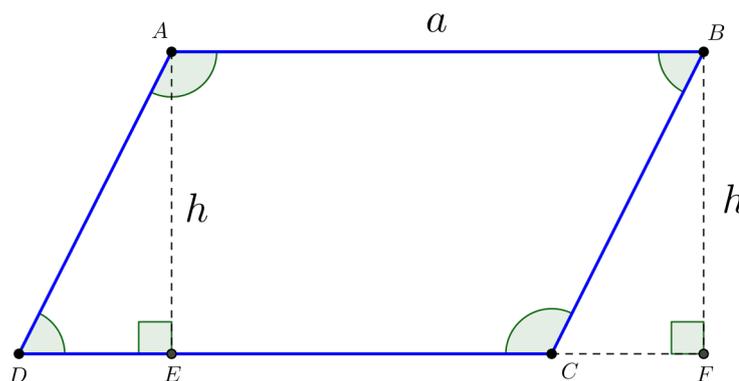
Figura 37 – Retângulo  $ABCD$  de lados  $a$  e  $b$



Fonte: Autor

### 1.6.3 Paralelogramo

**Proposição 1.6.3 (Área de um paralelogramo).** *A área de um paralelogramo de base  $a$  e altura  $h$  é igual  $a \cdot h$ .*

Figura 38 – Paralelogramo  $ABCD$  de base  $a$  e altura  $h$ 

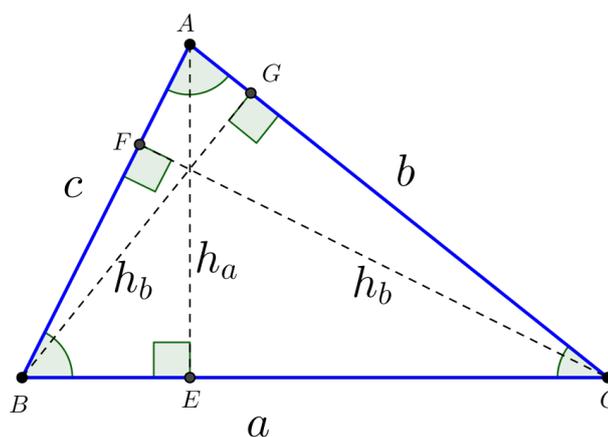
Fonte: Autor

#### 1.6.4 Triângulo

**Proposição 1.6.4 (Área de um triângulo).** *Seja  $ABC$  um triângulo de lados  $\overline{AB} = c$ ,  $\overline{AC} = b$  e  $\overline{BC} = a$ , e alturas  $h_c$ ,  $h_b$  e  $h_a$ , respectivamente relativas aos lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Então,*

$$(ABC) = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

Em particular  $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$ .

Figura 39 – Triângulo  $ABC$ 

Fonte: Autor

#### 1.6.5 Fórmula de Herão

A fórmula de Herão<sup>3</sup> determina a área de um triângulo qualquer em função de seus lados. Dado um triângulo qualquer de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , sua área  $S$  é dada da

<sup>3</sup> Herão de Alexandria foi um sábio matemático e mecânico grego, do começo da era cristã (século I).

seguinte forma:

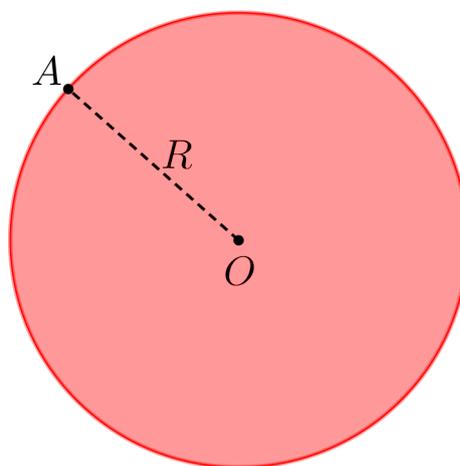
$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

onde  $p = \frac{a + b + c}{2}$  é o **semiperímetro** do triângulo. Uma demonstração dessa bela fórmula pode ser encontrada na revista Eureka<sup>4</sup>.

### 1.6.6 Círculo

**Proposição 1.6.5 (Área de um Círculo).** *A área de um círculo de centro  $O$  e raio  $R$  é  $\pi R^2$ .*

Figura 40 – Área de um círculo de centro  $O$  e raio  $R$



Fonte: Autor

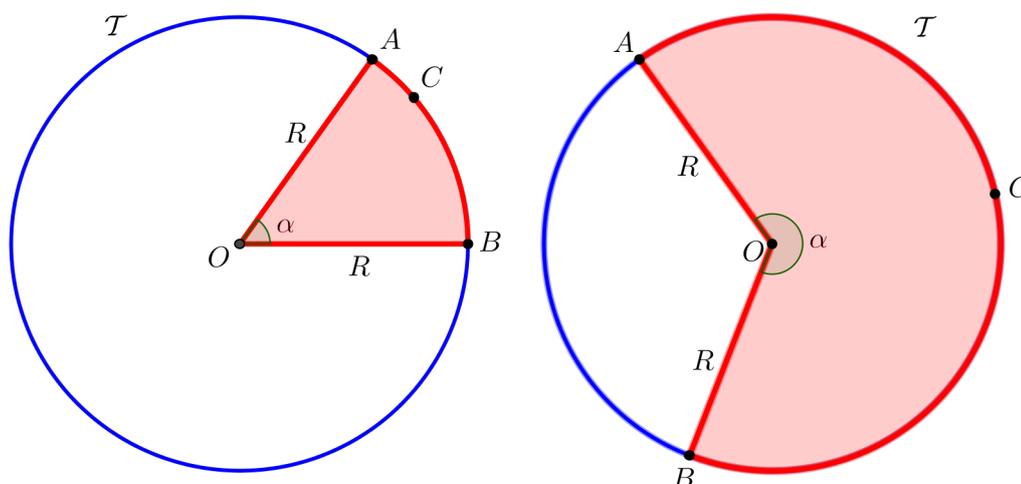
### 1.6.7 Setor circular

**Proposição 1.6.6 (Área de um Setor Circular).** *A área de um setor circular, como os exibidos na definição (1.2.18), Figura 18, é dada por*

$$A(A\hat{O}B) = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2$$

<sup>4</sup> Demonstração disponível em: [http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista\\_eureka/docs/Eureka\\_25.pdf](http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/Eureka_25.pdf), pg. 22 a 25. Acesso em 20/02/2016.

Figura 41 – Área de um setor circular de centro  $O$  e raio  $R$



Fonte: Autor

## 1.7 MOTIVAÇÃO II

Indubitavelmente, o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000b) destacam a importância desse conceito para a Matemática e para outras áreas do conhecimento: “*O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática*” (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO, 2000a, p. 121). Os modelos matemáticos descrevem, em termos matemáticos, um fenômeno ou uma situação que se pretenda representar. Quando se modela algebricamente um fenômeno, através de relações generalizadas, dá-se um passo importante em direção à abstração e a construção de modelos matemáticos. No entanto, para ser possível modelar algebricamente um fenômeno é importante que se conheçam as características de cada tipo de função. Ainda que pese o fato de que o estudo das funções no Ensino Médio seja tratado sem o uso do *cálculo infinitesimal*, são praticamente inesgotáveis as possibilidades de enriquecer as aulas com uma variedade de situações que efetivamente possam ocorrer e que requerem, para serem analisadas eficazmente, o emprego das características e propriedades das funções (OLIVEIRA, 2013).

## 1.8 ALGUMAS FUNÇÕES REAIS

Nesta seção, apresenta-se algumas definições e resultados importantes oriundos de funções reais, mais especificamente as funções afim e quadrática. Na seção posterior são apresentados os gráficos das mesmas.

### 1.8.1 Função

**Definição 1.8.1 (Função).** *Dados os conjuntos  $X, Y$ , não vazios, uma **função**  $f : X \rightarrow Y$  (lê-se "uma função de  $X$  em  $Y$ ") é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um elemento único  $y = f(x) \in Y$ . O conjunto  $X$  chama-se o **domínio** e  $Y$  é o **contradomínio** da função  $f$ . Para cada  $x \in X$ , o elemento  $f(x) \in Y$  chama-se a **imagem** de  $x$  pela função  $f$ , ou o **valor** assumido pela função  $f$  no ponto  $x \in X$ . Escreve-se  $x \mapsto f(x)$  para indicar que  $f$  transforma (ou leva)  $x$  em  $f(x)$ .*

### 1.8.2 Função Afim

**Definição 1.8.2 (A Função Afim).** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se afim quando existem constantes  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que  $f(x) = ax + b$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

### 1.8.3 Função Polinomial

**Definição 1.8.3 (Funções Polinomiais).** *Diz-se que  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **função polinomial** quando existem números  $a_0, a_1, \dots, a_n$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Se  $a_n \neq 0$ , dizemos que  $p$  tem grau  $n$ .

Observe que uma função afim tal que  $a \neq 0$  é uma função **polinomial do 1º grau**.

### 1.8.4 Função Quadrática

**Definição 1.8.4 (Funções Quadráticas).** *Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  chama-se **quadrática** (ou **polinomial do 2º grau**) quando existem números reais  $a, b, c$ , com  $a \neq 0$ , tais que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

### 1.8.5 Transformação da forma geral para canônica

Dada a função quadrática  $f$  definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) podemos transformá-la na forma canônica utilizando completamento de quadrados, como abaixo:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right). \quad (1.3)$$

A equação (1.3) nos sugere que:

$$f(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]. \quad (1.4)$$

Observe que, na equação (1.4),  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  e  $\left( -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$  é constante. Se  $a > 0$ , então o menor valor que  $f$  pode assumir ocorre quando  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$ , isto é, quando  $x = -\frac{b}{2a}$ . Assim, o menor valor de  $f(x) = ax^2 + bx + c$  é  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$ . Se  $a < 0$ , então o maior valor que  $f$  pode assumir também ocorre quando  $\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0$ . Daí, seu valor máximo é  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ , para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ .

### 1.8.6 Zeros da função quadrática

Chama-se zeros da função quadrática  $f$  dada por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , os números reais  $x$  tais que  $f(x) = 0$ , caso existam. Isso significa que, para determinarmos o zeros de uma função quadrática, basta igualarmos a zero a equação em (1.4). Após algumas simplificações chegamos à famosa fórmula resolvente da equação do 2º grau

$$a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0 \Rightarrow \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.5)$$

Para usarmos a fórmula (1.5), é preciso conhecer os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Quando  $\Delta = 0$ , a função  $f$  tem dois zeros reais iguais. Quando  $\Delta > 0$ ,  $f$  tem dois zeros reais distintos. Quando  $\Delta < 0$ ,  $f$  não tem zeros.

## 1.9 MOTIVAÇÃO III

A importância do estudo da Geometria Analítica nos dias atuais se dá pela sua principal característica, o fato de transformar problemas envolvendo figuras geométricas

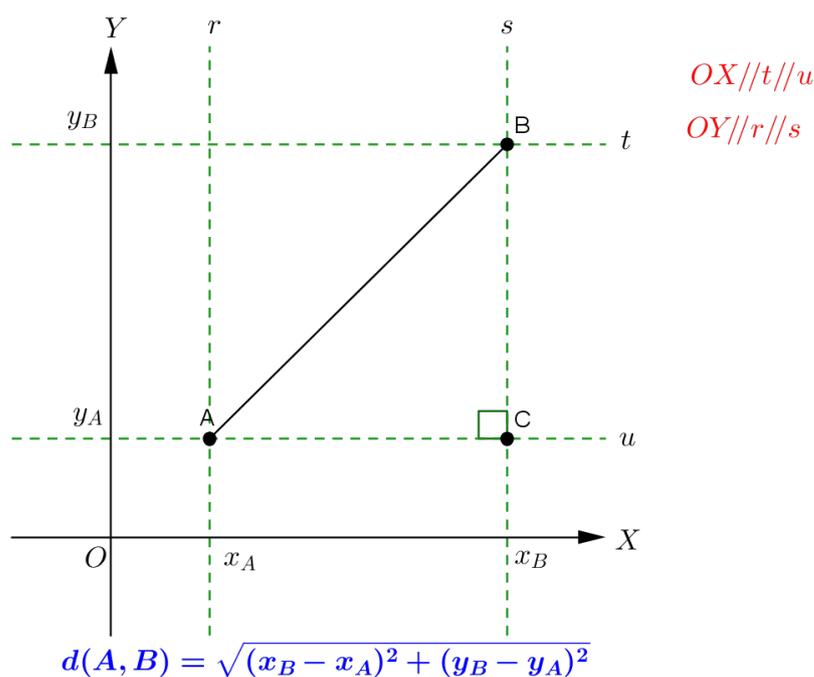
em problemas com equações. Essa característica, além de facilitar o entendimento humano, tornou muito mais fácil a sua aplicação em sistemas de informática, afinal, para um computador não é problema fazer cálculos, basta lhe programar com os algoritmos corretos (OLIVEIRA, 2014).

## 1.10 ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES DA GEOMETRIA ANALÍTICA PLANA

Nesta seção, são apresentadas algumas definições, proposições e resultados importantes oriundos da geometria analítica plana tais como distância entre dois pontos, distância de um ponto a uma reta, parábola, elipse e hipérbole, por exemplo.

### 1.10.1 Distância Entre Dois Pontos

Figura 42 – Distância entre os pontos  $A$  e  $B$



Fonte: Autor

Consideremos num sistema de coordenadas cartesianas  $OXY$  (Figura 42) os pontos  $A = (x_A, y_A)$  e  $B = (x_B, y_B)$ . Por  $B$  traçamos as retas  $s$  e  $t$ , paralelas a  $OY$  e  $OX$ , respectivamente. Por  $A$  traçamos as retas  $u$  e  $r$ , paralelas a  $OX$  e  $OY$ , respectivamente. As retas  $s$  e  $u$  se interceptam no ponto  $C = (x_B, y_A)$  e, dessa maneira, forma-se o triângulo  $ABC$ , retângulo em  $C$ .

Como os pontos  $A$  e  $C$  têm a mesma ordenada  $y_A$  então a distância  $d(A, C)$  entre eles é igual a  $|x_B - x_A|$ . Os pontos  $B$  e  $C$  têm a mesma abscissa  $x_B$  então a

distância  $d(B, C)$  entre eles é igual a  $|y_B - y_A|$ .

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$d(A, B)^2 = d(A, C)^2 + d(B, C)^2.$$

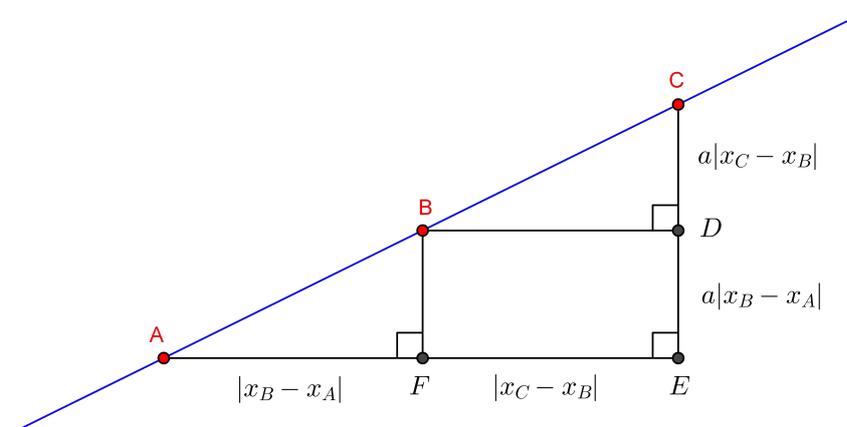
Portanto,

$$d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

### 1.10.2 O Gráfico da Função Afim

Sejam  $A = (x_A, ax_A + b)$ ,  $B = (x_B, ax_B + b)$  e  $C = (x_C, ax_C + b)$  pontos do gráfico da função afim dada por  $y = f(x) = ax + b$  tais que  $x_A < x_B < x_C$ . Em particular, se  $a = 0$  então  $y = b$  é uma reta horizontal, ou seja, é uma reta paralela a  $OX$ . Provemos que o gráfico de  $y = ax + b$ , para  $a \neq 0$ , é uma reta. Em outras palavras, provemos que  $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$ .

Figura 43 – Pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$



Fonte: Autor

**Demonstração.** Suponha, sem perda de generalidade, que  $x_A < x_B < x_C$ . Calculando as três distâncias, temos:

$$d(A, C)^2 = (x_C - x_A)^2 + [a(x_C - x_A)]^2 = (a^2 + 1)(x_C - x_A)^2 \Rightarrow d(A, C) = \sqrt{a^2 + 1}(x_C - x_A)$$

$$d(A, B)^2 = (x_B - x_A)^2 + [a(x_B - x_A)]^2 = (a^2 + 1)(x_B - x_A)^2 \Rightarrow d(A, B) = \sqrt{a^2 + 1}(x_B - x_A)$$

$$d(B, C)^2 = (x_C - x_B)^2 + [a(x_C - x_B)]^2 = (a^2 + 1)(x_C - x_B)^2 \Rightarrow d(B, C) = \sqrt{a^2 + 1}(x_C - x_B).$$

Daí,

$$d(A, C) = \sqrt{a^2 + 1}(x_C - x_A) = \sqrt{a^2 + 1}(x_B - x_A + x_C - x_B) = d(A, B) + d(B, C).$$

□

Uma outra maneira de provar que os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  estão sobre uma mesma reta é observar que os triângulos  $AFB$  e  $BDC$  são semelhantes ao triângulo  $AEC$ . Daí, pelo Teorema (1.5.3),

$$\frac{a|x_B - x_A|}{|x_B - x_A|} = \frac{a|x_C - x_B|}{|x_C - x_B|} = \frac{a|x_C - x_A|}{|x_C - x_A|} = \frac{FB}{FA} = \frac{DC}{DB} = \frac{EC}{EA} = a.$$

Isso significa que a **tangente trigonométrica do ângulo** que a reta  $y = ax + b$  forma com o eixo dos  $x$  é o número  $a$ , chamado de **coeficiente angular** ou **declividade** da reta dada. Quando a reta é vertical não existe coeficiente angular da reta.

Também podemos deduzir que o gráfico de uma equação do tipo  $ax + by + c = 0$  é uma reta. De fato, essa equação equivale a

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

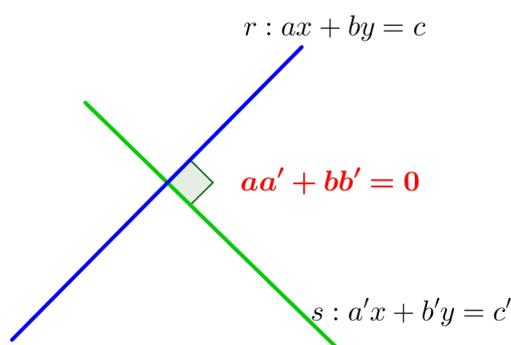
quando  $b \neq 0$  e a  $x = -\frac{c}{a}$  quando  $b = 0$ . Quando  $b = 0$  obtemos uma reta vertical, isto é, uma reta paralela ao eixo dos  $y$ .

A demonstração da proposição a seguir que trata sobre condição de perpendicularidade de duas retas e a demonstração da fórmula de distância de ponto a uma reta podem ser encontradas em LIMA et al. (2006a).

**Proposição 1.10.1 (Perpendicularidade entre duas retas).** *Duas retas  $r : ax + by = c$  e  $s : a'x + b'y = c'$  são perpendiculares se, e somente se,  $aa' + bb' = 0$ .*

Da proposição (1.10.1) concluímos que, se  $m_r$  e  $m_s$  são os coeficientes angulares das retas  $r$  e  $s$ , respectivamente, então  $m_r \cdot m_s = -1$ . Observe que isso só é possível quando as retas  $r$  e  $s$  não são verticais (não são paralelas a  $OY$ ).

Figura 44 – Perpendicularidade entre duas retas



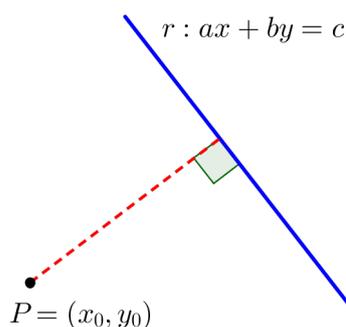
Fonte: Autor

### 1.10.3 Distância de um ponto a uma reta

Dada uma reta  $r : ax + by = c$  e um ponto  $P = (x_0, y_0)$  (Figura 45) em um mesmo plano, a distância do ponto  $P$  à reta  $r$  é expressa pela seguinte fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Figura 45 – Fórmula de distância de ponto à reta



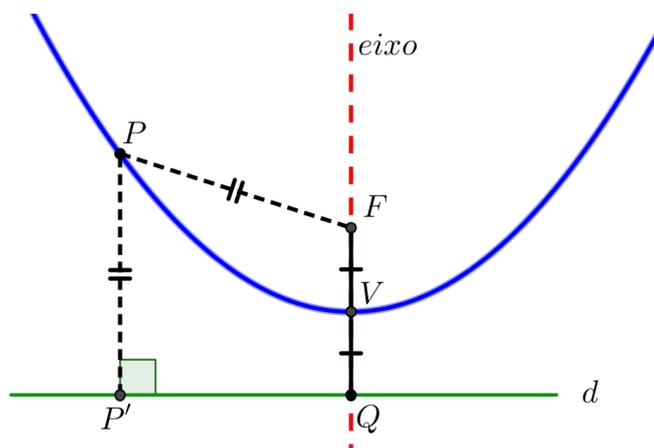
Fonte: Autor

### 1.10.4 Parábola

**Definição 1.10.1 (Parábola).** *Dados um ponto  $F$  e uma reta  $d$  que não o contém, a parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$  é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de  $F$  e de  $d$ .*

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o *eixo* da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o *vértice* dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Figura 46 – Parábola



Fonte: Autor

Consideremos num sistema de coordenadas  $OXY$  as retas  $r : y = k$  e  $s : x = h$ , com  $h, k \in \mathbb{R}$  (fixos). Seja  $p \in \mathbb{R}^*$  (fixo). Vamos exibir a equação da parábola de vértice  $V = (h, k)$ , foco  $F = (h, k + p)$  e diretriz  $d : y = k - p$ .

Se  $P = (x, y)$  é um ponto qualquer da parábola, então  $d(P, F) = d(P, d)$ . Como  $d$  é uma reta paralela a  $OX$ , então

$$d(P, F) = \sqrt{(x - h)^2 + (y - (k + p))^2} = d(P, d) = |y - (k - p)|. \quad (1.6)$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade (1.6), temos

$$(x - h)^2 + (y - (k + p))^2 = (y - (k - p))^2. \quad (1.7)$$

Desenvolvendo os quadrados em (1.7) e após algumas simplificações chegamos a

$$(x - h)^2 = 4p(y - k). \quad (1.8)$$

Note que na equação da parábola em (1.8), se tivermos  $p > 0$  então a parábola tem concavidade voltada para cima e se  $p < 0$  então a parábola tem concavidade voltada para baixo.

De forma análoga, se  $V = (h, k)$ ,  $F = (h + p, k)$  e  $d : x = h - p$ , então a equação da parábola é da forma  $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ . Daí, se  $p > 0$  então a concavidade da parábola é voltada para a direita e se  $p < 0$  então a concavidade é voltada para a esquerda.

Se em (1.8) isolarmos o valor de  $y$ , teremos

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \Rightarrow y = \frac{1}{4p}x^2 - \frac{2h}{4p}x + \frac{h^2 + 4pk}{4p} \Rightarrow y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0). \quad (1.9)$$

De maneira análoga, se em (1.8) isolarmos o valor de  $x$ , teremos

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \Rightarrow x = \frac{1}{4p}y^2 - \frac{2h}{4p}y + \frac{h^2 + 4pk}{4p} \Rightarrow x = a'y^2 + b'y + c' \quad (a' \neq 0). \quad (1.10)$$

As equações (1.9) e (1.10) representam as **equações explícitas** das parábolas com concavidade para cima ou para baixo e com concavidade para a direita ou para a esquerda, respectivamente.

### 1.10.5 O Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola.

*Demonstração.* Escrevendo  $f(x) = y = ax^2 + bx + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$ , chegamos a

$$\left[ x - \left( -\frac{b}{2a} \right) \right]^2 = 4 \cdot \frac{1}{4a} \left[ y - \left( -\frac{\Delta}{4a} \right) \right]. \quad (1.11)$$

Comparando (1.8) e (1.11) constatamos que o gráfico de  $f$  é uma parábola de vértice  $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ , foco  $F = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$  e diretriz  $d : y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$ .

De fato, seja  $P = (x_0, ax_0^2 + bx_0 + c) = \left(x_0, a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right)$  um ponto arbitrário do gráfico  $\lambda$  da função quadrática  $f$ , definida por  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Sejam também, o ponto  $F = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$  e a reta  $d : y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$ . Note que:

a)  $F \notin \lambda$ , pois  $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a} \neq -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}$ ;

b)  $F \notin d$ , pois  $-\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} \neq -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$ ;

c)  $\lambda \cap d = \emptyset$ , pois não existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$ .

Dessa forma,  $\lambda$  será uma parábola se  $d(P, F) = d(P, d) \forall x_0 \in \mathbb{R}$ .

Como  $d$  é uma reta horizontal, então a distância  $d(P, d)$  é igual a

$$\left| a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} - \left(-\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}\right) \right| = \left| a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a} \right|.$$

A distância entre os pontos  $P$  e  $F$  é dada por

$$d(P, F) = \sqrt{\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left[ a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} + \frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} \right]^2}. \quad (1.12)$$

A equação (1.12) pode ser escrita da forma

$$d(P, F) = \sqrt{\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left[ a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} \right]^2}.$$

Como  $\left[ a\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} \right]^2 = a^2\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{16a^2}$ , então

$$d(P, F) = \sqrt{\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + a^2\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{16a^2}}. \quad (1.13)$$

Unindo os termos semelhantes em (1.13), temos

$$d(P, F) = \sqrt{a^2\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{16a^2}}.$$

Como  $\left[ a \left( x_0 + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{4a} \right]^2 = a^2 \left( x_0 + \frac{b}{2a} \right)^4 + \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{16a^2}$ , então

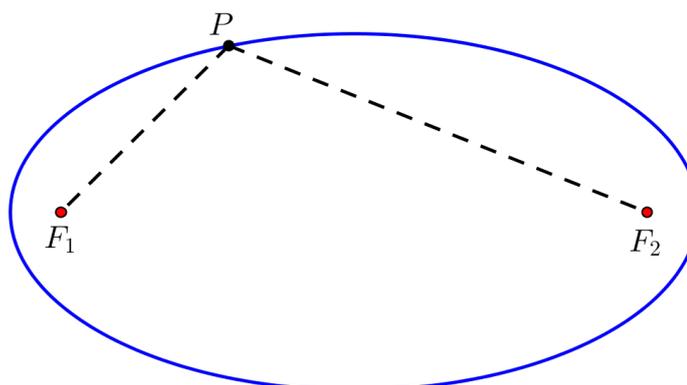
$$d(P, F) = \sqrt{\left[ a \left( x_0 + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{4a} \right]^2} = \left| a \left( x_0 + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{1}{4a} \right| = d(P, d) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}. \quad (1.14)$$

Portanto, de (1.14), o gráfico de  $f$  é uma parábola.  $\square$

### 1.10.6 Elipse

**Definição 1.10.2 (Elipse).** *Elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante. Se considerarmos no plano dois pontos distintos,  $F_1$  e  $F_2$ , tal que a distância  $d(F_1, F_2) = 2c$ , e um número real  $a$  de modo que  $2a > 2c$  e  $2a$  seja a constante da definição, então um ponto  $P$  do plano pertencerá à elipse (Figura 47) se, e somente se,  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ .*

Figura 47 – Elipse



Fonte: Autor

#### 1.10.6.1 Elementos da Elipse

Com base na Figura 48, temos:

1. **Focos:** são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .
2. **Distância focal:** é a distância  $2c$  entre  $F_1$  e  $F_2$ .
3. **Centro:** é o ponto médio  $C$  do segmento  $F_1F_2$ .
4. **Eixo maior:** é o segmento  $A_1A_2$  (que contém  $F_1$  e  $F_2$ ) de comprimento  $2a$ .
5. **Eixo menor:** é o segmento  $B_1B_2$  (de comprimento  $2b$ ), perpendicular a  $A_1A_2$  no seu ponto médio  $C$ .

6. **Vértices:** são os pontos  $A_1, A_2, B_1$  e  $B_2$ .

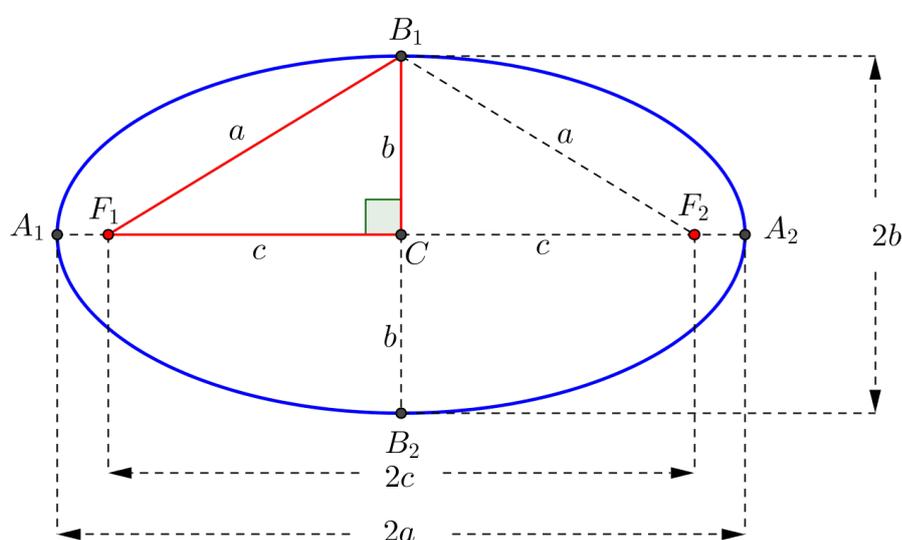
7. **Excentricidade da elipse:** é o número real  $e = \frac{c}{a}$  ( $0 < e < 1$ ).

Da Figura 48 e da definição de elipse temos que  $\overline{B_2F_2} = \overline{B_2F_1} = \overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2} = a$ . Além disso, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo  $B_2CF_1$ , temos que

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (1.15)$$

Da equação (1.15) tiramos que  $a > b$  e  $a > c$ .

Figura 48 – Elementos da Elipse



Fonte: Autor

Consideremos em um sistema de coordenadas  $OXY$  as retas  $r : y = k$  e  $s : x = h$ , com  $h, k \in \mathbb{R}$  (fixos). Vamos exibir a equação da elipse de centro  $C = (h, k)$  e focos  $F_1 = (h - c, k)$  e  $F_2 = (h + c, k)$ , isto é, vamos determinar a equação da elipse cujo eixo maior é paralelo ao eixo dos  $x$ .

Se  $P = (x, y)$  é um ponto qualquer dessa elipse, então

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \Rightarrow \sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} + \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2} = 2a. \quad (1.16)$$

Desenvolvendo a equação (1.16), lembrando que  $a^2 - c^2 = b^2$  e, após algumas simplificações, chegamos a

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1. \quad (1.17)$$

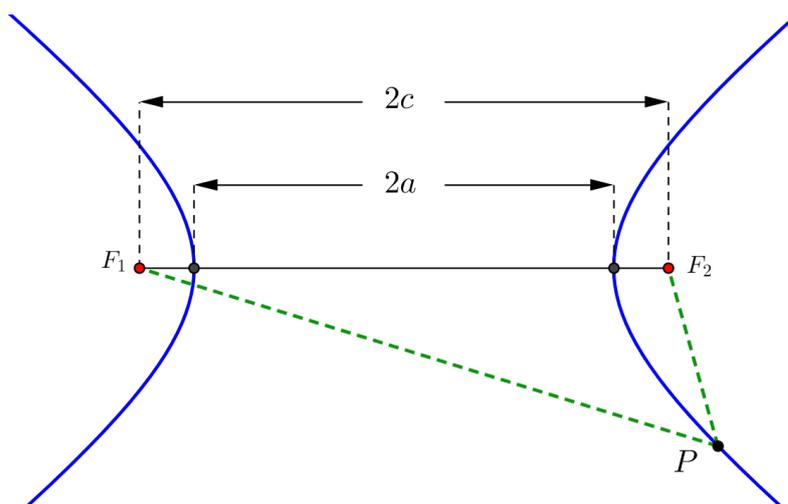
De maneira análoga, a equação da elipse de centro  $C = (h, k)$  e focos  $F_1 = (h, k + c)$  e  $F_2 = (h, k - c)$  (eixo maior paralelo ao eixo dos  $y$ ) é

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1. \quad (1.18)$$

### 1.10.7 Hipérbole

**Definição 1.10.3 (Hipérbole).** *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença das distâncias, em módulo, a dois pontos fixos desse plano é constante. Se considerarmos no plano dois pontos distintos,  $F_1$  e  $F_2$ , tal que a distância  $d(F_1, F_2) = 2c$ , e um número real  $a$  de modo que  $2a < 2c$  e  $2a$  seja a constante da definição, então um ponto  $P$  do plano pertencerá à hipérbole (Figura 49) se, e somente se,  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ .*

Figura 49 – Hipérbole



Fonte: Autor

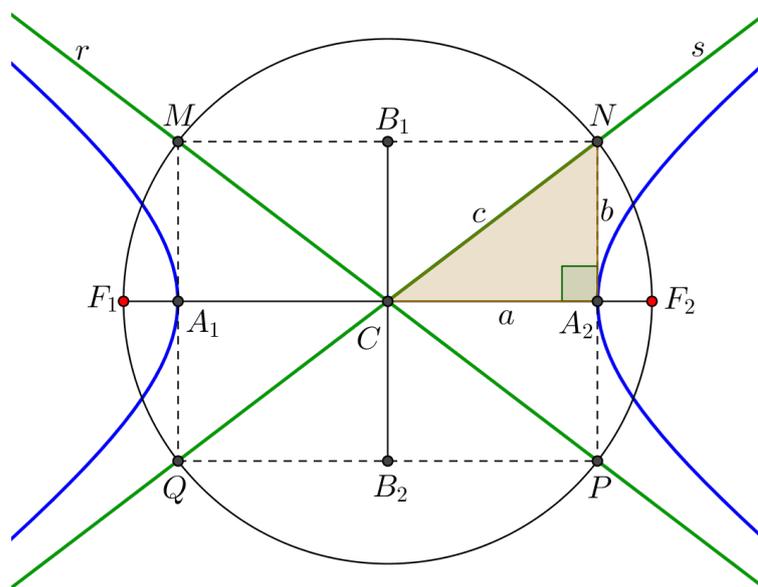
Como  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Leftrightarrow d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$ , então a hipérbole é uma curva com dois ramos, como mostrado na Figura 49.

Considere no plano dois pontos quaisquer  $F_1$  e  $F_2$  de tal modo que  $d(F_1, F_2) = 2c$ . Sendo  $C$  o ponto médio do segmento  $F_1F_2$ , tracemos uma circunferência de centro  $C$  e raio  $c$ .

Tomemos um valor arbitrário  $a$ ,  $a < c$ , e marquemos sobre o segmento  $F_1F_2$ , a partir de  $C$ , os pontos  $A_1$  e  $A_2$  tais que  $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$ . Por estes pontos iremos traçar cordas perpendiculares ao diâmetro  $F_1F_2$ . Observe que as quatro extremidades destas cordas são os vértices de um retângulo  $MNPQ$  inscrito nesta circunferência. Agora, tracemos as retas  $r$  e  $s$  que contêm as diagonais do retângulo  $MNPQ$  e, para

finalizar, a hipérbole conforme a Figura 50. Com base nesta figura temos os elementos da hipérbole.

Figura 50 – Elementos da hipérbole



Fonte: Autor

#### 1.10.7.1 Elementos da Hipérbole

1. **Focos:** são os pontos  $F_1$  e  $F_2$ .
2. **Distância focal:** é a distância  $2c$  entre  $F_1$  e  $F_2$ .
3. **Centro:** é o ponto médio  $C$  do segmento  $F_1F_2$ .
4. **Vértices:** são os pontos  $A_1$  e  $A_2$ .
5. **Eixo real ou transverso:** é o segmento  $A_1A_2$  de comprimento  $2a$ . Observemos que os pontos  $A_1$  e  $A_2$  são pontos da hipérbole porque satisfazem a definição. Para  $A_1$ , tem-se  $d(A_1, F_1) = c - a$ ,  $d(A_1, F_2) = a + c$  e  $|d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = |-2a| = 2a$ .
6. **Eixo imaginário ou não-transverso:** é o segmento  $B_1B_2$  de comprimento  $2b$ , com  $B_1B_2 \perp A_1A_2$  em  $C$ . Observe que o retângulo  $MNPQ$  tem dimensões  $2a$  e  $2b$ , onde  $a$  a medida do semi-eixo real e  $b$  a medida do semi-eixo imaginário. Observe ainda que, do triângulo retângulo  $CA_2M$ , obtemos a relação

$$c^2 = a^2 + b^2$$

de grande aplicação nos problemas de hipérbole.

7. **Assíntotas:** são as retas  $r$  e  $s$ . São retas das quais a hipérbole se aproxima cada vez mais à medida que os pontos se afastam dos vértices.

Chamamos de *excentricidade* da hipérbole o número

$$e = \frac{c}{a}$$

e por ser  $c > a$ , tem-se  $e > 1$ .

Consideremos em um sistema de coordenadas  $OXY$  as retas  $r : y = k$  e  $s : x = h$ , com  $h, k \in \mathbb{R}$  (fixos). Vamos exibir a equação da hipérbole de centro  $C = (h, k)$  e focos  $F_1 = (h - c, k)$  e  $F_2 = (h + c, k)$ , isto é, vamos determinar a equação da hipérbole cujo eixo real é paralelo ao eixo dos  $x$ .

Se  $P = (x, y)$  é um ponto qualquer dessa hipérbole, então

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Rightarrow |\sqrt{(x - h + c)^2 + (y - k)^2} - \sqrt{(x - h - c)^2 + (y - k)^2}| = 2a. \quad (1.19)$$

Desenvolvendo a equação (1.19), lembrando que  $a^2 + b^2 = c^2$  e, após algumas simplificações, chegamos à equação

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1. \quad (1.20)$$

De maneira análoga, a equação da hipérbole de centro  $C = (h, k)$  e focos  $F_1 = (h, k + c)$  e  $F_2 = (h, k - c)$  (eixo real paralelo ao eixo dos  $y$ ) é

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1. \quad (1.21)$$

## 2 SOFTWARE GEOGEBRA: BREVE APRESENTAÇÃO E RECURSOS

No ano de 2001, Markus Hohenwarter criou o GeoGebra e tem liderado o desenvolvimento deste *software* desde então.

Uma descrição dada pelo próprio autor<sup>1</sup> é que o GeoGebra é um *software* gratuito e multiplataforma de matemática dinâmica para todos os níveis de educação que reúne geometria, álgebra, planilhas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único ambiente fácil de usar.

O GeoGebra tem o objetivo de tornar o estudo e a utilização da matemática mais dinâmico e facilitado, de modo que desperte o interesse em buscar conhecimento relacionado a matemática.

Assim, entendemos que a escolha desse *software* para a realização desse trabalho está mais intimamente relacionada com a facilidade de sua interface, onde os comandos básicos são distribuídos ou apresentados em linguagem bastante simples e de fácil entendimento, que pode ser utilizado em diversos níveis de ensino, e também por ser um *software* de distribuição livre. Além disso, esse *software* também está disponível para dispositivos móveis, celulares, tablets e similares que sejam sistemas baseados em Android, Ipad, Iphone, etc. Ele pode ser encontrado utilizando mecanismos de busca ou diretamente pelo endereço: <http://www.geogebra.org>.

### 2.1 FERRAMENTAS BÁSICAS A SEREM UTILIZADAS NESTE TRABALHO

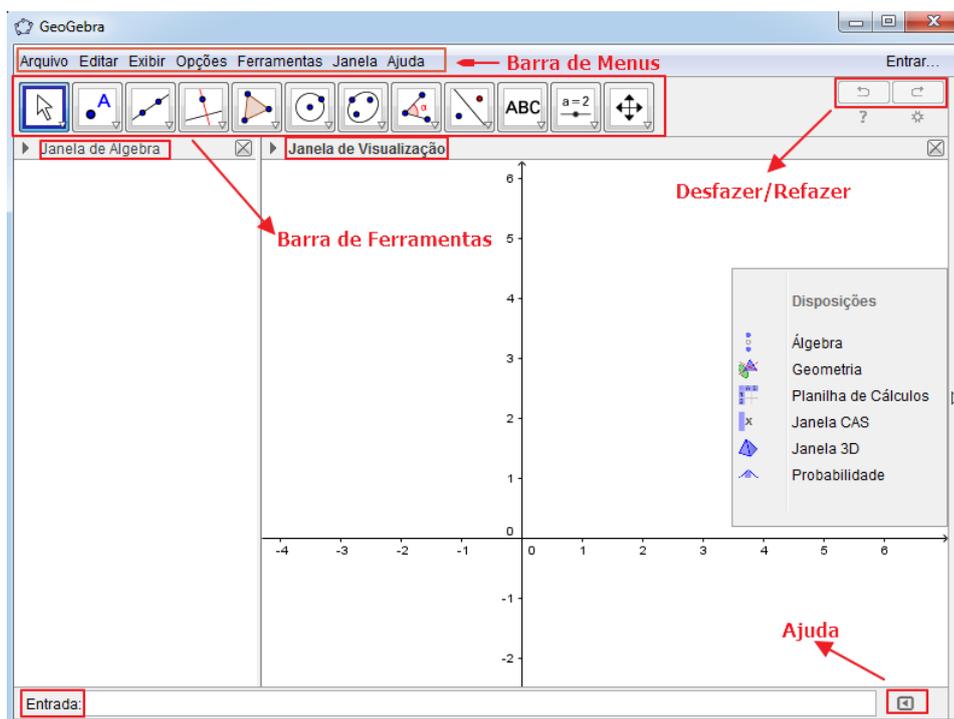
Nesta seção, exibiremos algumas ferramentas básicas do GeoGebra 5.0.181.0-3D para Windows que serão utilizadas neste trabalho. Algumas ferramentas não contidas nesta seção aparecem no capítulo três deste trabalho.

Essas ferramentas permitem que criemos novos objetos usando seus respectivos atributos. Cada uma delas possui seus comandos para construções de objetos mais complexos.

A área de trabalho do Geogebra é composta basicamente por: Barra de Menus, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Entrada (Figura 51).

<sup>1</sup> Disponível em: <https://www.geogebra.org/about>. Acesso em 03/06/16.

Figura 51 – Área de trabalho do GeoGebra



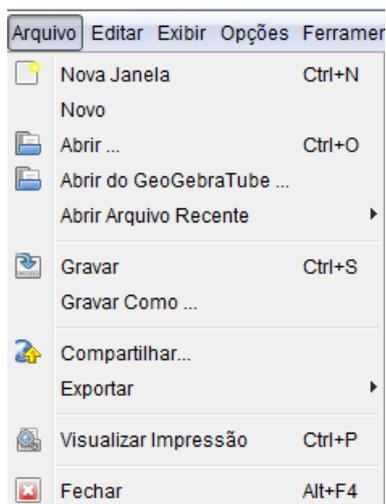
Fonte: Autor

## 2.1.1 Barra de Menus

Na Barra de Menus são disponibilizadas opções de salvar projeto em arquivo (.ggb) e para controlar configurações gerais.

### 2.1.1.1 Menu Arquivo

Figura 52 – Menu Arquivo



Fonte: Autor

No menu **Arquivo**, podemos, por exemplo, abrir nova janela, criar novo arquivo, abrir um arquivo existente, gravar o arquivo atual, exportar arquivo para diversos formatos, visualizar impressão, ver alguns arquivos recentemente abertos.

### 2.1.1.2 Menu Editar

Figura 53 – Menu Editar

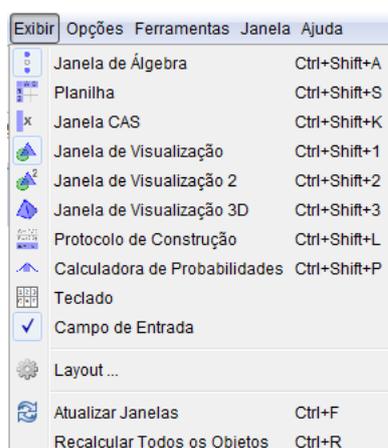


Fonte: Autor

No menu **Editar**, podemos desfazer ou refazer ações, copiar, colar ou apagar objetos, inserir imagem de arquivo ou área de transferência, exibir ou esconder objetos, exibir ou esconder rótulos.

### 2.1.1.3 Menu Exibir

Figura 54 – Menu Exibir



Fonte: Autor

No menu **Exibir**, podemos exibir ou esconder a janela de álgebra (quando ativamos e desativamos essa janela, são exibidos, na Janela de Visualização, as opções , que podem exibir ou esconder eixos ou malhas, por exemplo.); criar uma planilha para realizar diversas construções; exibir a janela CAS (que pode realizar cálculos numéricos e simbólicos, raízes de funções e soluções de equações e sistemas, por exemplo); exibir ou esconder a Janela de Visualização; exibir ou esconder a Janela de Visualização 2; exibir ou esconder a Janela de Visualização 3D; detalhar os objetos construídos sequencialmente através do protocolo de construção; calcular probabilidades e estatística com Calculadora de Probabilidades; teclado; exibir ou esconder Campo de Entrada; *Layout* para alterar exibições de Campo de Entrada, Barra de Ferramentas, por exemplo.

#### 2.1.1.4 Menu Opções

Figura 55 – Menu Opções

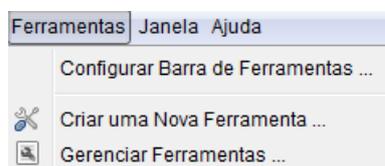


Fonte: Autor

No menu **Opções**, podemos fazer descrições algébricas por valor, definição ou comando; arredondamento até 15 casas decimais; rotular objetos; alterar o tamanho da fonte; alterar as preferências de grau para radianos ou estilo do ângulo reto, por exemplo.

### 2.1.1.5 Menu Ferramentas

Figura 56 – Menu Ferramentas



Fonte: Autor

No menu **Ferramentas**, podemos configurar a Barra de Ferramentas para alterar as posições das ferramentas, inserir ou remover os botões na Barra de Ferramentas, por exemplo; criar uma nova ferramenta através de objetos finais e iniciais e dar nome e ícone a eles; gerenciar ferramentas apagar, alterar nome ou texto de ajuda da ferramenta e, na opção "salvar como", permite salvar o arquivo com as ferramentas criadas de forma definitiva, por exemplo.

### 2.1.1.6 Menu Janela

Figura 57 – Menu Janela

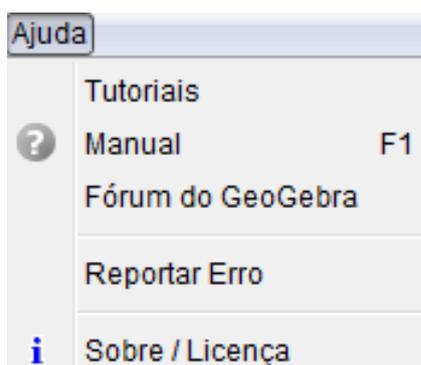


Fonte: Autor

No menu **Janela**, podemos abrir uma nova janela de trabalho.

### 2.1.1.7 Menu Ajuda

Figura 58 – Menu Ajuda



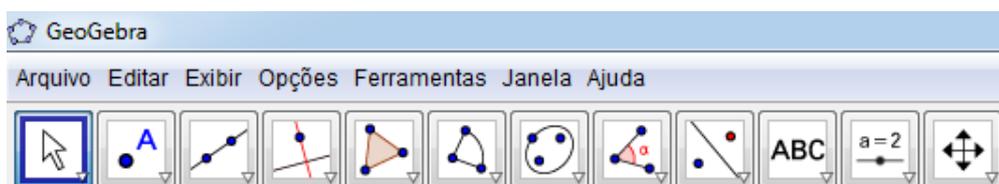
Fonte: Autor

No menu **Ajuda**, podemos, por exemplo, obter tutoriais, manual, participar do fórum do GeoGebra e reportar erro.

### 2.1.2 Barra de Ferramentas

Por padrão, a Barra de Ferramentas está organizada em doze ícones (Figura 59). Nela estão concentradas várias ferramentas que nos permitem construir pontos, retas, segmentos de retas, vetores, figuras geométricas, entre outros.

Figura 59 – 12 ícones da Barra de Ferramentas



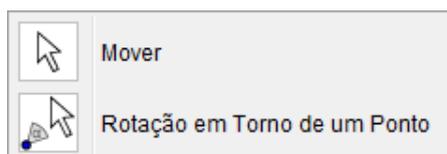
Fonte: Autor

#### 2.1.2.1 Ferramentas de Movimentos

As Ferramentas de Movimentos estão agrupadas no ícone  (o primeiro da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem duas Ferramentas de Movimentos (Figura 60):

Figura 60 – Ferramentas de Movimentos



Fonte: Autor

- **Mover:** "Arraste ou selecione objetos". Permite selecionar, movimentar ou manipular os objetos;
- **Rotação em Torno de um Ponto:** "Selecione primeiro o centro da rotação e, depois, arraste o objeto". Permite rotacionar os objetos em torno de um ponto selecionado.

#### 2.1.2.2 Ferramentas de Pontos

As Ferramentas de Pontos estão agrupadas no ícone  (o segundo da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem seis Ferramentas de Pontos (Figura 61):

Figura 61 – Ferramentas de Pontos



Fonte: Autor

- **Ponto:** "Clique na Janela de Visualização ou sobre um objeto". Aqui podemos criar um ponto em um espaço livre, objeto ou intersecção;
- **Ponto em Objeto:** "Clique no interior de um objeto ou em sua fronteira para criar um ponto". Permite criar um ponto no objeto ou em sua fronteira;
- **Vincular/Desvincular Ponto:** "Clique em um Ponto (e um objeto para vincular)". Permite anexar um ponto a um determinado objeto, clicando em um ponto livre e, depois, sobre o qual desejamos anexar esse ponto. Nesse caso, o ponto se tornará dependente e só moverá dentro do objeto ou em sua fronteira;
- **Interseção de Dois Objetos:** "Selecione dois objetos ou clique diretamente na intersecção". Permite localizar os pontos de intersecção entre dois objetos;
- **Ponto Médio ou Centro:** "Selecione dois pontos, um segmento, um círculo ou uma cônica". Permite criar o ponto médio ou centro entre dois objetos;
- **Número Complexo:** "Clique na Janela de Visualização para criar um número complexo". Permite criar um número complexo, na forma algébrica, na zona gráfica;

### 2.1.2.3 Ferramentas de Linhas Retas

As Ferramentas de Linhas Retas estão agrupadas no ícone  (o terceiro da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem sete Ferramentas de Linhas Retas (Figura 62):

Figura 62 – Ferramentas de Linhas Retas



Fonte: Autor

- **Reta:** "Selecione dois pontos". Permite criar uma reta que passa por dois pontos;
- **Segmento:** "Selecione dois pontos". Permite criar o segmento de reta que liga dois pontos;
- **Segmento com Comprimento Fixo:** "Selecione primeiro um ponto e, depois, digite o comprimento do segmento". Permite criar um segmento de reta definido o seu comprimento;
- **Semirreta:** "Selecione primeiro a origem e, depois, um outro ponto". Permite criar uma semirreta dados dois pontos;
- **Caminho Poligonal:** "Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial". Permite criar um conjunto de segmentos consecutivos;
- **Vetor:** "Selecione primeiro a origem e, depois, a outra extremidade". Permite criar um vetor dados dois pontos;
- **Vetor a Partir de um Ponto:** "Selecione primeiro o ponto de origem e, depois, o vetor". Permite criar um vetor paralelo a outro vetor. Para isso, basta clicar em um vetor e, em seguida, em um ponto.

#### 2.1.2.4 Ferramentas de Posições Relativas

As Ferramentas de Posições Relativas estão agrupadas no ícone  (o quarto da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem oito Ferramentas de Posições Relativas (Figura 63):

Figura 63 – Ferramentas de Posições Relativas



Fonte: Autor

- **Reta Perpendicular:** "Selecione primeiro o ponto e, depois, uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor)". Constrói uma reta perpendicular a uma reta, semirreta, segmento de reta, vetor, eixo ou lado de um polígono;
- **Reta Paralela:** "Selecione primeiro o ponto e, depois, uma reta (ou segmento, ou semirreta, ou vetor)". Constrói uma reta paralela a uma reta, semirreta, segmento de reta, vetor, eixo ou lado de um polígono;
- **Mediatriz:** "Selecione dois pontos ou segmento". Permite construir a reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento;
- **Bissetriz:** "Selecione três pontos ou duas retas". Permite construir a bissetriz de um ângulo;
- **Reta Tangente:** "Selecione primeiro um ponto e, depois, um círculo, uma cônica ou uma função". Permite construir retas tangentes a uma circunferência, cônica ou função, dado um ponto;
- **Reta Polar ou Diametral:** "Selecione primeiro um ponto ou uma reta e, depois, um círculo ou uma reta". Constrói a reta diametral relativa a uma circunferência ou curvas cônicas;
- **Reta de Regressão Linear:** "Selecione pontos usando o retângulo de seleção ou selecione uma lista de pontos". Permite achar a reta que melhor se ajusta a um conjunto de pontos;
- **Lugar Geométrico:** "Selecione o ponto do lugar geométrico e, depois, o ponto sobre o objeto ou o controle deslizante". Constrói automaticamente

o lugar geométrico descrito pelo movimento de um objeto ao longo de uma trajetória.

#### 2.1.2.5 Ferramentas de Polígonos

As Ferramentas de Polígonos estão agrupadas no ícone  (o quinto da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem quatro Ferramentas de Polígonos (Figura 64):

Figura 64 – Ferramentas de Polígonos



Fonte: Autor

- **Polígonos:** "Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial". Permite construir um polígono de N lados;
- **Polígono Regular:** "Selecione primeiro dois pontos e, depois, digite o número de vértices". Permite construir um polígono regular dado um lado e a quantidade de vértices ou lados;
- **Polígono Rígido:** "Selecione todos os vértices, então clique no primeiro vértice novamente (ou apenas clique sobre um Polígono para fazer uma cópia rígida)". Permite construir polígonos não deformáveis, isto é, àqueles cuja forma não é afetada ao movimentar um vértice ou um lado;
- **Polígono Semideformável:** "Selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial". Permite construir um polígono e, para deformá-lo, basta mover qualquer um de seus vértices, exceto o vértice inicial.

#### 2.1.2.6 Ferramentas de Formas Circulares

As Ferramentas de Formas Circulares estão agrupadas no ícone  (o sexto da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem nove Formas Circulares (Figura 65):

Figura 65 – Ferramentas de Formas Circulares



Fonte: Autor

- **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos:** "Selecione o centro e, depois, um ponto do círculo". Cria um círculo a partir de dois pontos;
- **Círculo dados Centro e Raio:** "Selecione o centro e, depois, digite a medida do raio". Cria um círculo dado o centro e raio com comprimento definido;
- **Compasso:** "Selecione um segmento ou dois pontos para definir o raio e, depois, o centro". Permite transportar medidas;
- **Círculo definido por Três Pontos:** "Selecione três pontos do círculo". Cria um círculo dado três pontos;
- **Semicírculo Definido por Dois Pontos:** "Selecione dois pontos". Cria um semicírculo dado dois pontos;
- **Arco Circular:** "Selecione o centro e, depois, dois pontos". Cria um arco circular dado o centro e dois pontos;
- **Arco Circuncircular:** "Selecione três pontos". Cria um arco a partir de três pontos;
- **Setor Circular:** "Selecione o centro e, depois, dois pontos". Cria um setor circular dado o centro e dois pontos;
- **Setor Circuncircular:** "Selecione três pontos". Cria um setor dado três pontos da circunferência.

### 2.1.2.7 Ferramentas de Cônicas

As Ferramentas de Cônicas estão agrupadas no ícone  (o sétimo da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem quatro Ferramentas de Cônicas (Figura 66):

Figura 66 – Ferramentas de Cônicas



Fonte: Autor

- **Elipse:** "Selecione dois focos e, depois, um ponto da elipse". Cria uma elipse dado três pontos, sendo dois focos e um ponto na curva;
- **Hipérbole:** "Selecione dois focos e, depois, um ponto da hipérbole". Cria uma hipérbole dado três pontos, sendo dois focos e um ponto na curva;
- **Parábola:** "Selecione primeiro o foco e, depois, a diretriz". Cria uma parábola dado um ponto e uma reta diretriz;
- **Cônica Por Cinco Pontos:** "Selecione cinco pontos da cônica". Cria uma cônica (parábola, elipse ou hipérbole) dado cinco pontos.

### 2.1.2.8 Ferramentas de Ângulos e Medidas

As Ferramentas de Ângulos e Medidas estão agrupadas no ícone  (o oitavo da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem seis Ferramentas de Ângulos e Medidas (Figura 67):

Figura 67 – Ferramentas de Ângulos e Medidas



Fonte: Autor

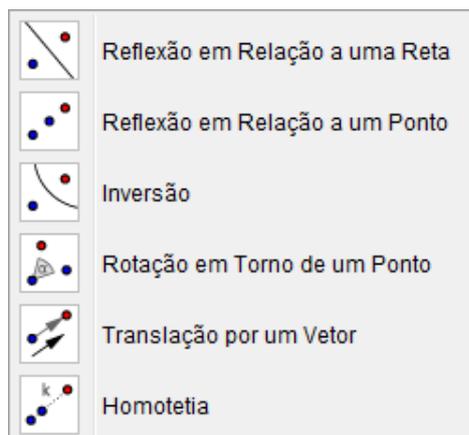
- **Ângulo:** "Selecione três pontos ou duas retas". Permite marcar e medir um ângulo definido por três pontos, sendo que o segundo ponto marcado é o vértice;
- **Ângulo com Amplitude Fixa:** "Selecione um ponto, um vértice e uma amplitude para o ângulo". Constrói um ângulo com amplitude fixa dado dois pontos;
- **Distância, Comprimento ou Perímetro:** "Selecione dois pontos, um segmento, um polígono ou um círculo". Fornece o comprimento de um segmento ou a distância entre dois pontos;
- **Área:** "Selecione um polígono, um círculo ou uma elipse". Fornece a área de uma figura;
- **Inclinação:** "Selecione uma reta (ou semirreta ou segmento)". Fornece a inclinação de uma reta;
- **Lista:** "Selecione células e, então, clique no botão da ferramenta". Cria uma lista ao selecionar células. Elas são mostradas na Janela de Álgebra.

#### 2.1.2.9 Ferramentas de Transformações

As Ferramentas de Transformações estão agrupadas no ícone  (o nono da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem seis Ferramentas de Transformações (Figura 68):

Figura 68 – Ferramentas de Transformações



Fonte: Autor

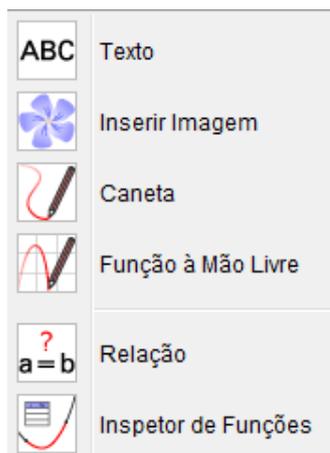
- **Reflexão em Relação a uma Reta:** "Selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão". Cria a simetria axial de um objeto dada uma reta;
- **Reflexão em Relação a um Ponto:** "Selecione primeiro o objeto e, depois, o centro da reflexão". Cria a simetria central de um objeto dado um ponto;
- **Inversão:** "Selecione primeiro o objeto e, depois, o círculo". Cria o reflexo de um ponto sobre uma circunferência;
- **Rotação em Torno de um Ponto:** "Selecione primeiro o objeto, depois o centro e, então, o ângulo de rotação". Cria a simetria rotacional de um objeto ao redor de um ponto, dado um ângulo determinado;
- **Translação por um Vetor:** "Selecione primeiro o objeto a ser transladado e, depois, um vetor". Cria a simetria translacional de um objeto dado um vetor;
- **Homotetia:** "Selecione o objeto, depois o centro e, então, a razão da homotetia". Cria o homotético de um objeto dado um ponto e a razão de semelhança.

#### 2.1.2.10 Ferramentas Especiais

As Ferramentas Especiais estão agrupadas no ícone  (o décimo da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem seis Ferramentas Especiais (Figura 69):

Figura 69 – Ferramentas Especiais



Fonte: Autor

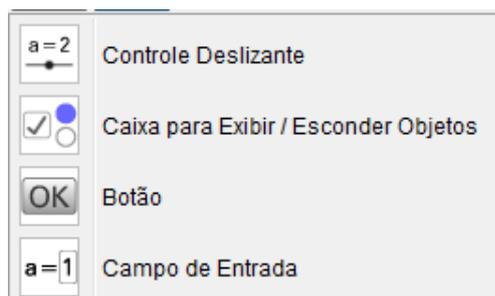
- **Texto:** "Clique na área de trabalho ou em um ponto para criar um texto". Permite inserir um texto na janela de visualização;
- **Inserir Imagem:** "Clique na Janela de Visualização ou em um ponto para ajustar o canto esquerdo inferior da imagem". Permite inserir figuras na janela de visualização;
- **Caneta:** "Escreva na Janela de Visualização. Mude a cor usando a Barra de Estilo". Permite escrever na Janela de Visualização;
- **Função à Mão Livre:** "Desenha uma função ou um objeto geométrico arrastando-se o mouse". Cria uma função ou um objeto geométrico;
- **Relação:** "Selecione dois objetos". Fornece algumas relações dado dois objetos.
- **Inspetor de Funções:** "Selecione uma função". Dada uma função, permite analisar o máximo, mínimo, integral, raízes, média, comprimento, área, etc, dado um intervalo.

#### 2.1.2.11 Ferramentas de Controles

As Ferramentas de Controles estão agrupadas no ícone  (o décimo primeiro da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem quatro Ferramentas de Controles Dinâmicos (Figura 70):

Figura 70 – Ferramentas de Interface Gráfica



Fonte: Autor

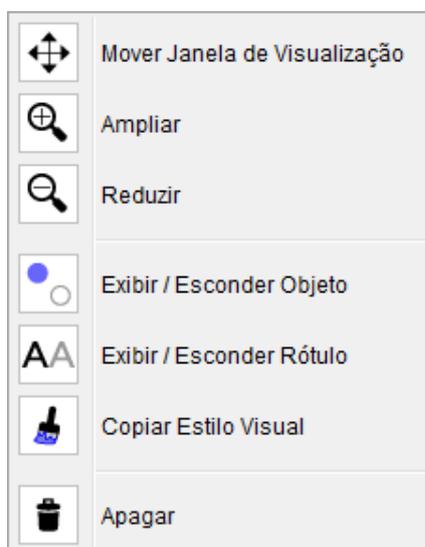
- **Controle Deslizante:** "Clique na Janela de Visualização para especificar a posição do controle deslizante". É um segmento pequeno que possui um ponto deslizando sobre ele;
- **Caixa para Exibir/Esconder Objetos:** "Clique na área de trabalho para criar uma caixa". Permite escolher quais objetos quer mostrar. Para esconder o objeto, basta desmarcar esta opção;
- **Botão:** "Clique na Janela de Visualização para inserir um botão". Permite criar botão na Janela de visualização utilizando o Código do Geogebra;
- **Campo de Entrada:** "Clique na Janela de Visualização para inserir um campo de texto". Permite inserir um campo de texto, criando-se uma Legenda e vinculando-se a um objeto.

#### 2.1.2.12 Ferramentas de Exibições

As Ferramentas de Exibições estão agrupadas no ícone  (o décimo segundo da esquerda para a direita na barra de ferramentas).

Atualmente, existem sete Ferramentas de Exibições (Figura 71):

Figura 71 – Ferramentas Gerais



Fonte: Autor

- **Mover Janela de Visualização:** "Arraste a janela de visualização ou um eixo (Shift+Arrastar)". Permite mover os eixos e os objetos nele contidos;
- **Ampliar:** "Clique na área de trabalho para ampliá-la (Roda do Mouse)". Permite ampliar as figuras que estão na janela de visualização;
- **Reduzir:** "Clique na área de trabalho para reduzi-la (Roda do Mouse)". Permite reduzir as figuras que estão na janela de visualização;
- **Exibir/Esconder Objeto:** "Selecione os objetos e, em seguida, ative uma outra ferramenta". Permite esconder objetos da janela de visualização;
- **Exibir/Esconder Rótulo:** "Selecione o objeto para exibir/esconder o seu rótulo". Permite esconder os rótulos dos objetos;
- **Copiar Estilo Visual:** "Clique no objeto modelo e, em seguida, naquele(s) cujo estilo pretende alterar". Permite copiar um estilo visual de um objeto para outro: pontilhado, cor, tamanho, etc.;
- **Apagar:** "Selecione o objeto para apagá-lo". Permite apagar objetos da janela algébrica ou da janela de visualização.

### 2.1.3 Entrada

Esse campo de entrada é destinado à digitação de comandos. Muitas ferramentas da Barra de Ferramentas podem ser obtidas digitando-se um comando no campo de entrada. E muitas vezes é melhor obter uma construção através de Entrada do que através de ferramentas da Barra de Ferramentas. Por exemplo, podemos obter

um círculo centrado no ponto  $(\sqrt{2}, 1)$  e raio 2 digitando o comando da Figura 51 e pressionando "Enter".

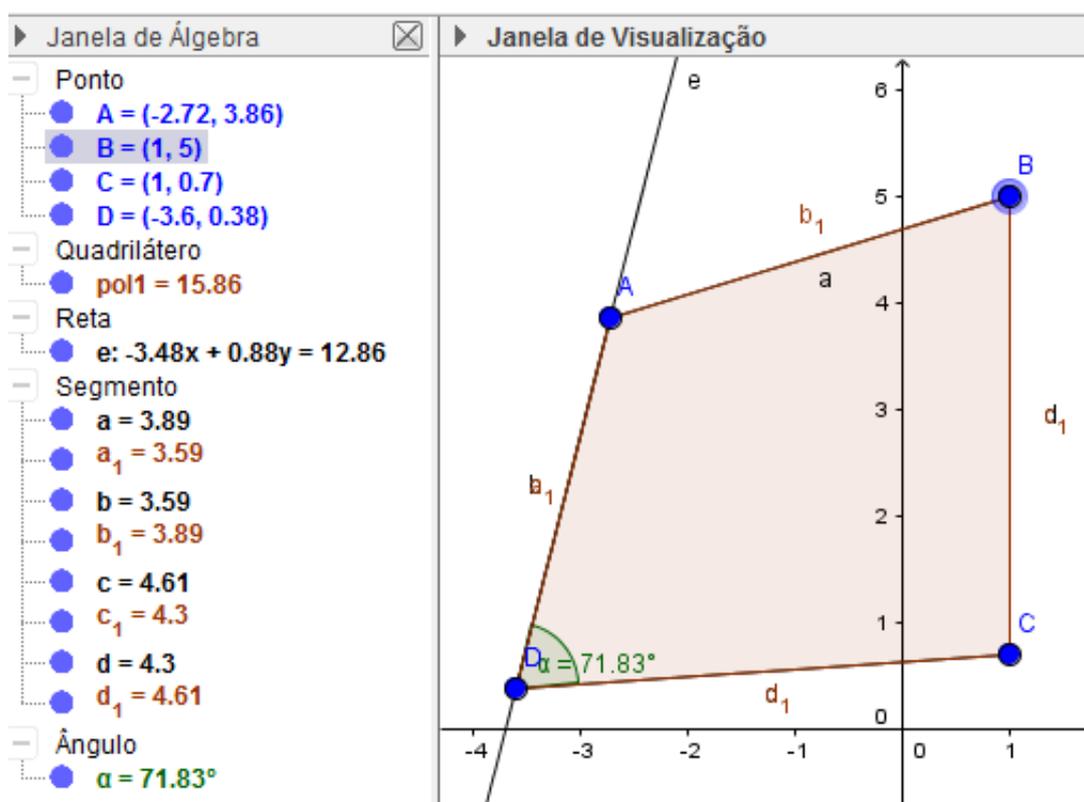
Figura 72 – Entrada: círculo centrado no ponto  $(\sqrt{2}, 1)$  e raio 2



Fonte: Autor

#### 2.1.4 Janela de Álgebra e Janela de Visualização

Figura 73 – Janela de Álgebra e Janela de Visualização



Fonte: Autor

A Janela de Visualização é a área de visualização gráfica daqueles objetos que possuem representação geométrica obtidos por construções a partir das ferramentas da Barra de Ferramentas ou em Entrada, por exemplo. E a Janela de Álgebra é a área

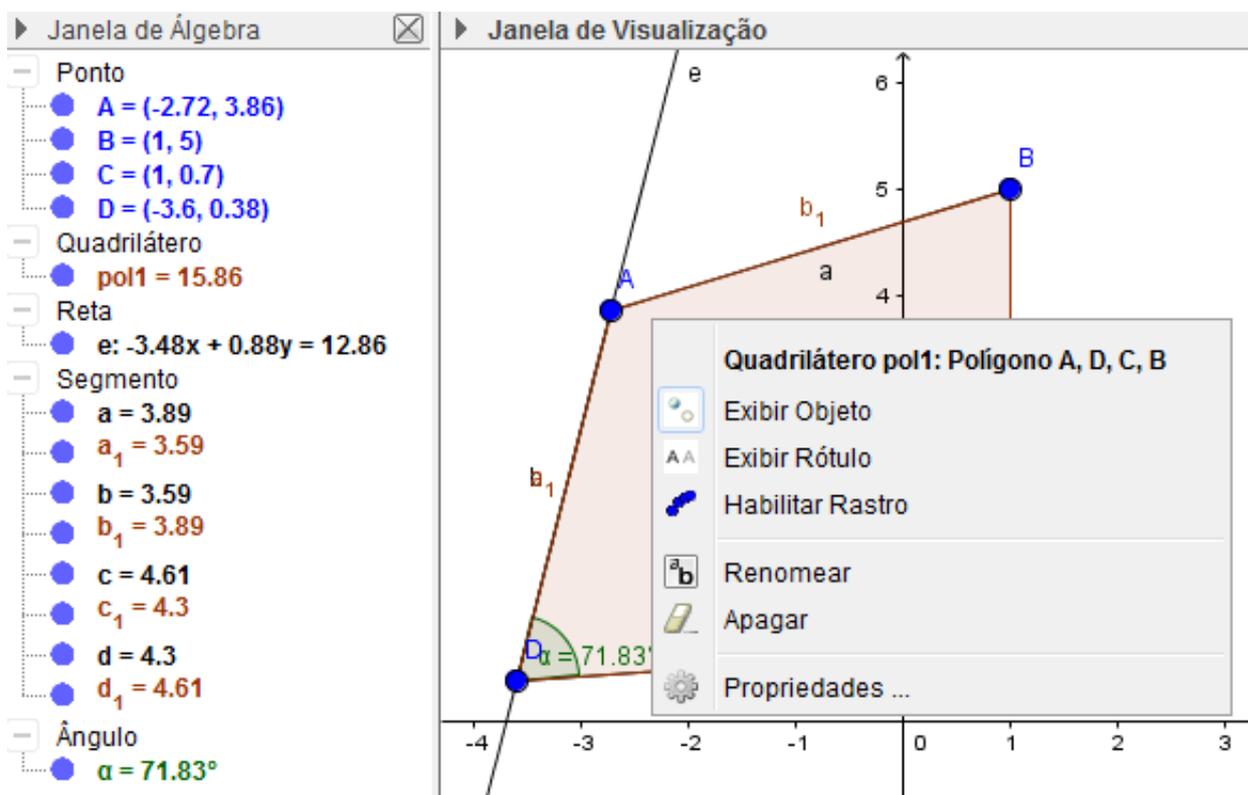
de representação aritmética e algébrica dos objetos da Janela de Visualização. Fala-se muito que o nome GeoGebra é devido à essa associação de geometria e álgebra.

### 2.1.5 Outros Recursos

O GeoGebra também contém alguns recursos que permitem alterar a cor de objetos que são exibidos na Janela de Visualização, espessura da linha, transparência/opacidade predefinidos pelo *software*.

Tomando-se a Figura 73 como exemplo, podemos clicar com o botão direito do mouse sobre o polígono na Janela de Visualização (ou sobre seu nome *pol1* na Janela de Álgebra) e serão exibidas as seguintes opções (Figura 74):

Figura 74 – Outros Recursos

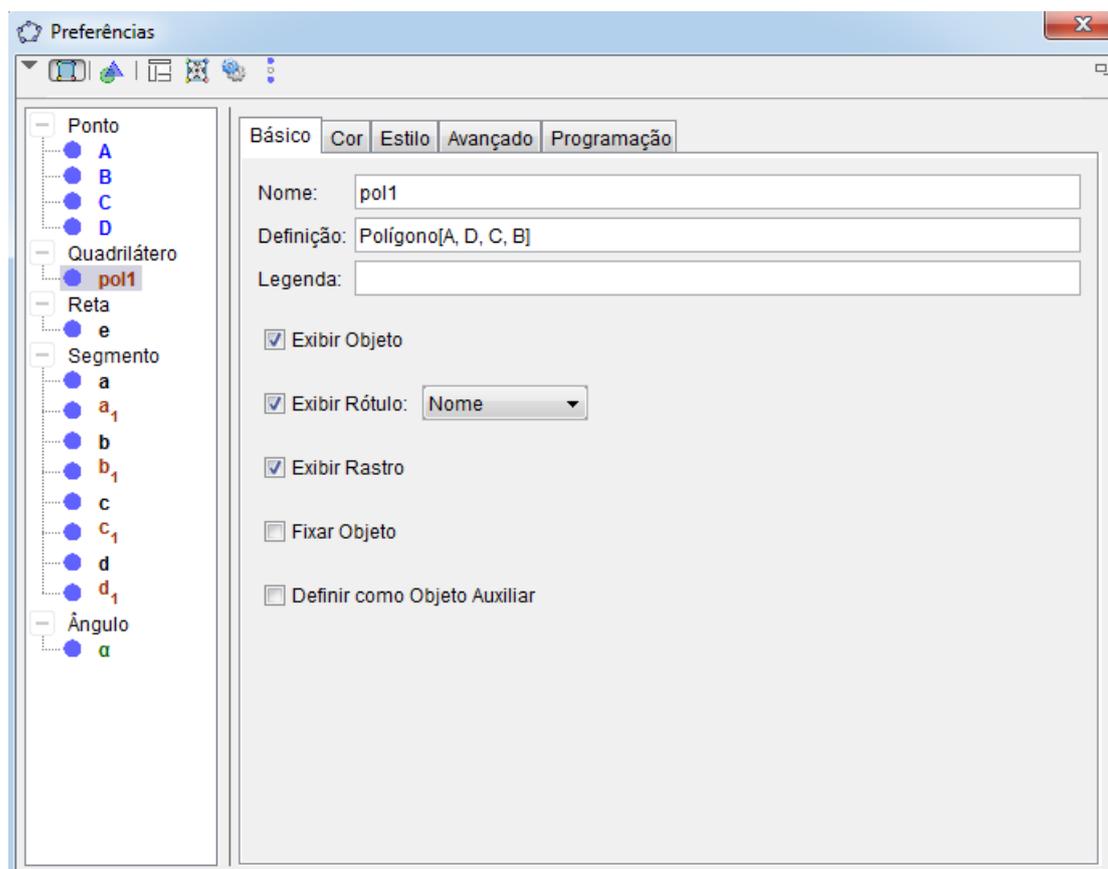


Fonte: Autor

Através das opções dadas na Figura 74, podemos exibir ou esconder o polígono, exibir ou esconder rótulo do polígono, habilitar rastro do polígono, renomeá-lo ou apagá-lo.

Clicando em Propriedades, somos direcionados às seguintes opções de preferência:

Figura 75 – Propriedades: Preferências

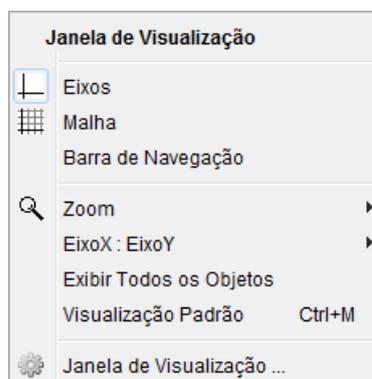


Fonte: Autor

Nas cinco abas exibidas na Figura 75, podemos alterar o nome do polígono, exibí-lo ou não, fixá-lo ou não, definí-lo como objeto auxiliar ou não, alterar sua cor, alterar sua transparência, espessura da linha, opacidade do traço, estilo, preenchimento, definir uma condição de exibição, por exemplo.

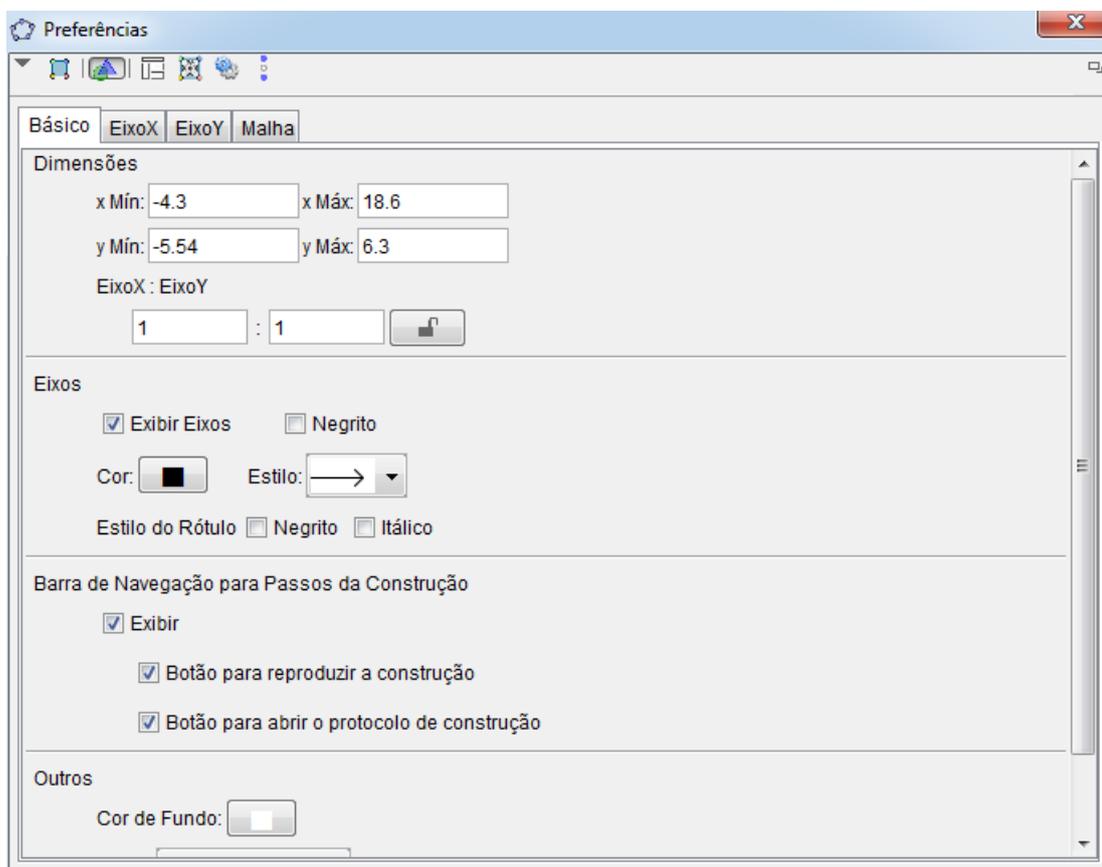
Selecionando-se a ferramenta  Mover e ativando-se a Janela de Visualização, pode-se, ao clicar com o botão direito do mouse, exibir ou ocultar eixos, exibir ou ocultar malha, verificar o passo a passo da construção, dá zoom, alterar as escalas dos eixos x e y, exibir todos os objetos na Janela de Visualização, obter visualização padrão e, além disso, pode-se alterar preferências através de  Janela de Visualização ... tais como dimensões, exibição, cor de eixos, cor de fundo, graduações nos eixos, tipo de malha, estilo de malha, cor, por exemplo (Figuras 76 e 77).

Figura 76 – Botão Direito do Mouse: Janela de Visualização



Fonte: Autor

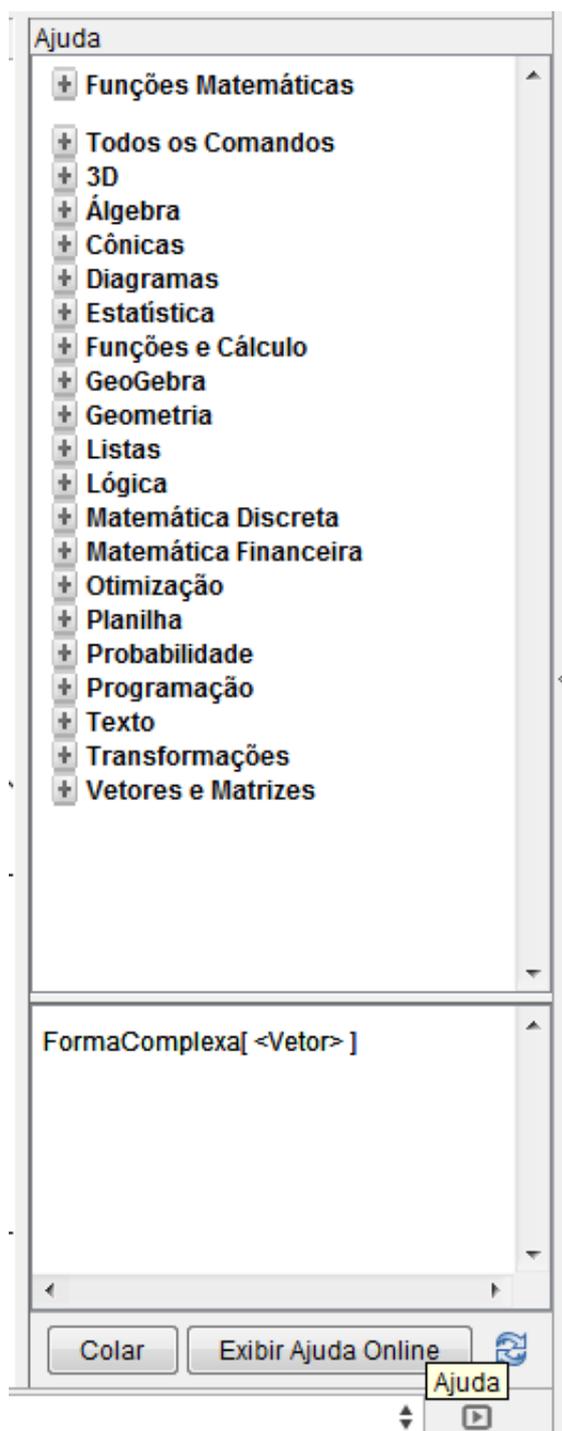
Figura 77 – Janela de Visualização: Preferências



Fonte: Autor

Também contamos com as opções Ajuda (Figura 78) e Desfazer/Refazer na área de trabalho do GeoGebra. A opção de Ajuda nos mostra vários tipos de comandos e como devemos escrevê-los no Campo Entrada. As opções Desfazer  e Refazer  desfaz a última a última operação realizada e refaz algo que desfazemos utilizando a opção Desfazer, respectivamente.

Figura 78 – Ajuda



Fonte: Autor

### **3 TÉCNICAS UTILIZANDO O GEOGEBRA PARA UMA MELHOR COMPREENSÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA GEOMETRIA PLANA DO ENSINO BÁSICO: SITUAÇÕES DE MÁXIMOS E MÍNIMOS E LUGARES GEOMÉTRICOS**

Tendo em vista as dificuldades encontradas com a aprendizagem de muitos alunos do ensino médio no Brasil, OLIVEIRA (2013) nos sugere o seguinte:

O ensino de matemática praticado atualmente sob a perspectiva da formalização matemática tem-se constituído obstáculo de difícil transposição para assimilação de conteúdos. Essa prática pedagógica constitui-se em uma falha grave no ensino, pois atrapalha o amadurecimento do aluno já que inibe o desenvolvimento do principal alicerce do raciocínio matemático: as ideias.

Ensinar matemática não é tarefa fácil. Em particular no Ensino Médio (LIMA, 2003). Percebe-se também que ao final de uma aula ou do ensino de um algum conteúdo, também não é fácil saber o que realmente um aluno aprendeu. É certo que não existe uma receita para um ensino eficaz, porém, podemos aperfeiçoar nosso desempenho docente estendendo nosso repertório de estratégias de ensino, aprendendo com as experiências e reflexões de colegas e, sobretudo, refletindo sobre nossa própria prática, desenvolvendo estratégias de registro e avaliação das aprendizagens dos alunos.

Segundo BORGES (2014), acredita-se que as dificuldades relacionadas com a aprendizagem de alguns conteúdos dados por professores de matemática estejam interligados com a forma de planejamento de suas aulas sem levar em consideração os recursos tecnológicos existentes atualmente. Parecem indiferentes quanto às possibilidades que os ambientes informatizados podem oferecer.

Sabe-se que já existem diversas pesquisas relacionadas ao uso do computador no Ensino de Matemática e tem-se verificado que alunos que utilizam essa ferramenta tecnológica tendem a compreender melhor os conceitos matemáticos e, consequentemente, podem adquirir um nível maior de aprendizagem. É notável que alunos que utilizam essas tecnologias passam a vivenciar experiências mais significativas do que aqueles alunos que utilizam apenas as ferramentas tradicionais. Segundo BORRÕES (1998 apud ALLEVATO, 2005, p.100), o computador "é o instrumento mais poderoso de que actualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar esse tipo de experiências aos seus alunos"(p.1). Nesse sentido, ALLEVATO (2005, p.100) acrescenta que "guardada as devidas proporções, parece inegável que se deva aliar as vantagens decorrentes de suas potencialidades para criar novas alternativas na busca de uma aprendizagem mais efetiva e significativa da Matemática".

Muitos problemas geométricos podem ser modelados com o auxílio de funções reais. Esses problemas ficam mais acessíveis a alunos quando utilizamos a tecnologia a nosso favor. Nesse caso, o *software* GeoGebra apresenta grandes atrativos que nos ajudam a compreender melhor problemas geométricos.

Neste capítulo apresentaremos dez problemas geométricos: Cinco sobre máximos e mínimos, que recaem, em sua maioria, em funções quadráticas, técnica encontrada MENK (2005) e OLIVEIRA (2013), e cinco sobre lugares geométricos, que recaem em cônicas, retas e segmentos de retas, onde ampliaremos o *software* para esta classe de problemas.

### 3.1 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DA GEOMETRIA PLANA

Nesta seção, são apresentados dez problemas geométricos da geometria plana voltados para lugares geométricos e máximos e mínimos direcionados para o ensino básico, cujas soluções encontram-se no Apêndice A deste trabalho.

Muitos alunos apresentam dificuldades na resolução de problemas geométricos, porque têm como obstáculo a construção de figuras que os possibilitem uma melhor compreensão dos mesmos. Essas dificuldades são encontradas em construções estáticas, mas podem ser facilmente eliminadas com meros instrumentos de desenho como transferidor, compasso, reta, etc. A dificuldade maior é mais centrada em construções que exijam movimento de algum objeto.

A seguir faremos algumas construções utilizando ferramentas do *software* GeoGebra no intuito de visualizar ou explorar dinamicamente todos os problemas propostos e, assim, fazer com que alunos possam se sentir motivados a solucionar problemas geométricos com as mesmas características. Além disso, essas construções poderão possibilitar a eles uma melhor compreensão de cada problema e darão possibilidades de fazerem algumas estimativas de resultados e conjecturas. Podemos ressaltar que tais construções podem ser realizadas de várias maneiras por qualquer aluno que tenha habilidades em matemática e no GeoGebra e, também, que os roteiros de desenvolvimento aqui citados não são tomados como únicas possibilidades de realização dos mesmos. Cada pessoa poderá realizar seus passos de construção a fim de visualizar e compreender o problema da melhor forma possível e, através dessas construções, poderá criar novas conjecturas relacionadas à mesma figura do referido problema. Em linhas gerais, significa dizer que, além do aluno tentar solucionar o problema com a ajuda do *software* GeoGebra, poderá fazer novas investigações sobre a mesma figura do problema em busca de mais conjecturas ali contidas e que, a princípio, não foram dados os devidos créditos a elas.

### 3.2 TÉCNICA EMPREGADA NO PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Para cada um dos cinco problemas a seguir, a técnica que será empregada no processo de resolução de problemas de máximos e mínimos será:

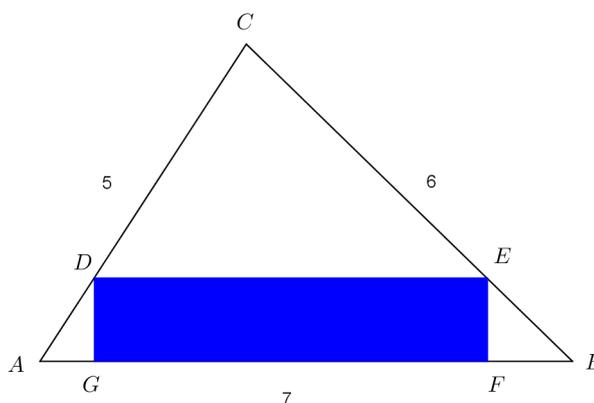
- Construção da figura com auxílio do GeoGebra;
- Visualização dinâmica do problema;
- Conjecturas;
- Apresentação de uma solução do problema, encontrada no Apêndice A deste trabalho.

#### 3.2.1 Problema 1

No primeiro problema, apresentamos um roteiro de desenvolvimento com o objetivo de construir retângulos inscritos num triângulo (fixo) com base sobre um dos seus lados e observar o comportamento de um ponto do plano cujas abscissa e ordenada são medidas da altura e área do mesmo, respectivamente, e também observar o comportamento de outro ponto do mesmo plano cujas abscissa e ordenada são medidas da base e área do mesmo, respectivamente (Figura 79).

**Problema 1:** *Dentre todos os retângulos inscritos no triângulo  $ABC$  com base sobre o lado  $AB$  (Figura 79), determine a altura daquele que tem área máxima. Qual é a área máxima desse retângulo?*

Figura 79 – Retângulo  $DEFG$  inscrito no triângulo  $ABC$



Fonte: Autor

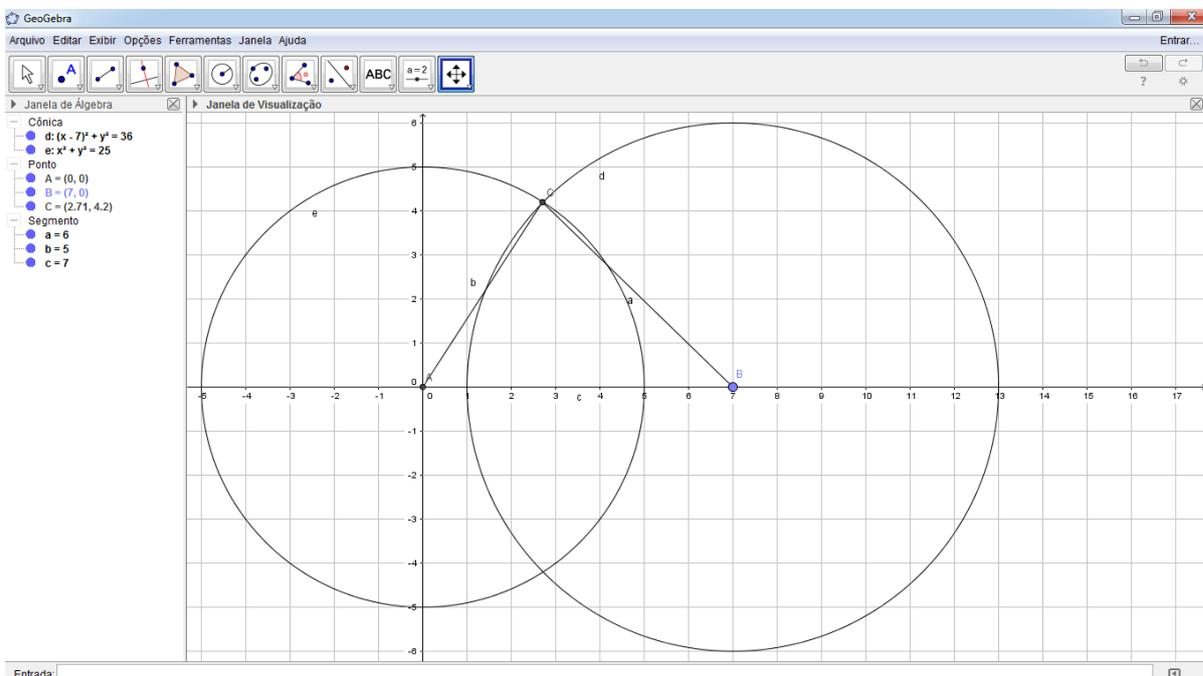
Roteiro de desenvolvimento:

Usando a Barra de Menus, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra e Entrada do GeoGebra, seguiremos as etapas abaixo:

- 1) Clique em  Ponto e marque dois pontos sobre o eixo dos x, de preferência  $A(0, 0)$  e  $B(7, 0)$ . Clique em  Mover e, em seguida, clique com o botão esquerdo do mouse sobre a **Janela de Visualização** e, depois, com o botão direito para ocultar ou ativar "Eixos" ou "Malhas";
- 2) Clique em  Círculo dados Centro e Raio, clique sobre o ponto  $A$ , digite 5 e clique em "ok". Clique sobre o ponto  $B$ , digite 6 e clique em "ok".
- 3) Clique em  Ponto e clique na interseção das circunferências obtidas no item anterior, de preferência no 1º quadrante.
- 4) Clique em  Segmento e clique nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (dois a dois) para formar os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ .

A Figura 80 mostra o que já construímos.

Figura 80 – Construção do triângulo  $ABC$



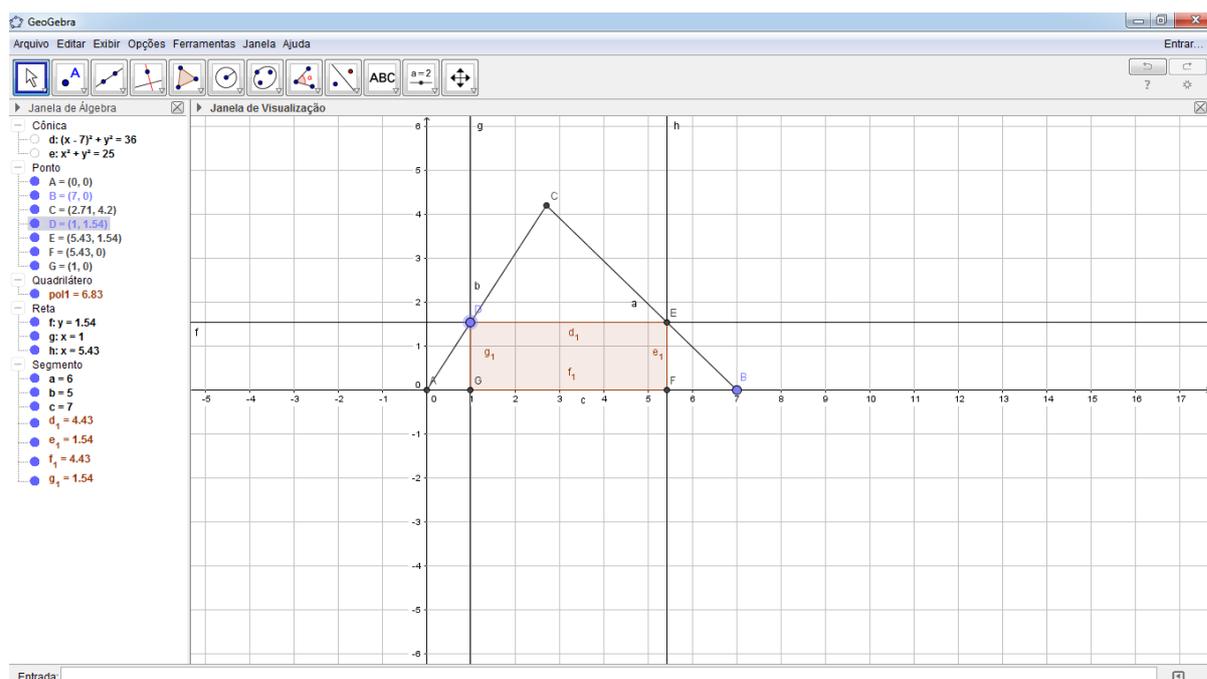
Fonte: Autor

- 5) Na **Janela de Álgebra**, clique em  para ocultar as duas circunferências.

- 6) Clique em  e clique sobre o segmento  $AC$  (gera o ponto  $D$ ). Clique em , clique no ponto  $D$  e no eixo dos  $y$ . Clique em  e marque a interseção da reta obtida com o segmento  $BC$  (gera o ponto  $E$ ).
- 7) Clique em , clique no ponto  $D$  e em seguida no eixo dos  $x$ . Clique no ponto  $E$  e em seguida no eixo dos  $x$ .
- 8) Clique em  e marque os dois pontos do eixo dos  $x$  obtidos com as interseções das retas do item 7) (gera os pontos  $F$  e  $G$ ).
- 9) Clique em  e clique nos pontos  $D, E, F, G$  e  $D$ , nessa ordem, gerando assim o retângulo  $DEFG$ .

A Figura 81 mostra o que já construímos.

Figura 81 – Construção do retângulo  $DEFG$



Fonte: Autor

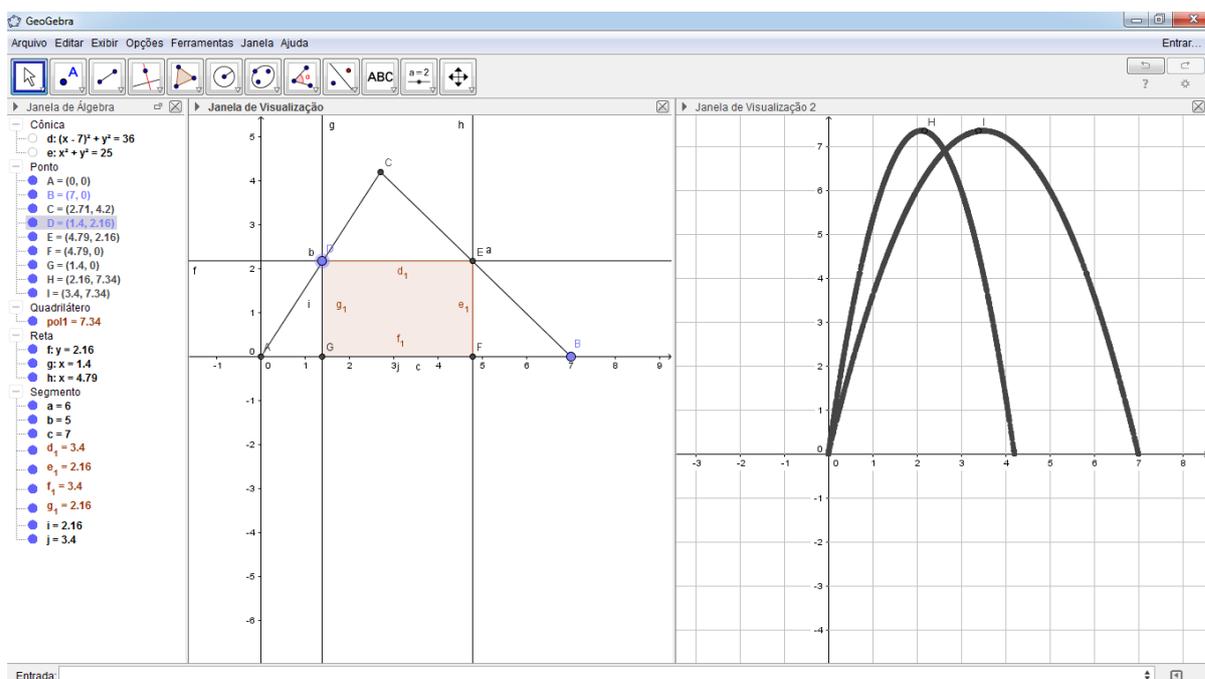
- 10) Observe que, na **Janela de Álgebra**,  $pol1$  é o valor da área do retângulo  $DEFG$ . Clique em  e mova o ponto  $D$  para notar a variação de  $pol1$ .
- 11) Clique em  e clique nos pontos  $D$  e  $G$  formando, assim, o segmento  $DG$ . Clique nos pontos  $F$  e  $G$  formando, assim, o segmento  $FG$ . Observe que, na **Janela de Álgebra**, apareceram os números  $i$  e  $j$  que representam as medidas

da altura e da base do retângulo  $DEFG$ . Mova o ponto  $D$  e observe o que acontece.

- 12) Selecione a opção **Exibir** e clique em  **Janela de Visualização 2** ou aperte seguidamente as teclas "Ctrl+Shift+2". Abrirá uma nova **Janela de Visualização**.
- 13) Clique em  **Mover** e depois na área da **Janela de Visualização 2**.
- 14) Em **Entrada** (parte inferior da tela) digite  $(i, pol1)$  e aperte "Enter" no seu teclado. Digite  $(j, pol1)$  e pressione "Enter" novamente. Esses pontos aparecerão na **Janela de Visualização 2**. Ao mover o ponto  $D$ , os pontos  $(i, pol1)$  e  $(j, pol1)$  descreverão curvas. Ao utilizar o *software* Cabri-Géomètre II, MENK (2005, p. 23) diz que "Se a ferramenta "Rastro" for acionada, o movimento do ponto B na figura permite que se observe, concomitantemente, a trajetória descrita pelo ponto P, no plano cartesiano.". No GeoGebra, para obter um rastro dessas curvas, clique com o botão direito sobre o ponto  $(i, pol1)$  da **Janela de Visualização 2** e clique em "Habilitar Rastro". Repita o procedimento para o ponto  $(j, pol1)$ . Exiba a "Malha" na **Janela de Visualização 2** e, em seguida, mova o ponto  $D$  na **Janela de Visualização**.

A Figura 82 mostra o que já construímos.

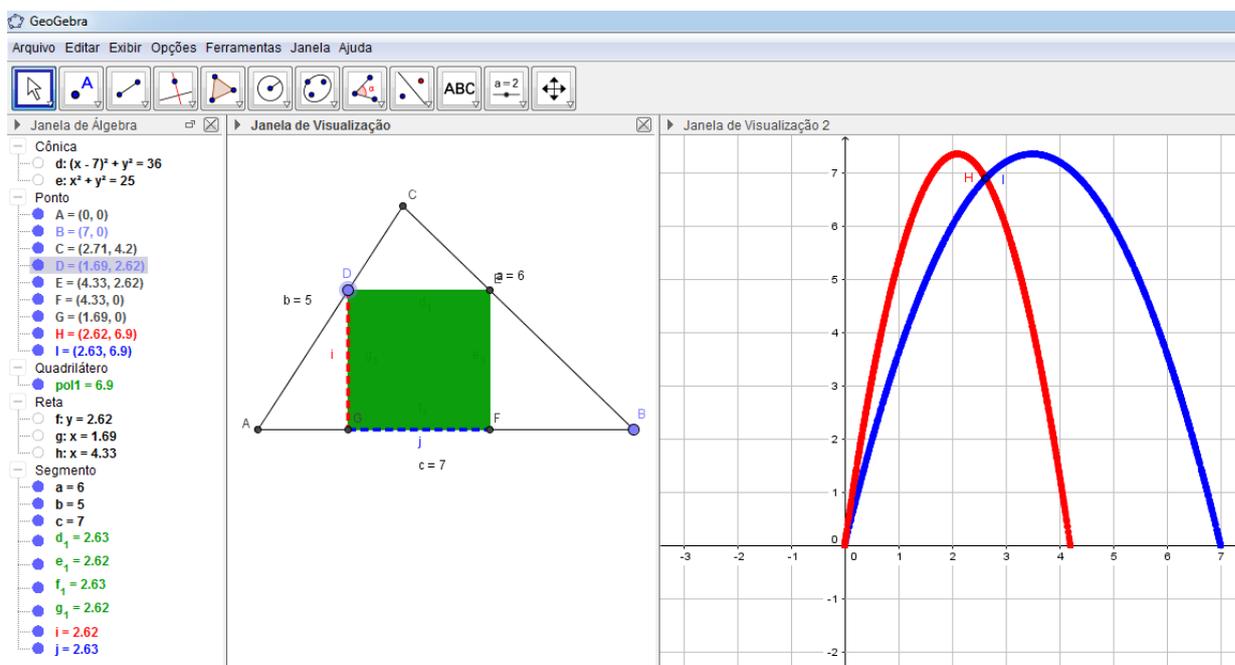
Figura 82 – Comportamento dos pontos  $(i, pol1)$  e  $(j, pol1)$



Fonte: Autor

Podemos ocultar alguns objetos, alterar a fonte e colorí-los utilizando a opção  Propriedades ... e outras ferramentas do GeoGebra para melhorar ou tornar mais divertida a animação obtida . A Figura 83 mostra uma nova forma de visualização.

Figura 83 – Comportamento dos pontos  $(i, pol1)$  e  $(j, pol1)$  com novos efeitos



Fonte: Autor

Além de uma visualização mais dinâmica e atrativa, podemos observar que, ao mover o ponto  $D$  sobre o segmento  $AC$ , algumas conjecturas podem ser criadas:

- Quando a altura  $DG$  do retângulo  $DEFG$  aumenta, sua base  $FG$  diminui e vice-versa;
- Através dos rastros exibidos na **Janela de Visualização 2** temos uma forte impressão de que o retângulo  $DEFG$  tem uma área máxima;
- A medida da altura do retângulo  $DEFG$  pertence ao intervalo  $[0, h]$ , onde  $h = 4,2$  é a medida da altura do triângulo  $ABC$  em relação à base  $AB$ ;
- A medida da base do retângulo  $DEFG$  pertence ao intervalo  $[0, c]$ , onde  $c = 7$  é a medida da base  $AB$  do triângulo  $ABC$ ;
- A medida da área do retângulo  $DEFG$  pertence ao intervalo  $[0, 8]$ ;
- A medida da altura do retângulo  $DEFG$  de área máxima pertence ao intervalo  $[1, 3]$ ;

- g) A medida da área máxima do retângulo  $DEFG$  pertence ao intervalo  $[7, 8]$ ;
- h) A altura  $DG$  do retângulo de área máxima é a igual à metade da altura do triângulo  $ABC$  em relação ao vértice  $C$ ;
- i) A base  $FG$  do retângulo de área máxima é igual à metade da base  $AB$  do triângulo  $ABC$ ;
- j) Dos itens h) e i) conclui-se que a área máxima do retângulo  $ABCD$  é a metade da área do triângulo  $ABC$ . Pode-se também selecionar a ferramenta  e, depois, clicar nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e concluir o mesmo resultado;
- k) O rastro da curva gerada pelo ponto  $H$  ao se mover o ponto  $D$  lembra o lugar geométrico dos pontos  $(i, pol1)$  do plano conhecido como parábola, com concavidade voltada para baixo e, portanto, podendo ser representada por uma função quadrática  $F$  do tipo  $F(i) = a_1i^2 + b_1i + c_1$ , onde  $i$  é a medida da altura do retângulo  $DEFG$  e  $F(i)$  é a medida de sua área;
- l) O rastro da curva gerada pelo ponto  $I$  ao se mover o ponto  $D$  lembra o lugar geométrico dos pontos  $(j, pol1)$  do plano conhecido como parábola, com concavidade voltada para baixo e, portanto, podendo ser representada por uma função quadrática  $G$  do tipo  $G(j) = a_2j^2 + b_2j + c_2$ , onde  $j$  é a medida da base do retângulo  $DEFG$  e  $G(j)$  é a medida de sua área;
- m) Se  $F$  é uma função quadrática, então  $a_1 < 0$  cujas raízes são 0 e 4,2. Se  $G$  é uma função quadrática, então  $a_2 < 0$  cujas raízes são 0 e 7;
- n) O domínio de  $F$  é o intervalo  $[0; 4,2]$ . O domínio de  $G$  é o intervalo  $[0; 7]$ ;
- o)  $F$  é crescente no intervalo  $[0; 2,1]$  e decrescente no intervalo  $[2,1; 4,2]$ .  $G$  é crescente no intervalo  $[0; 3,5]$  e decrescente no intervalo  $[3,5; 7]$ ;
- p) O ponto de interseção dos dois "Rastros" (azul e vermelho) indica que o retângulo obtido naquele ponto é um quadrado de lado aproximadamente 2,62.

As conjecturas citadas acima nos possibilitam uma forte indicação de como podemos proceder para solucionar o problema. Observe que cada passo de construção do roteiro de desenvolvimento do Problema 1 enriquece cada vez mais nossa maneira de entender o problema e de criar novas conjecturas sobre o mesmo.

Pode-se usar muitas ferramentas do GeoGebra no intuito de se aproximar cada vez mais de "verdades" sobre esse problema. Por exemplo, o *software* permite traçar o lugar geométrico dos pontos  $H$  à medida que o ponto  $D$  varie sobre o segmento  $AC$ . No GeoGebra, basta digitar, em **Entrada**, o comando `LugarGeométrico[H, D]` e pressionar "Enter". Feito isso, podemos marcar três pontos, de modo estratégico, sobre o lugar

geométrico obtido (Por exemplo:  $P$ ,  $Q$  e  $R$ ), digitar o comando `RegressãoPolinomial[{P, Q, R}]` e pressionar "Enter". Provavelmente, será exibido na Janela de Visualização 2 o gráfico de uma função polinomial de grau 2 que poderá ser comparado com o lugar geométrico obtido anteriormente e verificar se é ou não uma parábola. Também será exibida na Janela de Álgebra a função do respectivo gráfico. Além disso, o GeoGebra disponibiliza a ferramenta  Inspetor de Funções na qual podemos inserir qual intervalo desejamos analisar e verificar em que valores a função tem máximo ou mínimo, por exemplo. Logo, podemos notar que cada vez mais podemos nos aproximar dos resultados reais do problema. A utilização dessas ferramentas nos permite fazer muitas explorações acerca do problema, porém é estritamente necessária a comprovação matemática de tais análises ou verificações. Como o *software* trabalha com aproximações, podemos ser levados ao erro. Dessa maneira, acreditamos que essas técnicas de construção e visualização dinâmica, utilizando o *software* GeoGebra, poderão contribuir no entendimento desse tipo de problema geométrico e farão com que o aluno perceba, por intuição, que a curva vermelha descrita no "Rastro" (Figura 83) poderá ser uma parábola e que a medida da área do retângulo  $DEFG$  está relacionada à medida da altura do mesmo numa função quadrática. E observando essa curva, via GeoGebra, poderá buscar o resultado real do problema. Por exemplo, o aluno poderá dizer que a área máxima do retângulo  $DEFG$  é aproximadamente 7,35 unidades de área e que isso ocorre quando a altura do retângulo é aproximadamente 2,1 unidades de comprimento. O aluno também poderá conjecturar que as duas funções obtidas apresentam o mesmo valor máximo.

É notório que, quando o aluno constrói uma figura de um dado problema geométrico em um *software* de geometria dinâmica, isso já é um exercício de geometria em si, um exercício que dá a ele a capacidade algorítmica de planejar uma sequência de construções. E algumas vezes esse aluno pode escolher alguns caminhos de construções, sem o recurso de um *software* dinâmico, que o distancia cada vez mais da solução do problema. Porém, utilizando o GeoGebra, por exemplo, poderá utilizar algumas ferramentas de construção que irão direcioná-lo mais rapidamente a buscar uma solução ou demonstração mais simples e elegante do problema. Dessa forma, podemos dizer que o GeoGebra não é só um instrumento de apoio didático que podemos usar em sala de aula, mas também serve de apoio para podermos começar a estudar certos tipos de problemas.

Assim, pensamos que, além de transmitir uma melhor visualização e compreensão desse tipo de problema, essas técnicas poderão despertar um interesse maior do aluno pela busca da solução do mesmo. E depois de finalizar a solução do problema proposto com recursos matemáticos, poderá voltar à figura do mesmo e fazer novas construções ou investigações no intuito de criar novas conjecturas de algo que tenha lhe chamado a atenção durante a construção dessa figura no GeoGebra. Em outras

palavras, o aluno poderá ir além do que lhe é pedido no problema. Um exemplo disso ocorre no item i) que apresenta a conjectura "A altura  $DG$  do retângulo de área máxima é a igual à metade da altura do triângulo  $ABC$  em relação ao vértice  $C$ ", no qual percebemos que não é solicitado no enunciado do problema, mas que poderá ser algo que desperte a curiosidade de saber se isso realmente acontece. E, novamente, poderá confirmar a veracidade das afirmações obtidas através de soluções que envolvam recursos matemáticos sobre cada uma delas.

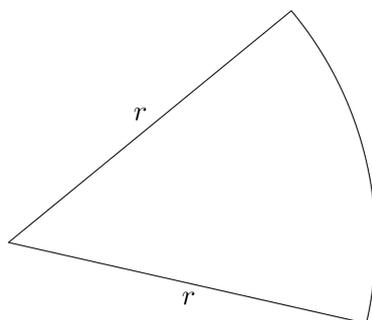
A seguir, apresentaremos o problema 91, Figura 84, retirado da revista Eureka! N° 18, 2003<sup>1</sup>. Iremos observar que as mesmas técnicas utilizadas no problema 1 poderão ser utilizadas nos demais problemas deste trabalho.

### 3.2.2 Problema 2

**Problema 2:** *Um jardineiro deve construir um canteiro com a forma de setor circular. Ele dispõe de 100 metros de fio para cercá-lo.*

Figura:

Figura 84 – Imagem ilustrativa do canteiro com a forma de setor circular



Fonte: Eureka! N° 18, 2003, adaptado

*Qual deve ser o valor do raio do círculo para que o canteiro tenha área máxima?  
Qual é a área máxima?*

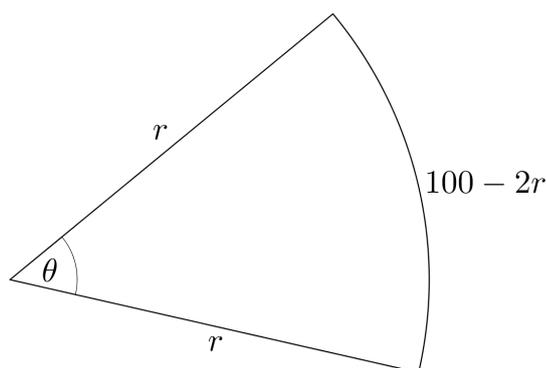
Observe que esse problema exige um pouco mais de ferramentas de matemática para serem associados às ferramentas do GeoGebra. Assim, é necessário fazer alguns cálculos.

Sejam  $r$  e  $\theta$  o raio e o ângulo do setor circular, como na Figura 85. Assim, teremos:

$$100 - 2r \geq 0 \Rightarrow r \leq 50 \quad (3.1)$$

<sup>1</sup> Disponível em: [http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista\\_eureka/docs/eureka18.pdf](http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka18.pdf), pg.58. Acesso em 22/12/15.

Figura 85 – Imagem ilustrativa do setor circular com seus elementos



Fonte: Autor

e

$$2\pi r \geq 100 - 2r \Rightarrow r \geq \frac{50}{1 + \pi}. \quad (3.2)$$

Daí, de (3.1) e (3.2), temos que  $r \in \left[ \frac{50}{1 + \pi}, 50 \right]$ .

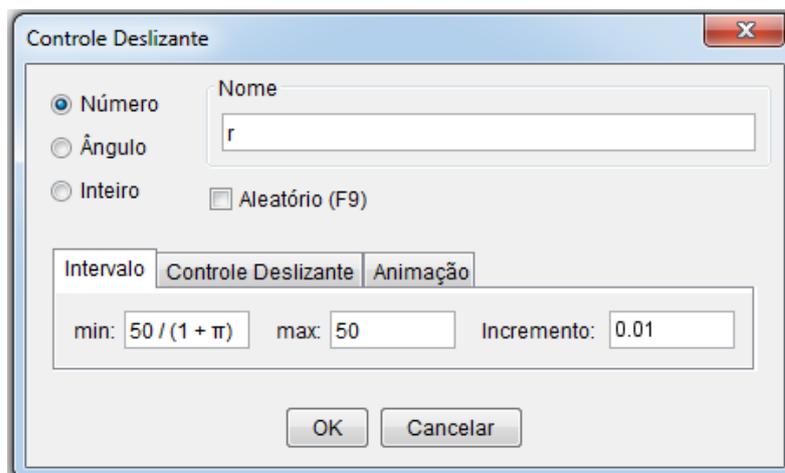
Por regra de três, vem:

$$\frac{100 - 2r}{2\pi r} = \frac{\theta}{360^\circ} \Rightarrow \theta = \frac{(50 - r)}{\pi r} \cdot 360^\circ.$$

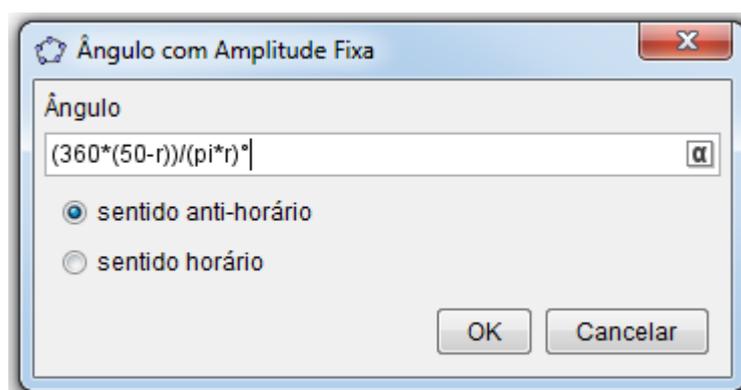
Roteiro de desenvolvimento:

Usando a Barra de Menus, Barra de Ferramentas, Janela de Álgebra e Entrada do GeoGebra, Figura 51, seguiremos as etapas abaixo:

- 1) Clique em  e clique na Janela de Visualização. Digite os dados conforme a Figura 86 e clique em "OK". Na Janela de Visualização aparecerá .
- 2) Em **Entrada** digite  $A = (r, 0)$  e tecla "Enter". Aparecerá um ponto na Janela de Visualização, sobre o eixo dos x. Clique em  e depois mova o controle deslizante para observar o que acontece com o ponto  $A$ .
- 3) Clique em  e em seguida clique várias vezes sobre a Janela de Visualização (de preferência sobre o ponto  $(0, 0)$ ) para que se possa visualizar a variação do ponto  $A$  sobre o eixo dos x.
- 4) Para obter o ângulo  $\frac{(50-r)}{\pi r} \cdot 360^\circ$ , clique em , em seguida sobre o ponto  $A$  e depois sobre o ponto  $(0, 0)$ . Digite os dados conforme a Figura 87 e clique em "OK". Serão exibidos o ângulo de medida  $\alpha$  e o ponto  $A'$ .

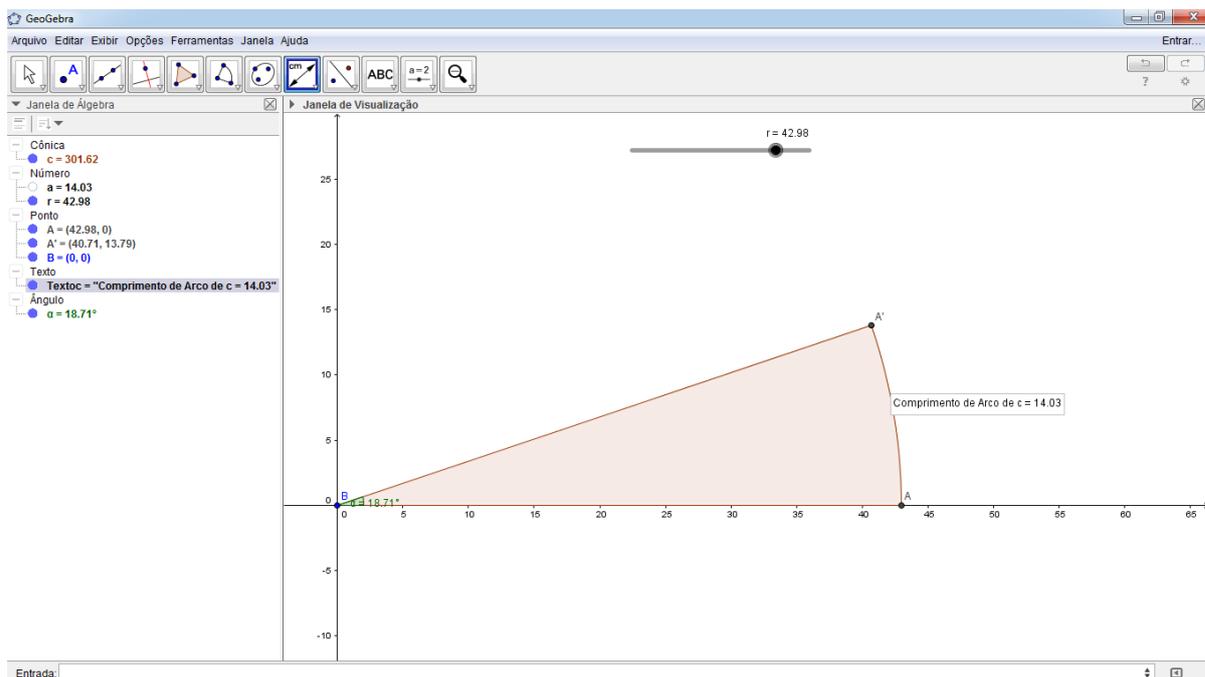
Figura 86 – Dados do controle deslizante sobre  $r$ 

Fonte: Autor

Figura 87 – Ângulo com amplitude fixa em função de  $r$ 

Fonte: Autor

- 5) Clique em  Setor Circular, em seguida sobre o ponto  $(0, 0)$ , depois sobre o ponto  $A$  e, por último, em  $A'$ . Será exibido o número  $c$ , que representa a área do setor circular. Clique em  Distância, Comprimento ou Perímetro, em seguida sobre o arco  $\widehat{AA'}$ . A Figura 88 mostra o que já construímos.
- 6) Observe que, na Janela de Álgebra,  $a$  é o comprimento do arco  $\widehat{AA'}$ ,  $r$  é o raio do setor circular e  $c$  é a área do setor circular. Em **Entrada**, digite  $2 * r + a$  e teclae "Enter". Esse número  $b = 100$  se refere ao perímetro do setor circular. Mova o controle deslizante e observe que  $b$  é constante, como queríamos.
- 7) Selecione a opção **Exibir** e clique em  Janela de Visualização 2 ou aperte seguidamente as teclas "Ctrl+Shift+2". Abrirá uma nova janela de visualização.
- 8) Clique em  Mover e depois na área da "Janela de Visualização 2".

Figura 88 – Ângulo em função de  $r$  no GeoGebra

Fonte: Autor

- 9) Em **Entrada** digite  $(r, c)$  e aperte "Enter". Esse ponto aparecerá na Janela de Visualização 2. Ao mover o controle deslizante, o ponto  $(r, c)$  descreverá uma curva. Para obter um rastro dessa curva, clique com o botão direito sobre o ponto  $(r, c)$  da Janela de Visualização 2 e clique em "Habilitar Rastro". Em seguida, mova o controle deslizante. Também podemos obter o lugar geométrico descrito por essa curva, digitando, em **Entrada**, `LugarGeométrico[r, c]` e, depois, teclando "Enter". A Figura 90 mostra o que construímos.

Ao mover o controle deslizante, algumas conjecturas podem ser criadas:

- Quando o raio  $r$  varia a área  $c$  do setor circular também varia;
- O gráfico exibido na Janela de Visualização 2 mostra que o setor circular tem uma área máxima;
- À medida que  $r$  se aproxima de  $\frac{50}{1+\pi}$ , observa-se que  $c$  se aproxima de 462. E, quando  $r$  é mínimo, o ponto  $C$  está sobre o eixo dos  $x$ , o que era de se esperar e poderá ter ocorrido um erro devido ao arredondamento do limite inferior no controle deslizante;
- A medida do raio do setor circular de área máxima está no intervalo  $[24, 26]$ ;
- A medida da área do setor circular está no intervalo  $[0, 630]$ ;

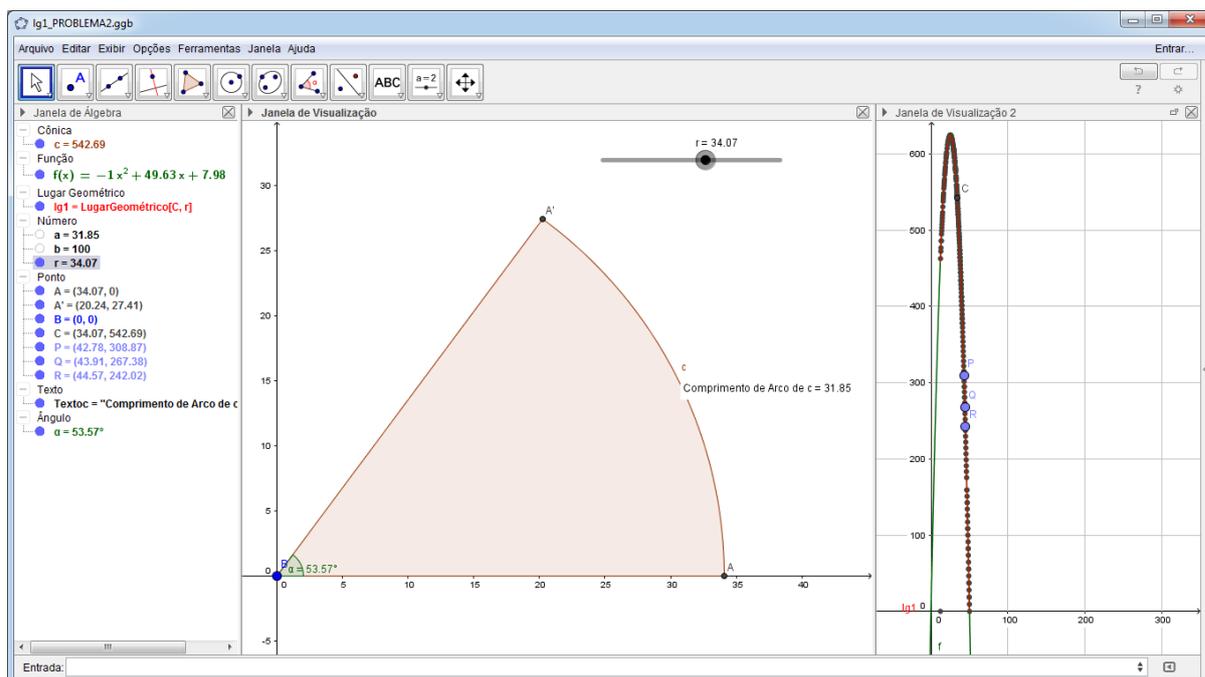
- f) A medida da área máxima do setor circular está no intervalo  $[620, 630]$ ;
- g) Marcando três pontos sobre o lugar geométrico obtido (Por exemplo:  $P$ ,  $Q$  e  $R$ ), digitando o comando `RegressãoPolinomial[{P,Q,R}, 2]` e pressionando "Enter", observamos que é exibido na Janela de Visualização 2 o gráfico de uma função polinomial de grau 2. Daí, o lugar geométrico dos pontos  $C$ , quando  $r$  varia, lembra uma parábola com concavidade voltada para baixo, representada por uma função quadrática  $F$  do tipo  $F(r) = a_1r^2 + b_1r + c_1$ , onde  $r$  é a medida o raio do setor circular e  $F(r)$  é a medida de sua área. Na Janela de Álgebra, verificamos que esse é o gráfico da função quadrática  $f(x) = -x^2 + 49,63x + 7,98$ , porém, com domínio no intervalo  $\left[\frac{50}{1 + \pi}, 50\right]$ .
- h) Selecionando-se a ferramenta  Inspetor de Funções e, escolhendo-se o intervalo  $[10, 40]$ , podemos clicar sobre o gráfico de  $f$  que serão exibidas as seguintes informações (Figura 89):

Figura 89 – Inspetor de Funções:  $f(x) = -x^2 + 49,63x + 7,98$



Fonte: Autor

- j) A área máxima do canteiro com forma de setor circular é aproximadamente  $626,4456 \text{ m}^2$ , cujo raio mede aproximadamente  $r = 24,9216 \text{ m}$ .

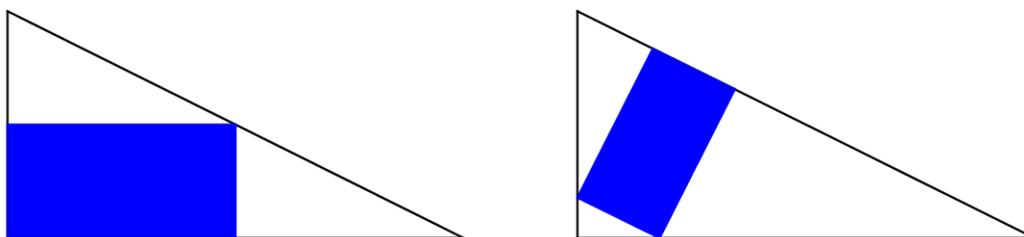
Figura 90 – Comportamento do ponto  $(r, c)$ 

Fonte: Autor

### 3.2.3 Problema 3

**Problema 3 (LIMA et al. (2006b)-adap.):** *Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados 60 cm, 80 cm e 1 m. Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.*

Figura 91 – Problema 3



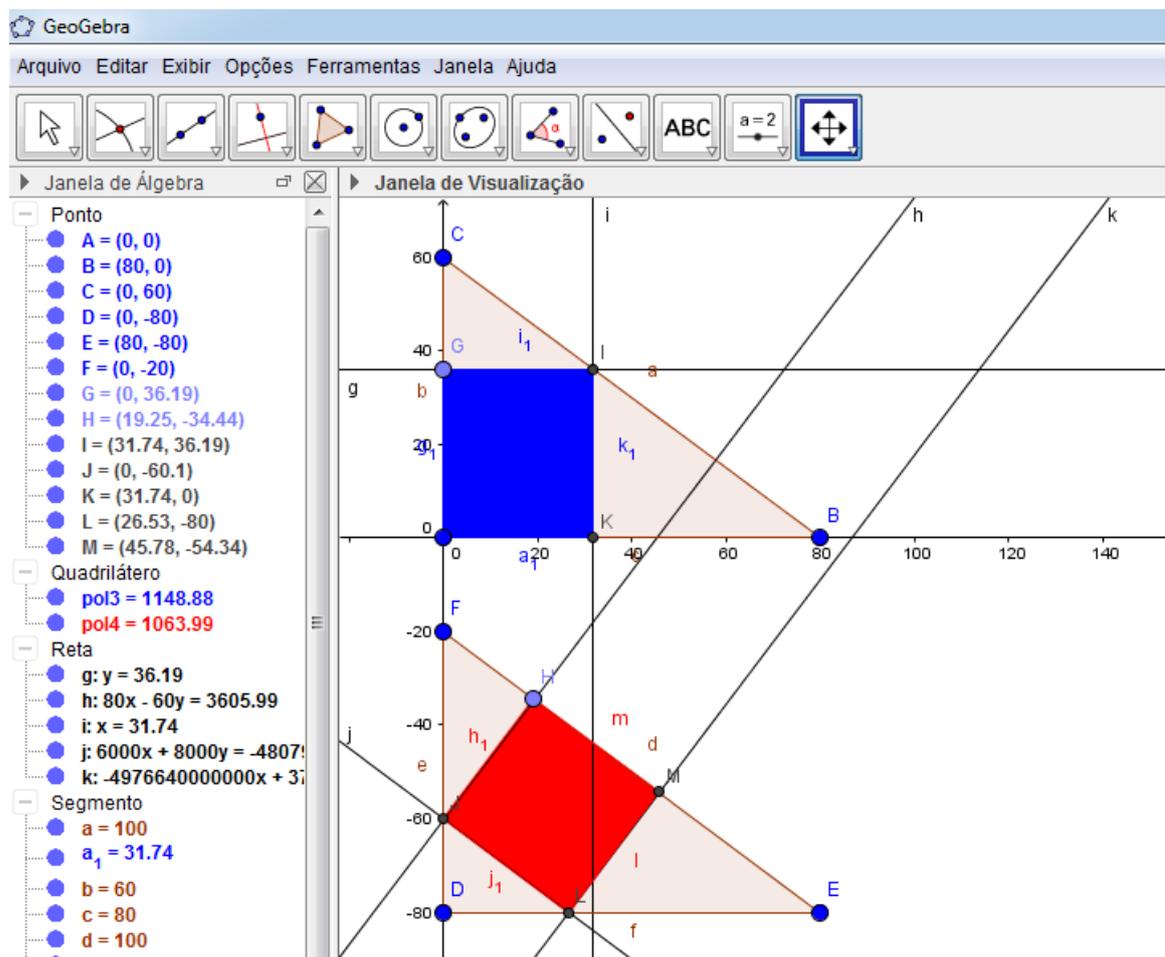
Fonte: Autor

As posições sugeridas são as da Figura 91. Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados.

Roteiro de desenvolvimento:

- 1) Em **Entrada**, digite  $A = (0, 0)$  e tecla "Enter". Repita o mesmo procedimento para os pontos  $B = (80, 0)$ ,  $C = (0, 60)$ ,  $D = (0, -80)$ ,  $E = (80, -80)$  e  $F = (0, -20)$ . Selecione a ferramenta  Polígono e clique seguidamente nos pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $A$  para construir o triângulo retângulo  $ABC$  e, depois, nos pontos  $D$ ,  $E$ ,  $F$  e  $D$  para construir o triângulo retângulo  $DEF$ ;
- 2) Selecione a ferramenta  Ponto e marque um ponto  $G$  sobre o segmento  $AC$  e outro ponto  $H$  sobre o segmento  $EF$ . Em seguida, selecione a ferramenta  Reta Perpendicular e clique no ponto  $G$  e no segmento  $AC$  para construir a reta  $g$  e, depois, clique no ponto  $H$  e no segmento  $EF$  para construir a reta  $h$ ;
- 3) Selecione a ferramenta  Interseção de Dois Objetos e marque a interseção entre a reta  $g$  e o segmento  $BC$  (ponto  $I$ ) e, depois, marque a interseção entre a reta  $h$  e o segmento  $DF$  (ponto  $J$ );
- 4) Selecione a ferramenta  Reta Perpendicular e clique no ponto  $I$  e no segmento  $AB$  para construir a reta  $i$  e, depois, clique no ponto  $J$  e na reta  $h$  para construir a reta  $j$ . Em seguida, selecione a ferramenta  Interseção de Dois Objetos e marque a interseção entre a reta  $i$  e o segmento  $AB$  (ponto  $K$ ) e, depois, marque a interseção entre a reta  $j$  e o segmento  $DE$  (ponto  $L$ );
- 5) Selecione a ferramenta  Reta Perpendicular e clique no ponto  $L$  e na reta  $j$  para construir a reta  $k$ . Em seguida, selecione a ferramenta  Interseção de Dois Objetos e marque a interseção entre a reta  $k$  e o segmento  $EF$  (ponto  $M$ );
- 6) Selecione a ferramenta  Polígono e construa os retângulos  $AKIG$  e  $JLMH$ . Altere a cor de cada um deles.

A Figura 92 mostra o que já construímos:

Figura 92 – Retângulos  $AKIG$  e  $JLMH$ 

Fonte: Autor

- 7) Selecione a opção **Exibir** e clique em Janela de Visualização 2 ou aperte seguidamente as teclas "Ctrl+Shift+2" para abrir uma nova janela de visualização.
- 8) Clique em Mover e depois na área da "Janela de Visualização 2".
- 9) Em **Entrada**, digite  $(g_1, pol3)$  e tecla "Enter". O ponto  $N$  aparecerá na Janela de Visualização 2. Digite  $(m, pol4)$  e tecla "Enter". O ponto  $O$  aparecerá na Janela de Visualização 2. Mova cada um dos pontos  $G$  e  $H$ , na Janela de Visualização 1, e observe o que acontece;
- 10) Selecione a Janela de Visualização 2. Em **Entrada**, digite

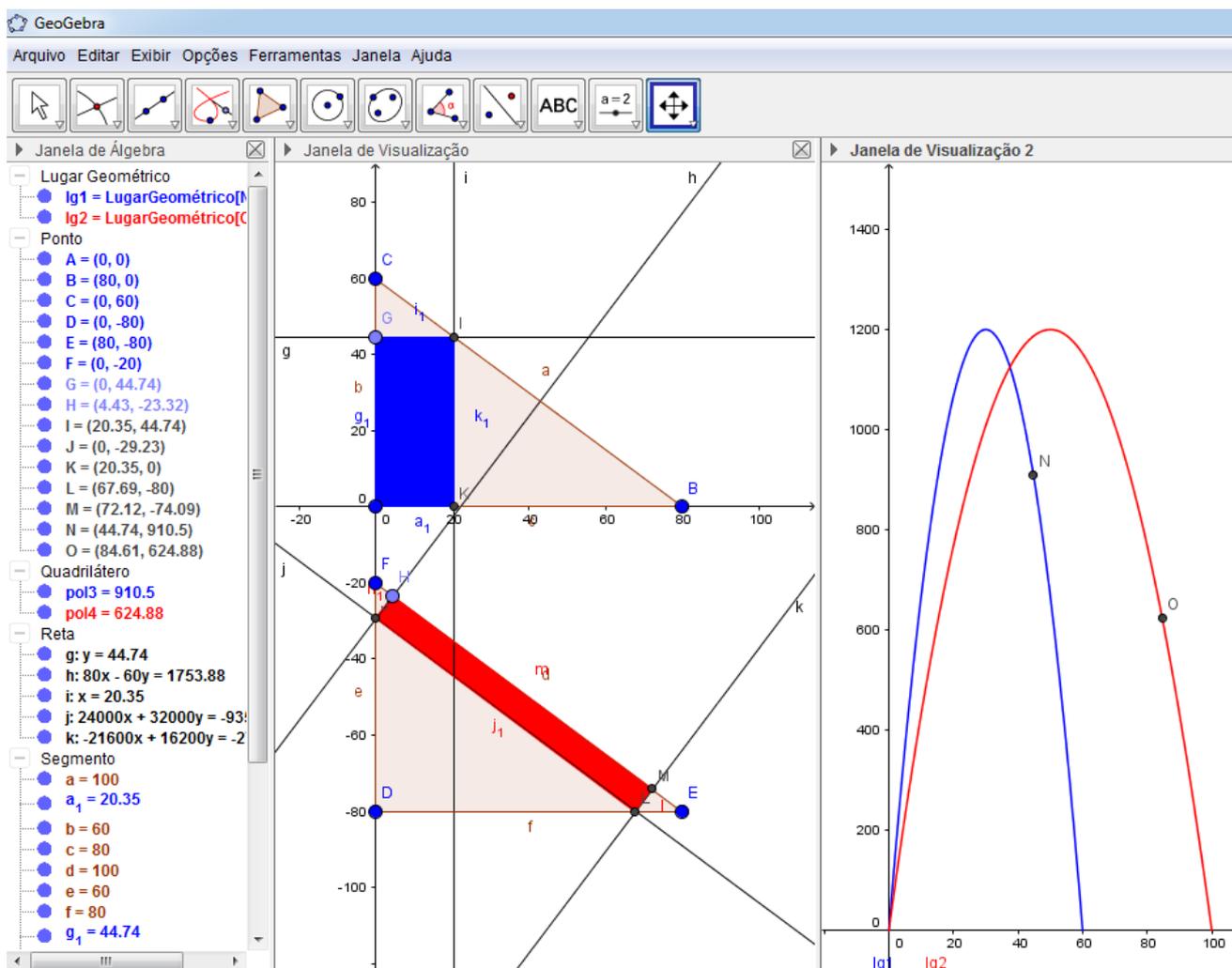
$$\text{LugarGeométrico}[N, G]$$

e tecla "Enter". Será exibida a curva  $lg1$ . Digite  $\text{LugarGeométrico}[O, H]$  e tecla "Enter". Será exibida a curva  $lg2$ . Altere a cor dessas curvas. Selecione a ferramenta , e, na Janela de Visualização 2, arraste o eixo  $x$  para obter uma

melhor visualização dos lugares geométricos. Mova cada um dos pontos  $G$  e  $H$ , na Janela de Visualização 1, e observe o que acontece.

A Figura 93 mostra o que construímos:

Figura 93 – Comportamento dos pontos  $N$  e  $O$



Fonte: Autor

Ao mover cada um dos pontos  $G$  e  $H$ , algumas conjecturas podem ser criadas:

- Quando  $g_1$  varia, a área do retângulo  $AKLG$  também varia. Quando  $m$  varia, a área do retângulo  $JLMH$  também varia;
- O gráfico exibido na Janela de Visualização 2 mostra que cada um dos retângulos têm uma área máxima;
- A medida d altura  $AG$  do retângulo  $AKIG$  está no intervalo  $[0, 60]$  e a medida da altura  $MH$  do retângulo  $JLMH$  está no intervalo  $[0, 100]$  ;

- d) A medida da altura  $AG$  do retângulo  $AKIG$  de área máxima está no intervalo  $[25, 35]$ . A medida da altura  $MH$  do retângulo  $JLMH$  de área máxima está no intervalo  $[45, 55]$  ;
- e) As medidas das áreas dos retângulos  $AKIG$  e  $JLMH$  pertencem ao intervalo  $[0, 1250]$ ;
- f) As medidas das áreas máximas dos retângulos  $AKIG$  e  $JLMH$  estão no intervalo  $[1150, 1250]$ ;
- g) As medidas das áreas máximas dos retângulos  $AKIG$  e  $JLMH$  parecem ter o mesmo valor;
- h) Marcando três pontos, de modo estratégico, sobre cada um dos lugares geométricos obtidos (Por exemplo:  $P, Q$  e  $R$  sobre  $lg1$  e  $S, T$  e  $U$  sobre  $lg2$ ), digitando os comandos

RegressãoPolinomial[{P,Q,R}, 2]

e

RegressãoPolinomial[{S,T,U}, 2]

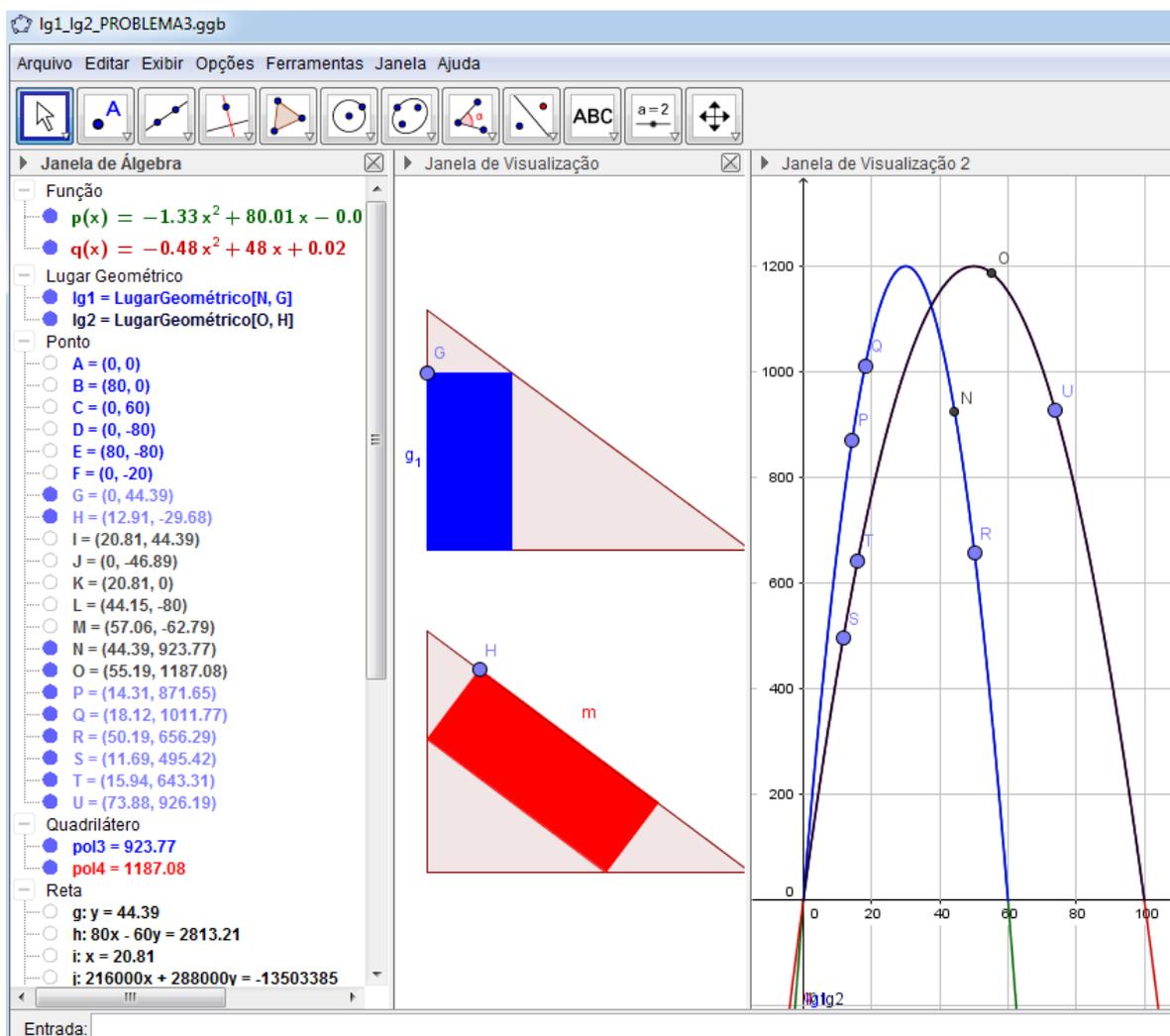
e, depois, pressionando "Enter" em cada uma delas, observamos que são exibidos na Janela de Visualização 2 os gráficos de duas funções polinomiais de grau 2. Daí, o lugar geométrico dos pontos  $N$ , quando  $g_1$  varia, lembra uma parábola com concavidade voltada para baixo, representada por uma função quadrática  $F$  do tipo  $F(g_1) = a_1g_1^2 + b_1g_1 + c_1$ , onde  $g_1$  é a medida da altura  $AG$  do retângulo  $AKLG$  e  $F(g_1)$  é a medida da área do mesmo. O lugar geométrico dos pontos  $O$ , quando  $m$  varia, lembra o gráfico de uma parábola com concavidade voltada para baixo, representada por uma função quadrática  $G$  do tipo  $G(m) = a_2m^2 + b_2m + c_2$ , onde  $m$  é a medida da altura  $MH$  do retângulo  $JLMH$  e  $G(m)$  é a medida da área do mesmo.

- i) O domínio de  $F$  ( a função  $p(x) = -1,33x^2 + 88,01x - 0,0$  mostrada na Janela de Álgebra) é o intervalo  $[0, 60]$ ;
- j) O domínio de  $G$  (a função  $q(x) = -0,48x^2 + 48x + 0,02$  mostrada na Janela de Álgebra) é o intervalo  $[0, 100]$ ;
- k) A função  $F$  é crescente no intervalo  $[0, 30]$  e decrescente no intervalo  $[30, 60]$ ;
- l) A função  $G$  é crescente no intervalo  $[0, 50]$  e decrescente no intervalo  $[50, 100]$ ;

m) Selecionando-se a ferramenta  Inspetor de Funções e clicando-se em cada uma das funções  $F$  e  $G$ , notamos que elas tem um máximo aproximadamente igual a 1200.

Ocultando alguns objetos, exibindo a Malha e alterando cores e estilos, temos uma nova forma de exibição da animação:

Figura 94 – Comportamento dos pontos  $N$  e  $O$  com novos efeitos

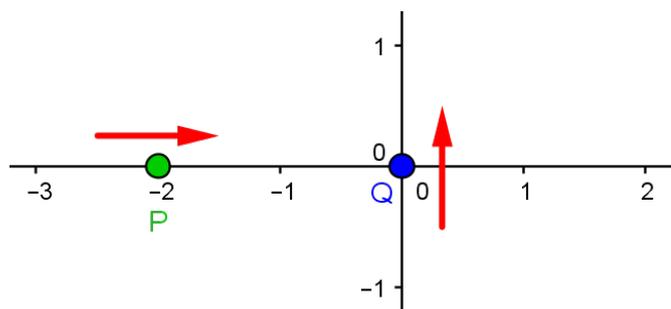


Fonte: Autor

### 3.2.4 Problema 4

**Problema 4 (LIMA et al. (2006b)):** No instante  $t = 0$  o ponto  $P$  está em  $(-2, 0)$  e o ponto  $Q$  em  $(0, 0)$ . A partir desse instante,  $Q$  move-se para cima com velocidade de 1 unidade por segundo e  $P$  move-se para a direita com velocidade de 2 unidades por segundo. Qual é o valor da distância mínima entre  $P$  e  $Q$ ?

Figura 95 – Problema 4



Fonte: Autor

Roteiro de desenvolvimento:

- 1) Selecione a ferramenta  Controle Deslizante e clique na Janela de Visualização. Altere os limites para 0 e 50 e clique em "Ok". Renomeie o controle deslizante para  $t$ .
- 2) Em **Entrada**, digite  $P = (-2 + 2t, 0)$  e tecla "Enter". Digite  $Q = (0, t)$  e tecla "Enter". Altere as dimensões e cores dos pontos  $P$  e  $Q$ .
- 3) Selecione a ferramenta  Segmento e construa o segmento  $PQ$ . Será exibido, na Janela de Álgebra e Janela de Visualização,  $a$  que se refere à medida do segmento  $PQ$ . Mova o controle deslizante e verifique o que acontece.
- 4) Selecione a opção  Exibir e clique em  Janela de Visualização 2 ou aperte seguidamente as teclas "Ctrl+Shift+2" para abrir uma nova janela de visualização.
- 5) Selecione a Janela de Visualização 2. Em **Entrada**, digite  $(t, a)$  e tecla "Enter". Será exibido o ponto  $A$ . Mova o controle deslizante e observe o que acontece;
- 6) Selecione a Janela de Visualização 2. Em **Entrada**, digite

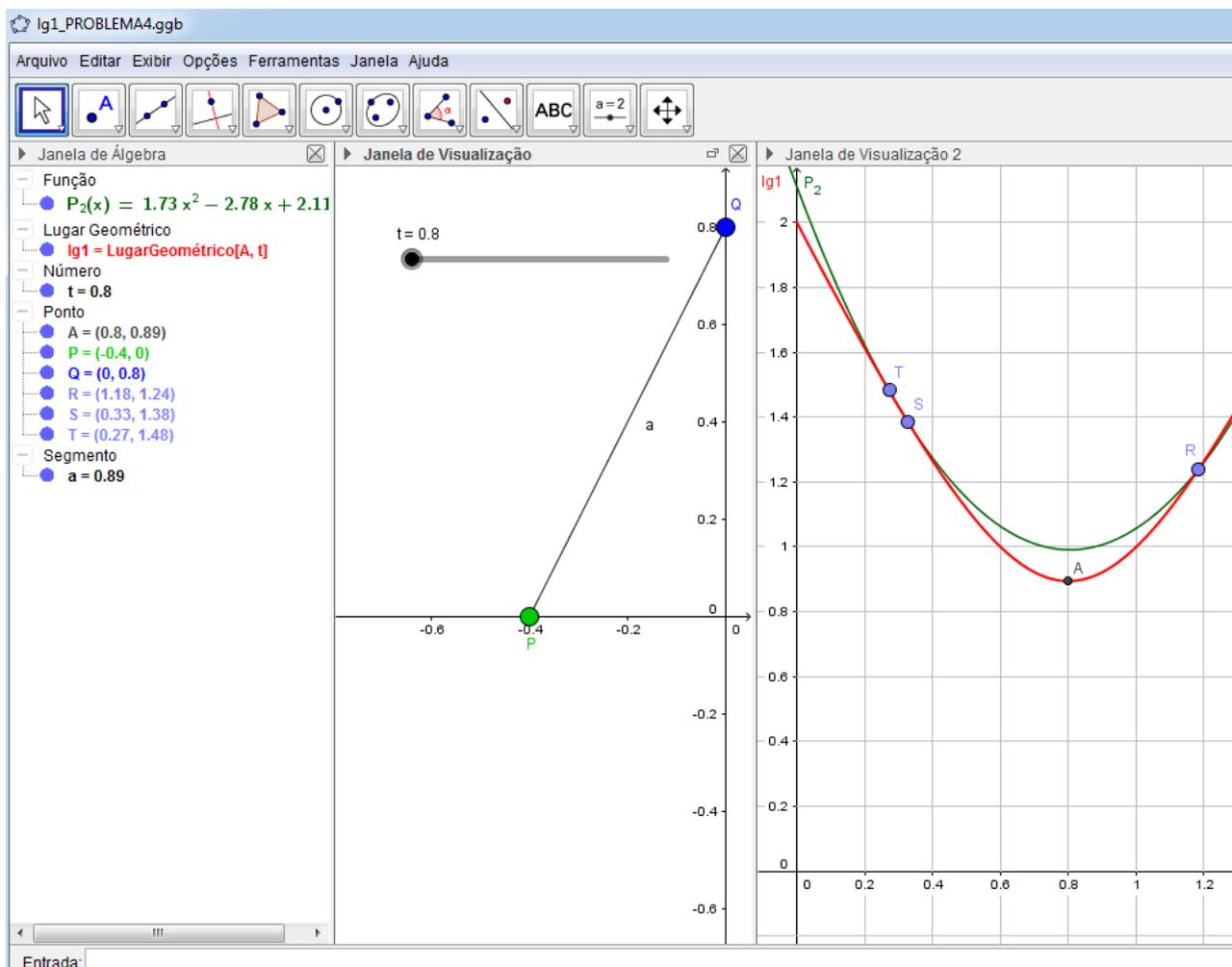
$$\text{LugarGeométrico}[A, t]$$

e tecla "Enter". Será exibida a curva  $lg1$ . Marque três pontos sobre o lugar geométrico obtido (Por exemplo:  $R$ ,  $S$  e  $T$ ), digitando o comando

$$\text{RegressãoPolinomial}[\{R, S, T\}, 2]$$

e pressione "Enter". Observamos que é exibido na Janela de Visualização 2 o gráfico de uma função polinomial de grau 2. Altere o estilo e cor do lugar geométrico obtido. Mova o controle deslizante e observe o que acontece.

A Figura 96 mostra o que construímos:

Figura 96 – Comportamento do ponto  $A$ 

Fonte: Autor

Ao mover o controle deslizante, algumas conjecturas podem ser criadas:

- O gráfico exibido na Janela de Visualização 2 mostra que a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  tem um valor mínimo;
- Quando  $t$  varia em  $\mathbb{R}_+$ , a distância  $a$  entre os pontos  $P$  e  $Q$  também varia;
- Quando  $t = 0$  a distância entre  $P$  e  $Q$  é 2;
- A distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  pertence ao intervalo  $[0, 8; +\infty[$ ;
- A distância mínima ocorre em  $t = 0,8$ , ou seja, quando  $P = (-0,4; 0)$  e  $Q = (0; 0,8)$ ;
- O lugar geométrico dos pontos  $A$ , quando  $t$  varia, **não** lembra uma parábola com concavidade voltada para cima, ou seja, não é representada por uma função

quadrática  $F$  do tipo  $F(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$ , onde  $t$  é o tempo dado em segundos e  $F(t)$  é a distância entre os pontos  $P$  e  $Q$ . É uma função, mas não lembra uma parábola;

- g) O domínio de  $F$  é o intervalo  $[0, +\infty[$ ;
- h) A função  $F$  é decrescente no intervalo  $[0; 0, 8]$  e crescente no intervalo  $[0, 8; +\infty[$ .

### 3.2.5 Problema 5

**Problema 5 (LIMA et al. (2006b)):** *Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?*

Figura 97 – Problema 5



Fonte: Autor

Roteiro de desenvolvimento:

- 1) Selecione a ferramenta  Controle Deslizante e clique na Janela de Visualização. Altere os limites para 0 e 40 e clique em "Ok";
- 2) Em **Entrada**, digite  $A = (0, 0)$  e tecla "Enter". Repita o mesmo procedimento para os pontos  $B = (80 - 2a)$ ,  $C = (80 - 2a, a)$  e  $D = (0, a)$ ;
- 3) Selecione a ferramenta  Polígono e construa o polígono  $ABCD$ . Será exibido, na Janela de Álgebra e Janela de Visualização,  $pol1$  que se refere à área do retângulo  $ABCD$ . Também serão exibidos as medidas  $a_1$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  dos lados do retângulo. Mova o controle deslizante e verifique o que acontece.
- 4) Selecione a opção  Exibir e clique em  Janela de Visualização 2 ou aperte seguidamente as teclas "Ctrl+Shift+2" para abrir uma nova janela de visualização.

- 5) Selecione a Janela de Visualização 2. Em **Entrada**, digite  $(a, pol1)$  e tecla "Enter". Será exibido o ponto  $E$ . Mova o controle deslizante e observe o que acontece;
- 6) Selecione a Janela de Visualização 2. Em **Entrada**, digite

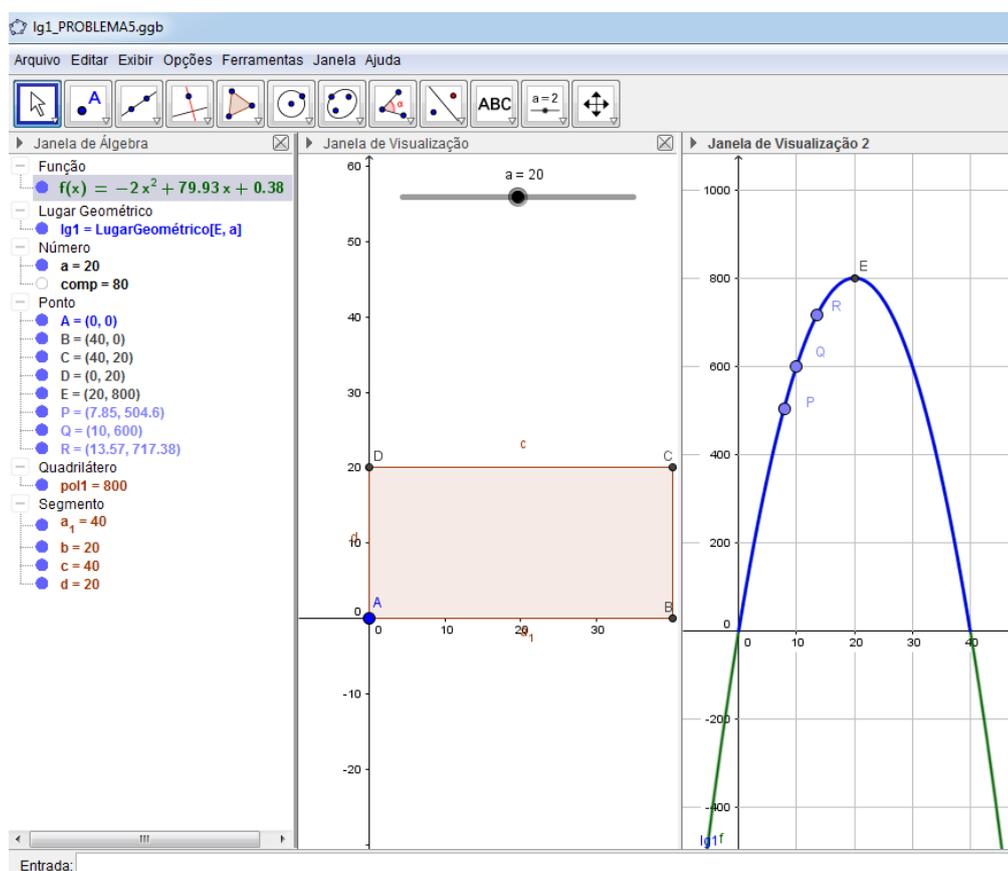
$$\text{LugarGeométrico}[E, a]$$

e tecla "Enter". Será exibida a curva  $lg1$ . Altere o estilo e cor do lugar geométrico obtido e arraste o eixo  $x$ . Em **Entrada**, digite  $comp = b + c + d$  e tecla "Enter". Mova o controle deslizante e observe o que acontece;

- 7) Marque três pontos, de modo estratégico, sobre o lugar geométrico obtido (Por exemplo:  $P$ ,  $Q$  e  $R$ ), digite o comando  $\text{RegressãoPolinomial}[\{P, Q, R\}, 2]$  e pressione "Enter» observamos que é exibido na Janela de Visualização 2 o gráfico de uma função polinomial de grau 2.

A Figura 98 mostra o que construímos:

Figura 98 – Comportamento do ponto  $E$



Fonte: Autor

Ao mover o controle deslizante, algumas conjecturas podem ser criadas:

- a) O gráfico exibido na Janela de Visualização 2 mostra que a área do retângulo tem um valor máximo;
- b) Quando  $a$  varia, a área do retângulo  $ABCD$  também varia;
- c) Quando  $a = 0$  ou  $a = 40$ , a área do retângulo  $ABCD$  é igual a zero;
- d) A área máxima do retângulo é igual a  $800 \text{ m}^2$ ;
- e) A medida da altura do retângulo de área máxima é igual a  $20 \text{ m}$ ;
- f) O  $\text{comp} = 80$  é constante;
- g) A curva descrita no lugar geométrico é crescente no intervalo  $[0, 20]$  e decrescente no intervalo  $[20, 40]$ ;
- h) O lugar geométrico dos pontos  $E$ , quando  $a$  varia, lembra uma parábola com concavidade voltada para cima, representada por uma função quadrática  $F$  do tipo  $F(a) = a_1a^2 + b_1a + c_1$ , onde  $a$  é a medida da altura do retângulo  $ABCD$  e  $F(a)$  é a medida de sua área;
- i) O domínio de  $F$  (a função  $f(x) = -2x^2 + 79,93x + 0,38$  mostrada na Janela de Álgebra) é o intervalo  $[0, 40]$ ;

Os cinco problemas exibidos a seguir se referem a lugares geométricos.

### 3.3 TÉCNICA EMPREGADA NO PROCESSO DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE LUGARES GEOMÉTRICOS

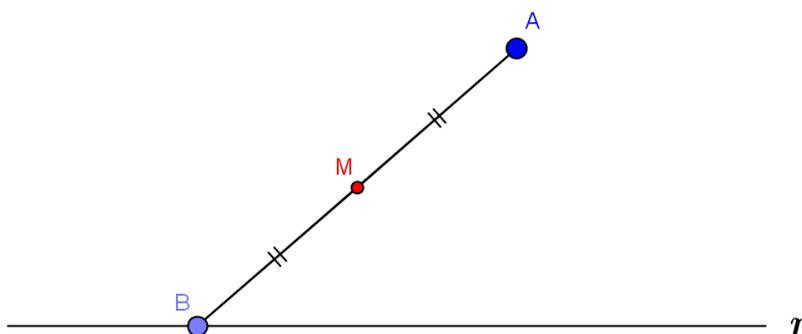
Para cada um dos cinco problemas a seguir, a técnica que será empregada no processo de resolução de problemas de máximos e mínimos será:

- Construção da figura com auxílio do GeoGebra;
- Visualização dinâmica do problema;
- Lugar geométrico via GeoGebra;
- Conjecturas;
- Apresentação de uma solução do problema, encontrada no Apêndice A deste trabalho.

### 3.3.1 Problema 6

**Problema 6 (NETO (2013)):** São dados no plano uma reta  $r$  e um ponto  $A$ , com  $A \notin r$ . O ponto  $B$  varia em  $r$ . Encontre, com justificativa, o LG descrito pelo ponto médio do segmento  $AB$ .

Figura 99 – Problema 6

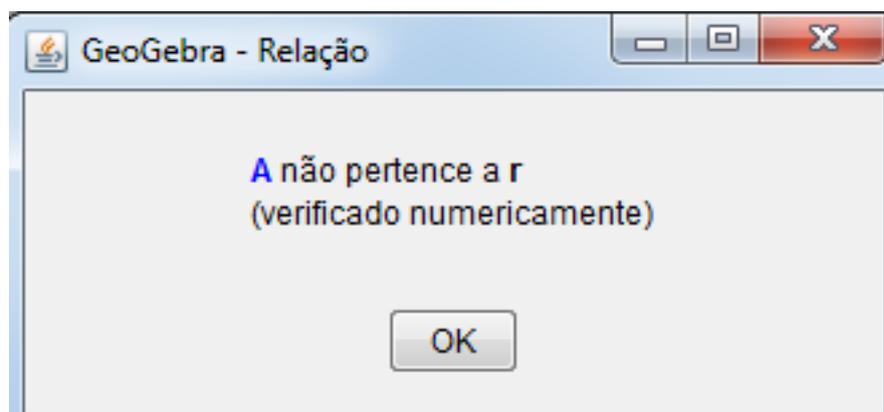


Fonte: Autor

Os passos de construção a seguir podem parecer que não sejam os mais simples possíveis, mas levam à construção do problema 6. Isso significa que cada pessoa poderá criar a sua sequência de passos e chegar à mesma construção final do problema no GeoGebra.

Roteiro de desenvolvimento:

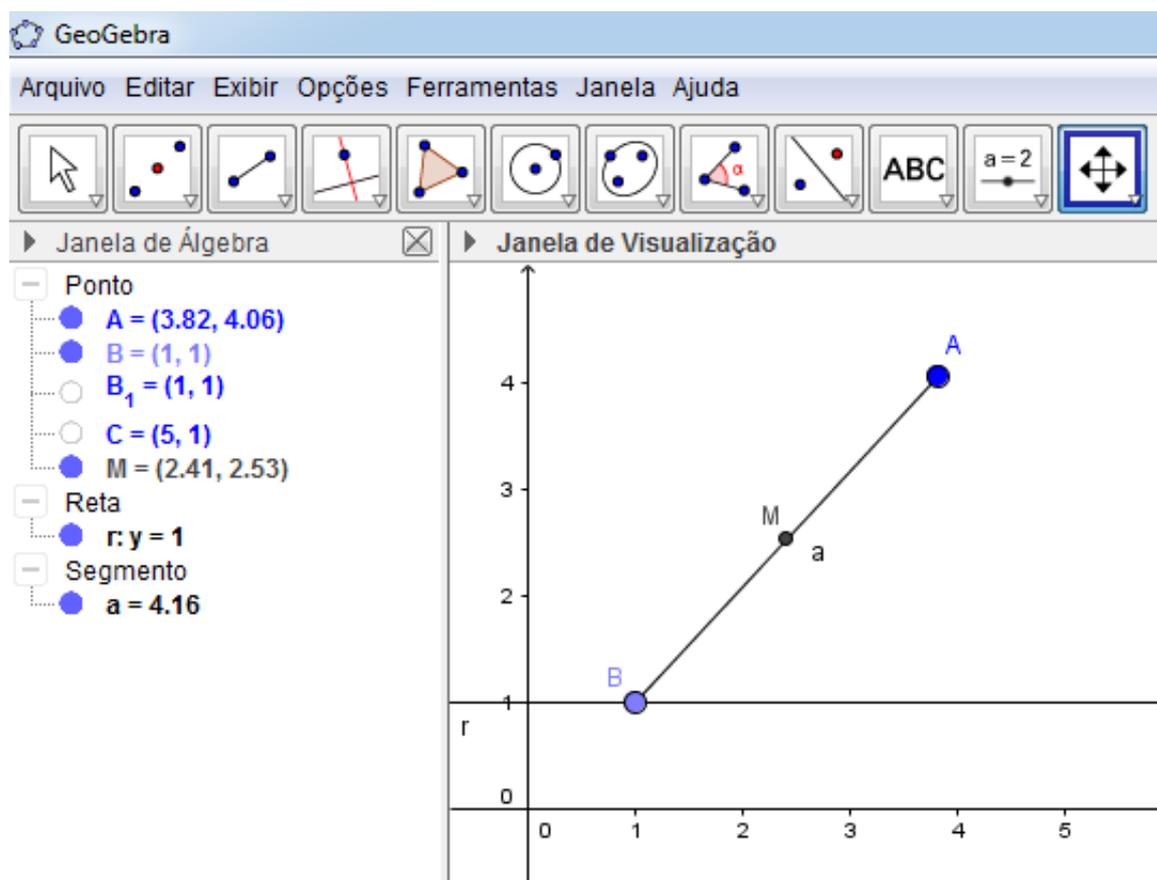
- 1) Clique em  **Ponto** e marque três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  não colineares sobre a janela de visualização;
- 2) Clique em  **Reta** e clique nos pontos  $B$  e  $C$  para exibir a reta que passa por eles. Clique com o botão direito sobre a reta determinada por  $B$  e  $C$ , clique em  **Renomear** e digite  $r$ . Assim,  $r$  é a reta que passa pelos pontos  $B$  e  $C$ ;
- 3) Para verificar se  $A$  pertence ou não pertence a  $r$ , clique em  **Relação** e em seguida clique no ponto  $A$  e na reta  $r$ . Para o nosso problema o *software* deverá exibir a mensagem da Figura 100 :

Figura 100 – Relação entre  $A$  e  $r$ 

Fonte: Autor

- 4) Na Janela de Álgebra clique em  para ocultar os pontos  $B$  e  $C$ . Na Barra de Ferramentas clique em  Ponto e em seguida sobre a reta  $r$ . Renomeie esse ponto para  $B$  (note que, na Janela de Álgebra, o ponto  $B$  obtido no item 1) foi renomeado para  $B_1$ ). O interessante nessa construção é que os pontos  $B$  e  $C$  do item 1) são fixos e o ponto  $B$  criado neste item varia sobre a reta  $r$ .
- 5) Clique em  Segmento e em seguida sobre os pontos  $A$  e  $B$ . Para determinar o ponto médio de  $AB$ , clique em  Ponto Médio ou Centro e em seguida sobre os pontos  $A$  e  $B$ . Renomeie esse ponto obtido para  $M$ . Pronto, nossa construção do problema 5 está concluída. A Figura 101 nos mostra essa construção.

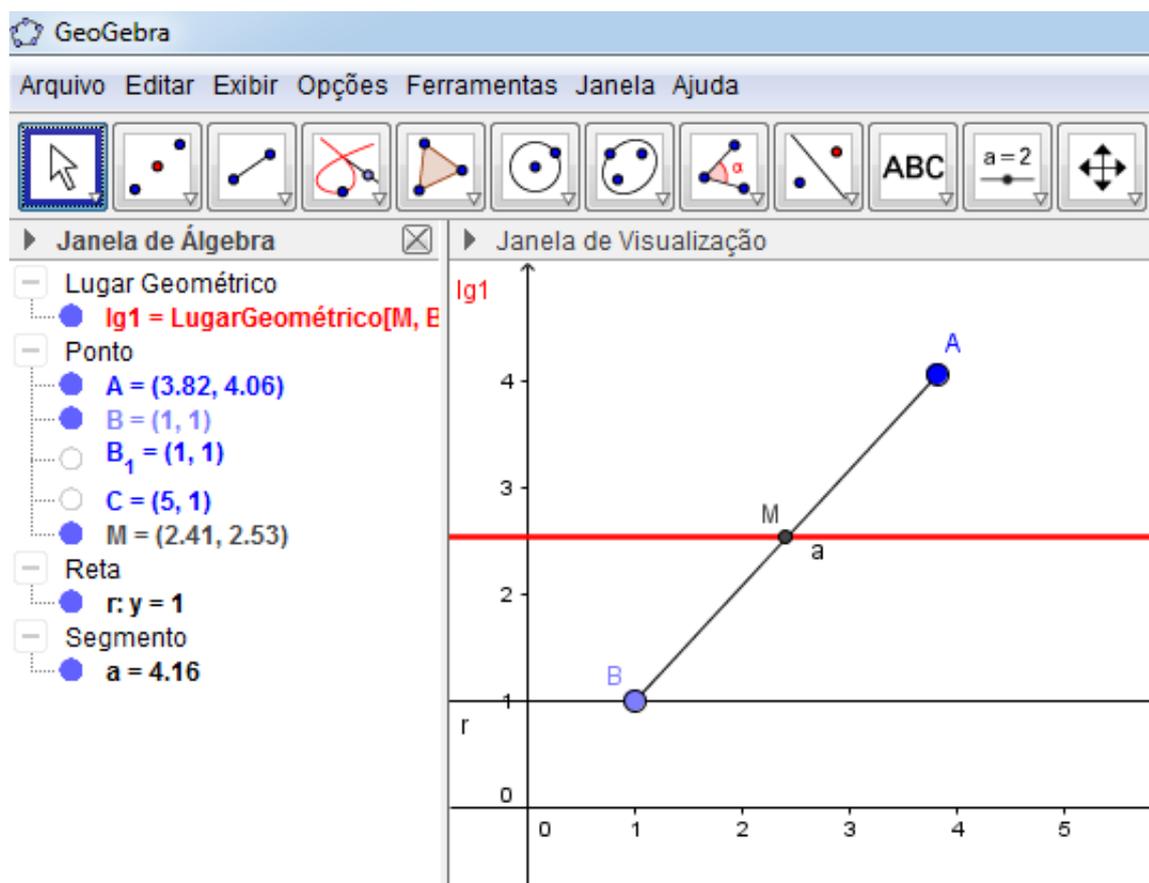
Figura 101 – Construção do Problema 6



Fonte: Autor

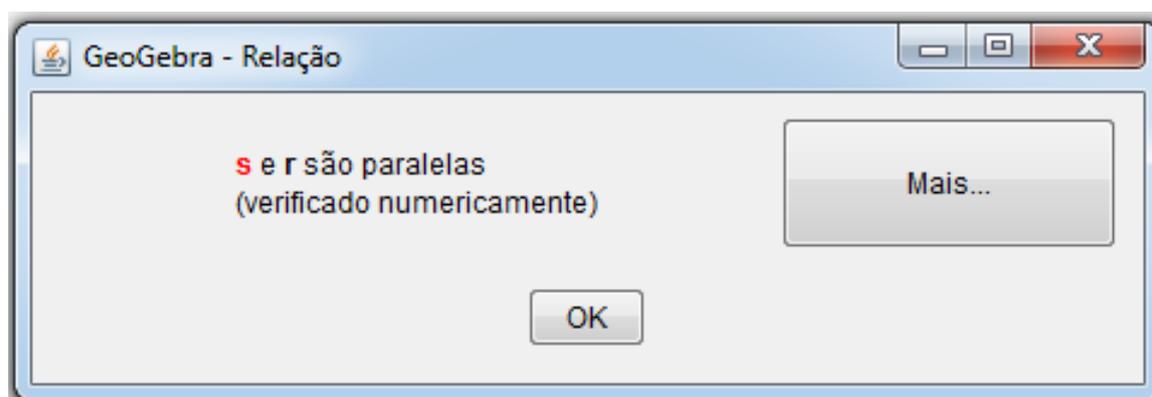
- 6) Clique em  **Mover** e em seguida clique sobre o ponto  $B$  e mova-o sobre a reta  $r$ .
- 7) Clique com o botão direito sobre o ponto  $M$  e depois em  **Habilitar Rastro**. Mova o ponto  $B$  novamente e observe o que acontece.
- 8) Também pode-se determinar o lugar geométrico dos pontos  $M$  quando  $B$  varia sobre  $r$ . Basta clicar, seguidamente, em  **Lugar Geométrico** e nos pontos  $M$  e  $B$ . Altere a cor e estilo do lugar geométrico. A Figura 102 nos mostra essa nova construção.

Figura 102 – Lugar geométrico do Problema 6



Fonte: Autor

- 9) Para verificar a relação entre o lugar geométrico  $lg_1$  e a reta  $r$ , marque dois pontos sobre o lugar geométrico  $lg_1$  e, como esse lugar geométrico lembra uma reta, trace uma reta  $s$  por esses dois pontos marcados. Em seguida, clique em  Relação e, depois, sobre a reta  $r$  e sobre a reta  $s$ . O software deverá exibir a mensagem da Figura 103:

Figura 103 – Relação entre  $r$  e  $lg_1$ 

Fonte: Autor

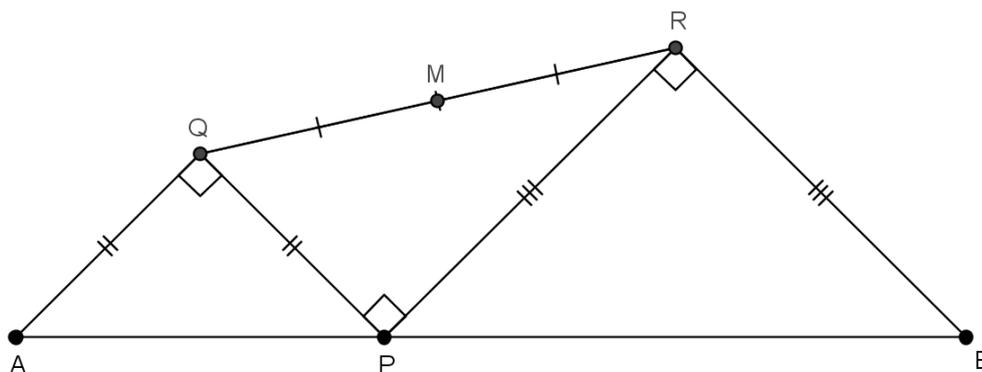
Ao mover o ponto  $B$ , algumas conjecturas podem ser criadas:

- O comprimento do segmento  $AB$  varia;
- O lugar geométrico dos pontos  $M$  lembra uma reta  $s$  paralela à reta  $r$ ;
- A distância do ponto  $A$  à provável reta  $s$  é constante e igual à distância do ponto  $B$  à  $s$ ;
- Existe um valor mínimo para  $d(A, B)$ , o que parece ocorrer quando  $B$  for a projeção ortogonal de  $A$  sobre a reta  $r$ .

### 3.3.2 Problema 7

**Problema 7 (NETO (2013)):** *É dado no plano um segmento  $AB$  e um ponto  $P$  sobre ele. De um mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , construímos os triângulos retângulos isósceles  $APQ$  e  $BPR$ , de hipotenusa  $AP$  e  $BP$ , respectivamente. Em seguida, marcamos o ponto médio  $M$  do segmento  $QR$ . Encontre o LG descrito pelo ponto  $M$ , à medida que  $P$  varia sobre o segmento  $AB$ .*

Figura 104 – Problema 7



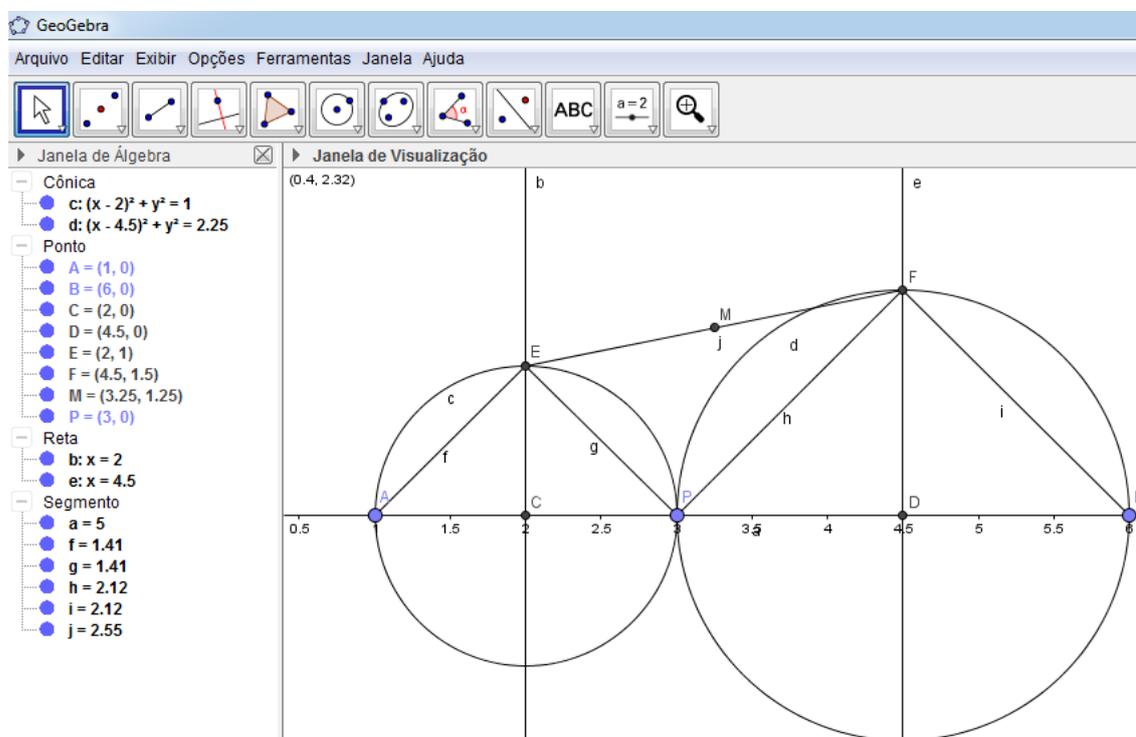
Fonte: Autor

Roteiro de desenvolvimento:

- Clique em  Segmento e crie um segmento  $AB$  na Janela de Visualização;
- Clique em  Ponto e marque um ponto sobre o segmento  $AB$ . Em seguida renomeie esse ponto para  $P$ ;
- Clique em  Ponto Médio ou Centro, depois nos pontos  $A$  e  $P$  (para criar o ponto médio  $C$  do segmento  $AP$ ) e em seguida nos pontos  $P$  e  $B$  (para criar o ponto médio  $D$  do segmento  $PB$ );

- 4) Clique em  **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, depois no ponto  $C$  e em um dos pontos  $A$  e  $P$ . Em seguida clique no ponto  $D$  e em um dos pontos  $P$  e  $B$ . Foram geradas duas circunferências:  $c$  de centro  $C$  passando por  $A$  e  $P$  e  $d$  de centro  $D$  passando por  $P$  e  $B$ ;
- 5) Clique em  **Reta Perpendicular**, depois no ponto  $C$  e no segmento  $AB$  (para criar a reta perpendicular  $b$  ao segmento  $AB$  passando por  $C$ ). Em seguida, clique no ponto  $D$  e no segmento  $AB$  (para criar a reta perpendicular  $e$  ao segmento  $AB$  passando por  $D$ );
- 6) Clique em  **Ponto** e, de um mesmo lado da reta  $AB$ , marque a interseção de  $b$  e  $c$  (gerando o ponto  $E$ ) e a interseção de  $e$  e  $d$  (gerando o ponto  $F$ );
- 7) Clique em  **Segmento** e crie os segmentos  $AE$ ,  $EP$ ,  $PF$ ,  $FB$  e  $EF$ ;
- 8) Clique em  **Ponto Médio ou Centro**, depois nos pontos  $E$  e  $F$  (para criar o ponto médio do segmento  $EF$ ). Em seguida, renomeie o ponto médio do segmento  $EF$  para  $M$ . A Figura 105 nos mostra a construção obtida;

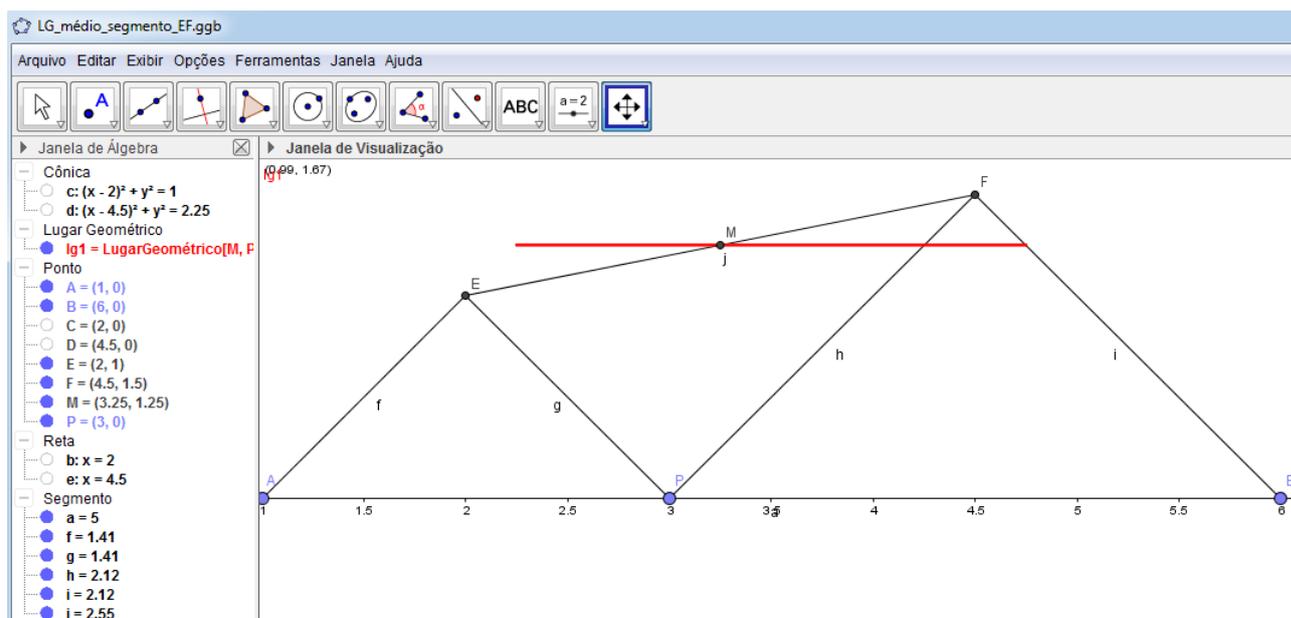
Figura 105 – Construção do Problema 7



- 9) Clique em  **Mover**, em seguida mova o ponto  $P$  e observe o que acontece com o ponto  $M$ ;

- 10) Clique em  Lugar Geométrico e nos pontos  $M$  e  $P$ . Mova o ponto  $P$  até o ponto  $A$  e depois até o  $B$  e observe o que acontece. Altere a cor do lugar geométrico obtido e oculte os pontos  $C$  e  $D$ , as retas  $b$  e  $e$  as circunferências  $c$  e  $d$ . A Figura 106 nos mostra essa nova construção.

Figura 106 – Lugar geométrico do Problema 7



Fonte: Autor

Ao mover o ponto  $P$ , algumas conjecturas podem ser criadas:

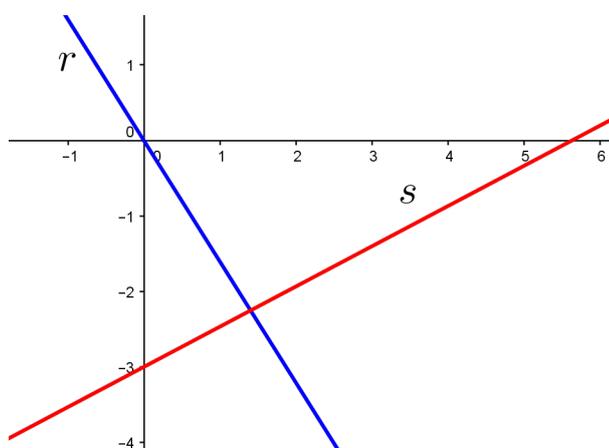
- Os pontos  $E$  e  $F$  também variam;
- O lugar geométrico dos pontos  $M$  lembra um segmento de reta paralelo ao segmento  $AB$ ;
- O lugar geométrico dos pontos  $E$  lembra um segmento de reta de comprimento  $k$ ;
- O lugar geométrico dos pontos  $F$  também lembra um segmento de reta, cujo comprimento parece ser o mesmo que o obtido no item d);
- Quando  $P$  coincide com  $A$  tem-se que  $E$  também coincide com  $A$  e, dessa forma,  $M$  é o ponto médio de  $AF$ ;
- Quando  $P$  coincide com  $B$  tem-se que  $F$  também coincide com  $B$  e, assim,  $M$  é o ponto médio de  $BE$ ;
- Quando  $P$  coincide com  $A$ , o segmento cujas extremidades são os pontos médios dos segmentos  $PF$  e  $BF$  coincide com o lugar geométrico obtido no item c);

- h) O provável segmento do item c) parece ter a metade do comprimento do segmento  $AB$ .

### 3.3.3 Problema 8

**Problema 8:** É dado no plano uma reta  $r : y = k_1x$  e uma reta  $s : y = k_2x - 3$ , de modo que  $k_1$  e  $k_2$  são números reais, distintos, tais que  $2k_1^2 + 3k_2^2 = 6$ . Determine o lugar geométrico dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $s$ .

Figura 107 – Problema 8



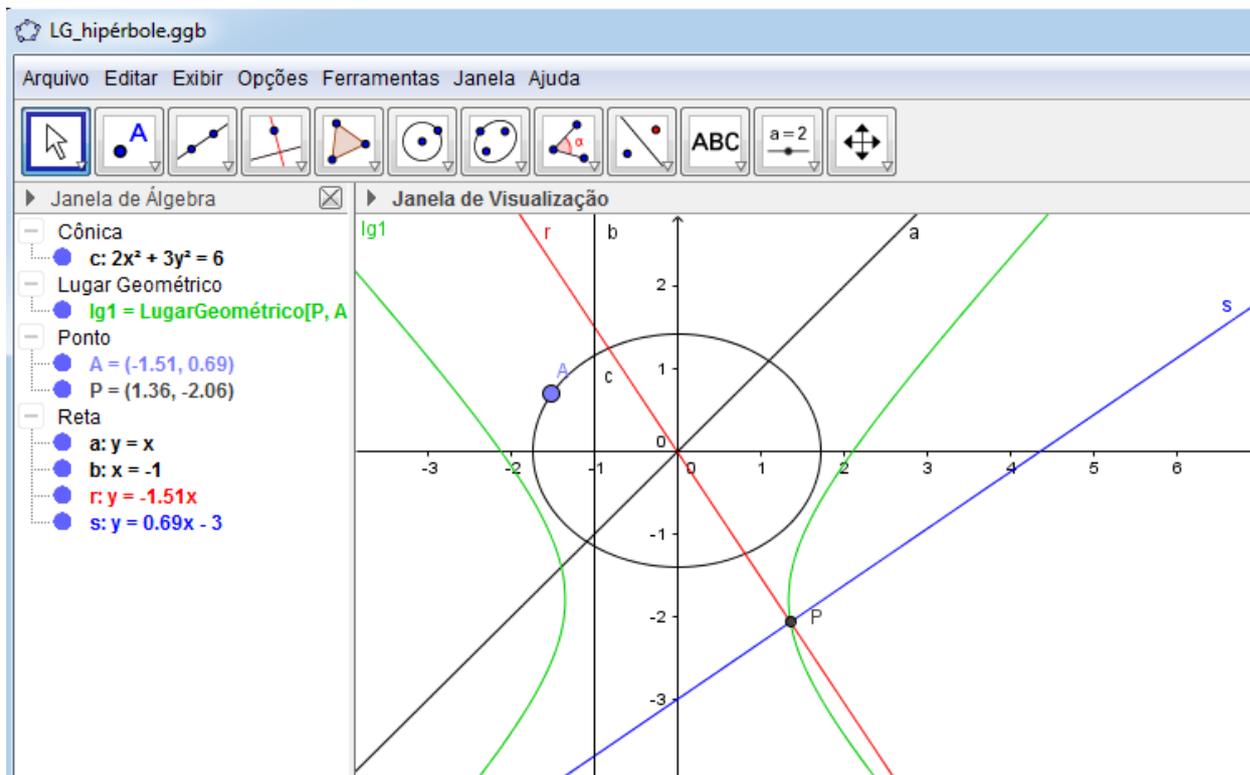
Fonte: Autor

Roteiro de desenvolvimento:

- 1) Em **Entrada** digite  $2x^2+3y^2=6$  ou  $2 * x^2+3 * y^2=6$  e tecla "Enter". Irá criar a elipse  $c$ ;
- 2) Clique em  **Ponto** e depois sobre a elipse  $c$  para gerar o ponto  $A$ ;
- 3) Em **Entrada** digite  $y=x(A)x$  e tecla "Enter". Em seguida, renomeie a reta obtida para  $r$ ;
- 4) Em **Entrada** digite  $y=y(A)x-3$  e tecla "Enter". Em seguida, renomeie a reta obtida para  $s$ ;
- 5) Clique em  **Interseção de Dois Objetos** e em seguida nas retas  $r$  e  $s$ . Será exibido, na Janela de Visualização, o ponto de interseção das retas  $r$  e  $s$ . Renomeie esse ponto para  $P$ ;
- 6) Clique em  **Mover**, mova o ponto  $P$  e observe o que acontece;

- 7) Clique em  Lugar Geométrico e, em seguida, nos pontos  $P$  e  $A$ . Será exibido o lugar geométrico dos pontos  $P$  quando  $A$  varia sobre a elipse  $c$ . Em **Entrada**, digite  $y = x$  e tecla "Enter". A Figura 108 nos mostra a construção obtida.

Figura 108 – Lugar geométrico do Problema 8



Fonte: Autor

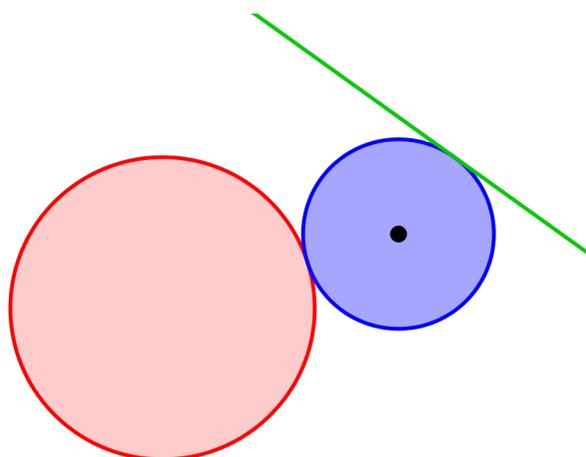
Ao mover o ponto  $A$  sobre a elipse  $c$ , algumas conjecturas podem ser criadas:

- As retas  $r$  e  $s$  se movem;
- A reta  $r$  sempre passa pela origem;
- A reta  $s$  sempre passa pelo ponto  $(0, -3)$ ;
- O lugar geométrico dos pontos  $P$  lembra uma hipérbole de eixo focal paralelo ao eixo dos  $x$ ;
- $P$  se movimenta na ramificação à direita do eixo dos  $y$  (quando  $A$  está acima da reta  $y = x$ ) e parece se movimentar na ramificação à esquerda do eixo dos  $y$  (quando  $A$  está abaixo da reta  $y = x$ );
- As retas  $r$  e  $s$  são paralelas quando  $A$  está sobre a reta  $y = x$ .

### 3.3.4 Problema 9

**Problema 9:** (IME) *Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num mesmo plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes (exteriormente) ao círculo dado e à reta dada.*

Figura 109 – Interpretação geométrica do problema 9



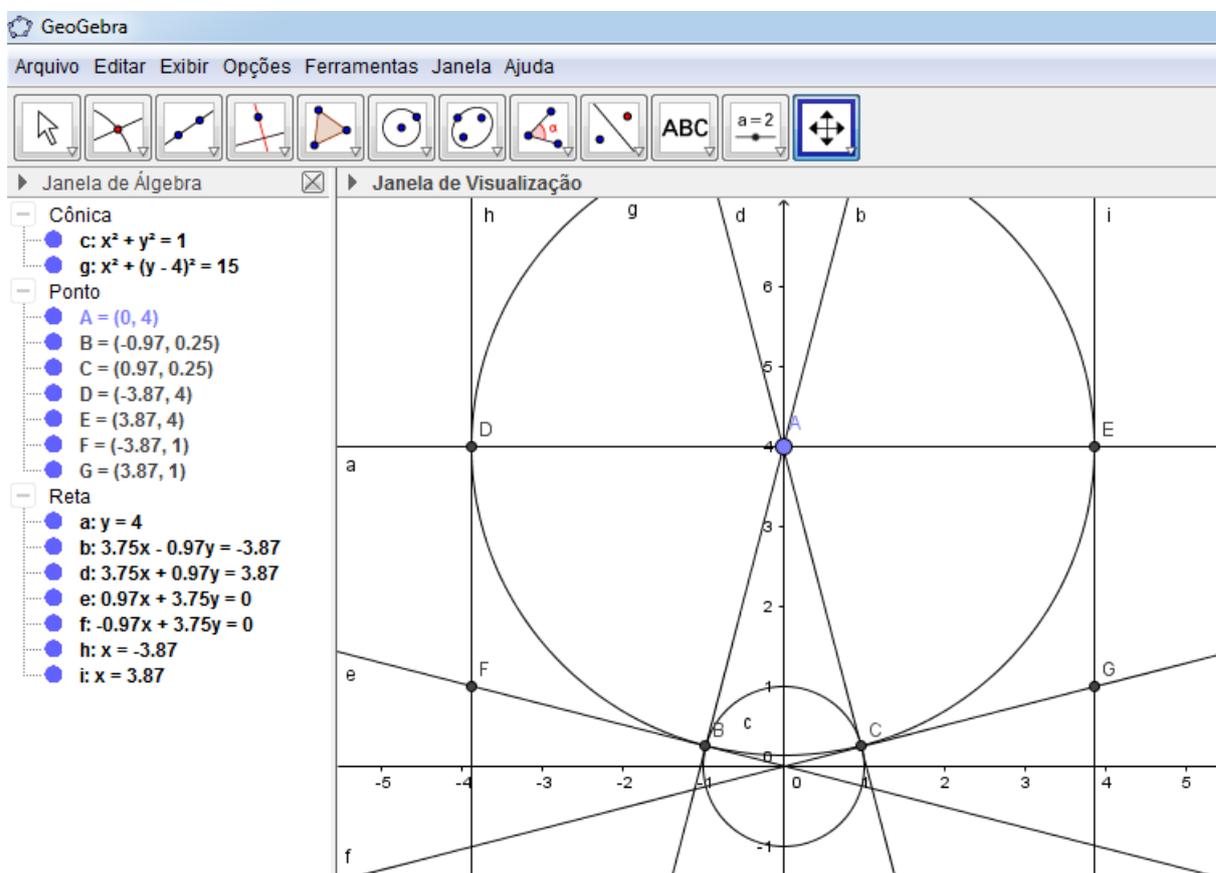
Fonte: Autor

Roteiro de desenvolvimento:

- 1) Em **Entrada** digite  $x^2+y^2=1$  e tecla "Enter". Será exibida uma circunferência  $c$  centrada na origem e raio 1;
- 2) Em **Entrada** digite  $y=4$  e tecla "Enter". Será exibida uma reta  $a$  que não intercepta  $c$ ;
- 3) Clique em  **Ponto** e marque um ponto  $A$  sobre a  $a$ . Em Janela de Álgebra, altere as coordenadas de  $A$  para  $(0, 4)$ ;
- 4) Clique em  **Reta Tangente** e, em seguida clique no ponto  $A$  e na circunferência  $a$ . Serão exibidas duas retas  $b$  e  $d$ , passando por  $A$  e tangentes à circunferência  $a$ ;
- 5) Clique em  **Interseção de Dois Objetos**, clique sobre a reta  $b$  e sobre a circunferência  $c$  (será exibido o ponto  $B$ ). Clique sobre a reta  $d$  e sobre a circunferência  $c$  (será exibido o ponto  $C$ );
- 6) Clique em  **Reta Perpendicular**, clique sobre o ponto  $B$  e sobre a reta  $b$  (será exibida a reta  $e$ ). Clique sobre o ponto  $C$  e sobre a reta  $d$  (será exibida a reta  $f$ );

- 7) Clique em  **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos** e clique nos pontos  $A$  e  $B$  (será exibida uma circunferência  $g$  de centro  $A$  passando por  $B$  e  $C$ );
- 8) Clique em  **Reta Perpendicular**, clique sobre o ponto  $D$  e sobre a reta  $a$  (será exibida a reta  $h$ ). Clique sobre o ponto  $E$  e sobre a reta  $a$  (será exibida a reta  $i$ );
- 9) Clique em  **Interseção de Dois Objetos** e clique sobre as retas  $h$  e  $e$  (será exibido o ponto  $F$ ). Em seguida, clique sobre as retas  $f$  e  $i$  (será exibido o ponto  $G$ ). A Figura 110 nos mostra a construção obtida;

Figura 110 – Construindo o Problema 9



Fonte: Autor

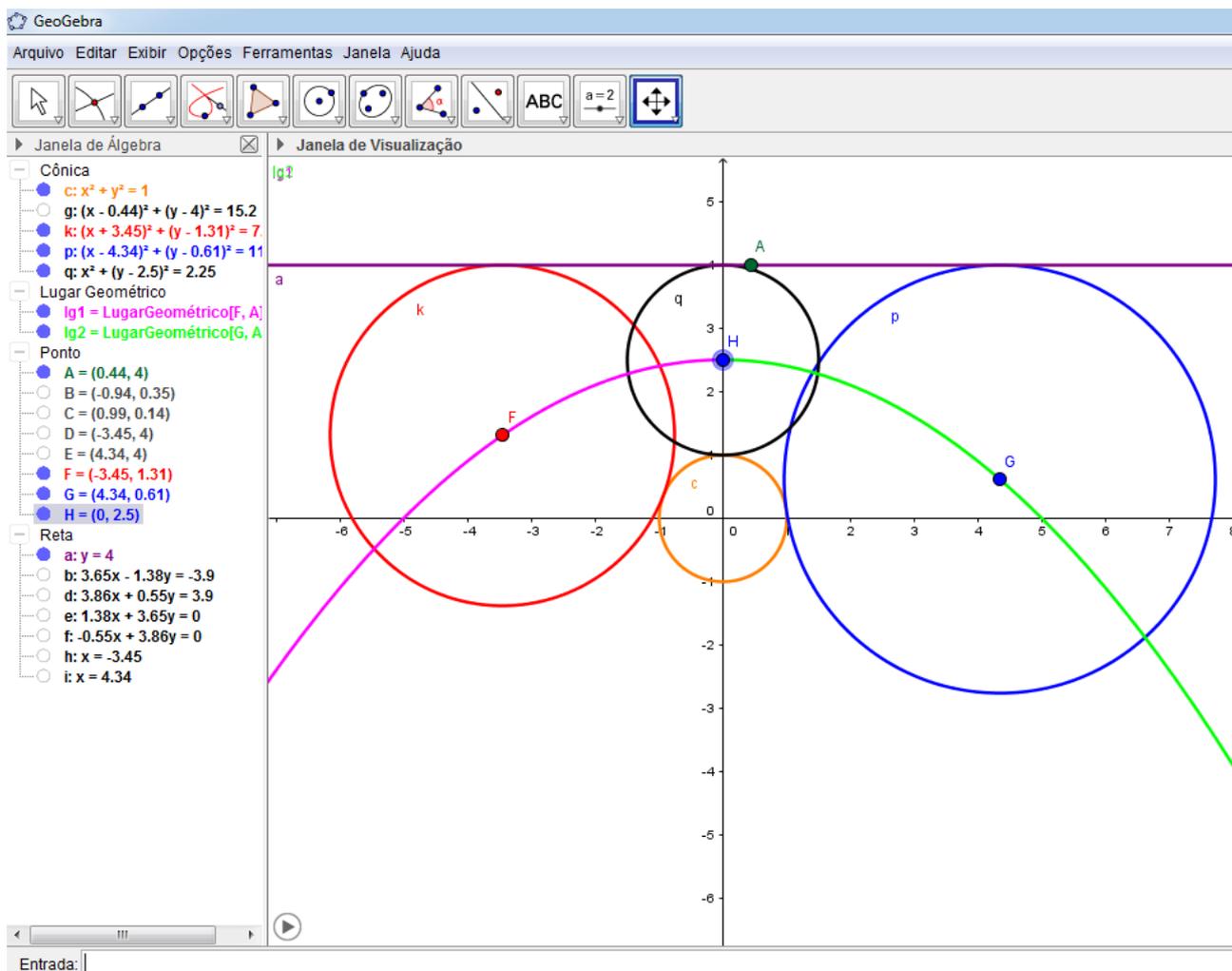
- 10) Clique em  **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos** e clique nos pontos  $F$  e  $B$  (será exibida uma circunferência  $k$  de centro  $F$  passando por  $B$  e  $D$ ). Em seguida, clique nos pontos  $G$  e  $C$  (será exibida uma circunferência  $p$  de centro  $G$  passando por  $C$  e  $E$ );
- 11) Clique em  **Mover** e mova o ponto  $A$  sobre a reta  $a$  para notar a variação das circunferências  $k$  e  $p$ ;

- 12) Clique em  Lugar Geométrico clique no ponto  $F$  e no ponto  $A$  (será exibido o lugar geométrico  $lg_1$  dos pontos  $F$  quando o ponto  $A$  varia sobre a reta  $a$ ). Em seguida, clique no ponto  $G$  e no ponto  $A$  (será exibido o lugar geométrico  $lg_2$  dos pontos  $G$  quando o ponto  $A$  varia sobre a reta  $a$ );
- 13) Em Janela de Álgebra, clique em  para ocultar os pontos  $B, C, D$  e  $E$ , as retas  $b, d, e, f, h$  e  $i$  e a circunferência  $g$ .
- 14) Em Entrada, digite `Círculo[(0,2.5), 1.5]` e tecla "Enter" (será exibida uma circunferência  $q$  de centro  $(0; 2,5)$  e raio  $1,5$ , tangente à reta  $a$  e à circunferência  $c$ . Em seguida, digite `H=(0,2.5)` e tecla "Enter" (será exibido o ponto  $H$ , centro de  $q$ ). Dessa forma, o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes (exteriormente) ao círculo  $C$  e à reta  $a$  é a união de  $lg_1, lg_2$  e  $H$ ;
- 15) Clique com o botão direito sobre cada objeto restante e altere a cor e estilo conforme sua preferência. A Figura 111 nos mostra essa construção. Clique com o botão direito sobre o ponto  $A$  e clique em "Animar". Após isso é possível parar a animação clicando  na Janela de Álgebra. A Figura 111 nos mostra essa construção.

Ao mover o ponto  $A$  sobre a reta  $a$ , algumas conjecturas podem ser criadas:

- A união do ponto  $H$  com os lugares geométricos dos pontos  $F$  e  $G$  lembra uma parábola de vértice em  $H$ ;
- Quanto maior for a abscissa do ponto  $A$ , maior será a aproximação do ponto  $F$  em relação ao ponto  $H$ ;
- Quanto menor for a abscissa do ponto  $A$ , maior será a aproximação do ponto  $G$  em relação ao ponto  $H$ ;
- A diretriz da possível parábola é a reta  $y = 5$ ;
- O foco da possível parábola é o ponto  $(0, 0)$ .

Figura 111 – Lugar geométrico do Problema 9

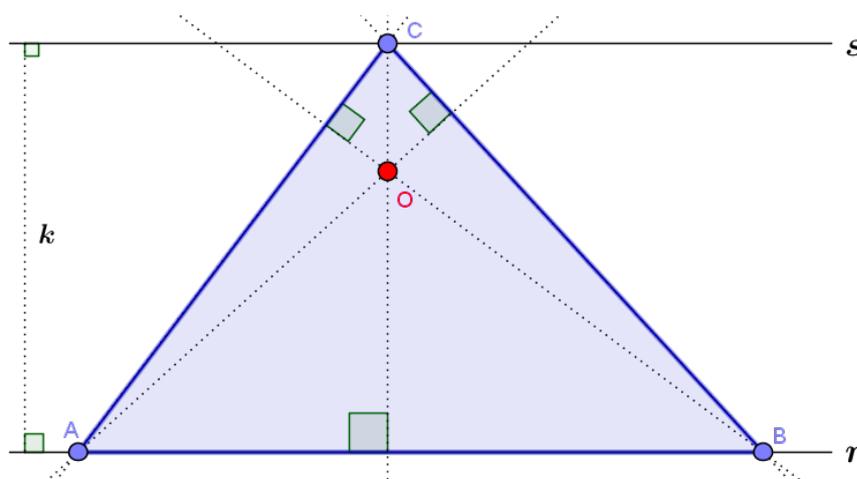


Fonte: Autor

### 3.3.5 Problema 10

**Problema 10:** (IME) *Um triângulo  $ABC$  tem base  $AB$  fixa sobre uma reta  $r$ . O vértice  $C$  desloca-se ao longo de uma reta  $s$ , paralela a  $r$  e a uma distância  $k$  da mesma. Determine a equação da curva descrita pelo ortocentro do triângulo  $ABC$ .*

Figura 112 – Problema 10

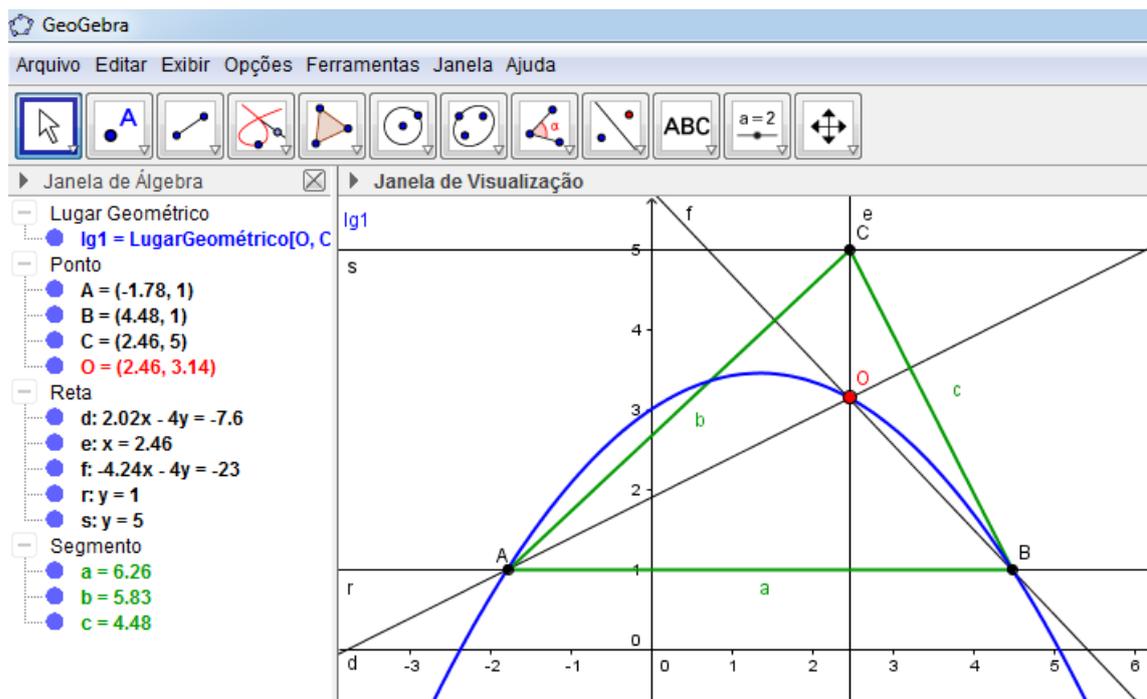


Fonte: Autor

Roteiro de desenvolvimento:

- 1) Em Entrada, digite  $r : y=1$  e aperte "Enter". Em seguida, digite  $s : y=5$  e aperte "Enter". Serão exibidas duas retas paralelas  $r$  e  $s$ ;
- 2) Clique em  Ponto e marque dois pontos  $A$  e  $B$  sobre a reta  $r$  e um ponto  $C$  sobre a reta  $s$ ;
- 3) Clique em  Segmento e clique e construa os segmentos  $AB$ ,  $AC$  e  $BC$ ;
- 4) Clique em  Reta Perpendicular e construa a reta perpendicular ao segmento  $AB$  passando por  $C$ , a reta perpendicular ao segmento  $BC$  passando por  $A$  e a reta perpendicular ao segmento  $AC$  passando por  $B$ . Para isso, basta clicar em cada um dos vértices do triângulo  $ABC$  e no segmento oposto do respectivo vértice. Essas são as três retas suportes das alturas do triângulo  $ABC$ ;
- 5) Clique em  Ponto e marque a interseção das três retas construídas no item 4). Renomeie esse ponto para  $O$ . Esse é o ortocentro do triângulo  $ABC$ ;
- 6) Clique em  Mover e mova o ponto  $C$  sobre a reta  $s$  para observar a variação do ortocentro  $O$  do triângulo  $ABC$ ;
- 7) Clique em  Lugar Geométrico e nos pontos  $O$  e  $C$ . Será gerado o lugar geométrico  $lg1$  dos pontos  $O$  quando  $C$  varia sobre  $s$ ;
- 8) Faça as alterações de cores e estilo a seu critério. A Figura 113 nos mostra a construção obtida.

Figura 113 – Lugar geométrico do Problema 10



Fonte: Autor

Ao mover o ponto  $C$  sobre a reta  $s$ , algumas conjecturas podem ser criadas:

- O lugar geométrico dos pontos  $O$  lembra uma parábola que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , cujo vértice parece pertencer à mediatriz do segmento  $AB$ ;
- Se o triângulo  $ABC$  é acutângulo, então o ponto  $O$  é sempre interno a ele;
- Quando a reta  $e$  passa pelo ponto  $A$ , o ponto  $O$  coincide com o mesmo;
- Quando a reta  $e$  passa pelo ponto  $B$ , o ponto  $O$  coincide com o mesmo;
- Se o triângulo  $ABC$  é obtusângulo, então o ponto  $O$  é sempre externo a ele.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se neste trabalho, dez problemas geométricos relacionados à geometria plana. Através deles, percebe-se que, além da visualização, o *software* GeoGebra permitiu explorações diferentes das usualmente presentes nas metodologias tradicionais de ensino, tais como dinamismo e elaboração de conjecturas.

Observamos que todas as construções geométricas realizadas nos dez problemas deste trabalho, objetivam, através da visualização, a compreensão dos problemas, além de criar possibilidades de se obter algumas estimativas de resultados e novas conjecturas sobre os mesmos. Elas nos mostram também o quanto o *software* GeoGebra é importante no processo resolução de problemas geométricos.

Vale ressaltar que essas técnicas já estão sendo utilizadas por mim, desde o mês de junho do presente ano, durante a realização das aulas no PIC-OBMEP NA ESCOLA<sup>1</sup>, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Roraima, Campus Amajari e Campus Boa Vista Centro.

Tendo em vista que existe o *software* GeoGebra na versão tridimensional, este trabalho pode ser ampliado para problemas análogos na geometria espacial. Além disso, pode-se realizar uma pesquisa aplicando-se em salas de aula do ensino básico as técnicas apresentadas nesta dissertação, com o objetivo de mensurar a contribuição de tais técnicas utilizando o GeoGebra no processo de resolução de problemas geométricos.

O arquivo final desta dissertação será submetido para publicação eletrônica no Sistema de Controle Acadêmico (SAC), do PROFMAT, e na biblioteca central da Universidade Federal de Roraima. Além disso, pretende-se produzir um artigo baseado nesta dissertação e submetê-lo à revista eletrônica do Centro de Ciências e Tecnologia (CCT), da UFRR.

---

<sup>1</sup> Programa de Iniciação Científica da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, disponível em: <http://www.obmep.org.br/na-escola.htm>

## REFERÊNCIAS

- ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados**: análise de uma experiência. TESE (DOUTORADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA), UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA, Rio Claro, 2005.
- BARBOSA, J. L. M. **GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA**: COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273 p.
- BORGES, R. d. C. **Software de Geometria Dinâmica na Formação Continuada do Professor de Matemática**: estudo das cônicas. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT), UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE, Rio Branco, 2014.
- DELATORRE, W. d. O. **Demonstrações Geométricas com Auxílio de Softwares de Geometria Dinâmica como uma Metodologia de Ensino para a Geometria**. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT), UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO, Vitória, 2013.
- GUEDES, P. C. C. **Algumas Aplicações do Software Geogebra ao Ensino da Geometria Analítica**. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT), UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO, Vitória, 2013.
- LIMA, E. L. **MATEMÁTICA E ENSINO**: COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, CPM 16, v.1, 2003.
- LIMA, E. L. et al. **A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**: COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 3. 249 p.
- LIMA, E. L. et al. **A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**: COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1. 237 p.
- LIMA, E. L. et al. **A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO**: COLEÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. v. 4. 384 p.
- MENK, L. F. F. **Contribuições de um Software de Geometria Dinâmica na Exploração de Problemas de Máximos e Mínimos**. DISSERTAÇÃO (CURSO DE MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA), UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Londrina, 2005.
- NETO, A. C. M. **GEOMETRIA**: COLEÇÃO PROFMAT. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2013. v. 1. 471 p.
- OLIVEIRA, A. G. d. **Funções e Geometria**: o uso de ambiente de geometria dinâmica como subsídio para a caracterização das funções quadráticas. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT), UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ, Curitiba, 2013.
- OLIVEIRA, F. D. M. **O Software GeoGebra como Ferramenta para o Ensino da Geometria Analítica**. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT), UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO, Mossoró, 2014.

OLIVEIRA, J. d. S. **Aplicações da Trigonometria nas Ciências**. DISSERTAÇÃO (MESTRADO EM MATEMÁTICA - PROFMAT), UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA, Boa Vista, 2015.

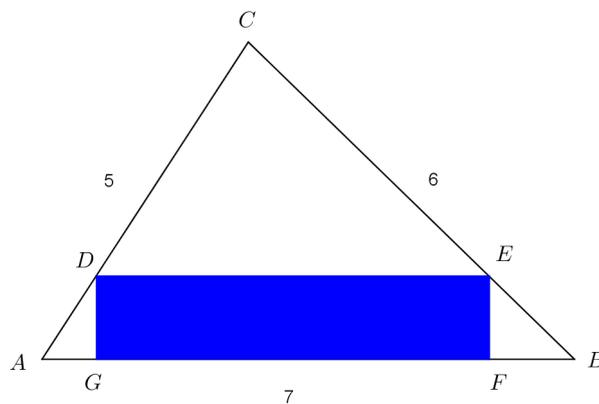
## **Apêndices**

## A ALGUMAS SOLUÇÕES DOS PROBLEMAS PROPOSTOS NO CAPÍTULO 3

Neste apêndice apresenta-se algumas soluções dos problemas propostos no capítulo 3. Através delas pode-se verificar a veracidade de algumas conjecturas levantadas no capítulo 3.

**Problema 1:** *Dentre todos os retângulos inscritos no triângulo  $DEF$  com base sobre o lado  $AB$ , determine a altura daquele que tem área máxima. Qual é a área máxima desse retângulo?*

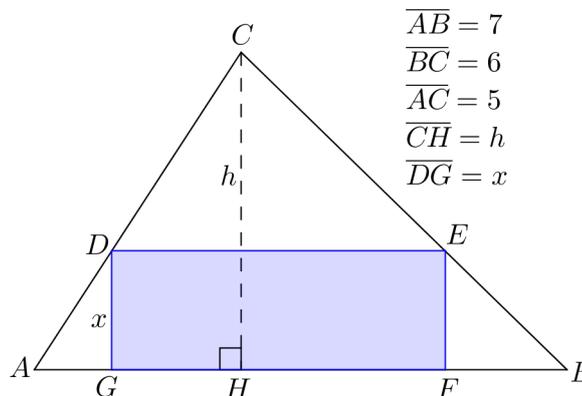
Figura 114 – Retângulo  $DEFG$  inscrito no triângulo  $ABC$



Fonte: Autor

### UMA SOLUÇÃO:

Figura 115 – Retângulo  $DEFG$  inscrito no triângulo  $ABC$  com elementos



Fonte: Autor

Seja  $\overline{DG} = x$  a altura do retângulo  $DEFG$ , Figura 115, cuja base  $GF$  está sobre o lado  $AB$ . Seja também  $\overline{CH} = h$  a altura do triângulo  $ABC$ , relativa ao lado  $AB$ .

Podemos encontrar a área do triângulo  $ABC$  utilizando a fórmula de Herão:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Como  $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+5+7}{2} = 9$ , então:

$$S = \sqrt{9(9-6)(9-5)(9-7)} = 6\sqrt{6} \approx 14,7. \quad (\text{A.1})$$

Por outro lado,

$$S = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = \frac{7h}{2}. \quad (\text{A.2})$$

Substituindo (A.1) em (A.2), vem:

$$\frac{7h}{2} = 6\sqrt{6} \Rightarrow h = \frac{12\sqrt{6}}{7} \approx 4,2.$$

Como os triângulos  $ABC$  e  $CDE$  são semelhantes (caso AAA), teremos:

$$\frac{\overline{CH} - \overline{DG}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CH}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7} - x}{\overline{DE}} = \frac{\frac{12\sqrt{6}}{7}}{7} \Rightarrow \overline{GF} = 7 - \frac{49\sqrt{6}x}{72}.$$

Daí, a área  $f$  do retângulo  $DEFG$ , em função de  $x$ , é dada pela lei:

$$f(x) = 7x - \frac{49\sqrt{6}x^2}{72}, \forall x \in \left[0, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right].$$

Como  $f$  é uma função quadrática, cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, então  $f$  tem um valor máximo. Isso significa que basta encontrarmos o vértice da parábola, que é dado por  $V = (X_v, Y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ , sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  os coeficientes de  $F$  e  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Assim:

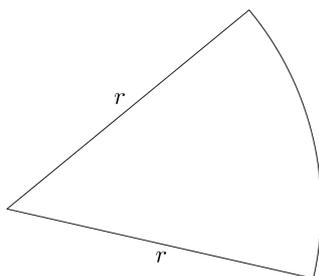
$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V = \left(\frac{6\sqrt{6}}{7}, 3\sqrt{6}\right).$$

Tendo em vista que  $X_v = \frac{6\sqrt{6}}{7} \in \left[0, \frac{12\sqrt{6}}{7}\right]$ , então a altura e a área que respondem nosso problema são, respectivamente,  $\frac{6\sqrt{6}}{7} \approx 2,1$  e  $3\sqrt{6} \approx 7,35$ . Nota-se ainda que a área do retângulo encontrado é a metade da área do triângulo  $ABC$ , que a altura do retângulo encontrado é a metade da altura do triângulo  $ABC$  em relação ao lado  $AB$  e que a base  $GF$  ( $\overline{GF} = 7 - \frac{49\sqrt{6} \cdot \left(\frac{6\sqrt{6}}{7}\right)}{72} = 3,5$ ) do retângulo encontrado é a metade de  $AB$ .

**Problema 2:** Um jardineiro deve construir um canteiro com a forma de setor circular. Ele dispõe de 100 metros de fio para cercá-lo.

Figura:

Figura 116 – Imagem ilustrativa do canteiro com a forma de setor circular



Fonte: Eureka! N° 18, 2003<sup>1</sup>, adaptado

*Qual deve ser o valor do raio do círculo para que o canteiro tenha área máxima?  
Qual é a área máxima?*

**SOLUÇÃO DE GLAUBER MORENO BARBOSA (RIO DE JANEIRO - RJ)<sup>2</sup>:**

Primeiramente nomeia-se os elementos do setor circular: (a)  $\theta$  o ângulo do setor circular, (b)  $S$ , área máxima, (c)  $2p$ , o perímetro do setor circular, (d)  $k$ , comprimento do arco do setor circular.

Comprimento da circunferência =  $2\pi r$ .

Fazendo uma regra de três:

$$\frac{k}{2\pi r} = \frac{\theta}{360} \Rightarrow \theta = \frac{360k}{2\pi r} \Rightarrow \theta = \frac{180k}{\pi r}. \quad (\text{A.3})$$

Conforme o enunciado, o jardineiro dispõe de 100 metros de fio para cercar o setor circular. Somando-se os segmentos referentes aos raios e ao arco do setor circular, tem-se:

$$2p = 2r + k = 100 \Rightarrow k = 100 - 2r. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo-se a relação (A.3) em (A.4) tem-se:

$$\theta = \frac{180k}{\pi r} \Rightarrow \theta = \frac{180(100 - 2r)}{\pi r}. \quad (\text{A.5})$$

Com (A.5) determina-se a área do setor circular com uma relação entre a área do setor circular e a área da circunferência:

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360} \Rightarrow S = \frac{\theta \pi r^2}{360}. \quad (\text{A.6})$$

<sup>1</sup> Disponível em: [http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista\\_eureka/docs/eureka18.pdf](http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka18.pdf), pg.58. Acesso em 22/12/15.

<sup>2</sup> Disponível em: [http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista\\_eureka/docs/eureka20.pdf](http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/eureka20.pdf), pg. 54. Acesso em 22/12/15.

Substituindo-se o  $\theta$  em (A.5) na relação (A.6), tem-se uma nova relação para a área do setor circular:

$$S = \frac{\theta\pi r^2}{360} = \frac{180(100 - 2r)\pi r^2}{360} = \frac{180(100 - 2r)r}{360} = \frac{(100 - 2r)r}{2} \Rightarrow S(r) = -r^2 + 50r. \quad (\text{A.7})$$

Observando-se a função para a área  $S$  em (A.7), que é uma função quadrática, com  $a < 0$ , e logo tem-se um máximo para a função. Assim  $S(r)$  é máximo em (A.7) para:

$$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25. \quad (\text{A.8})$$

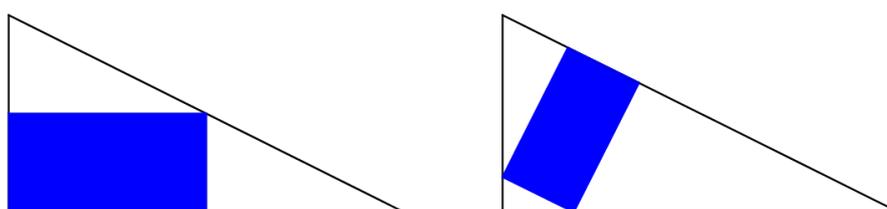
Para o valor de  $r$  em (A.8), tem-se a área máxima da função  $S(r)$  em (A.8):

$$S = -(25)^2 + 50.(25) = -625 + 1250 \Rightarrow S = 625.$$

Assim, se o raio para se ter área máxima é  $25 \text{ m}$ , então a área máxima correspondente é  $625 \text{ m}^2$ .

**Problema 3 (LIMA et al. (2006b)-adap.):** *Numa vidraçaria há um pedaço de espelho, sob a forma de um triângulo retângulo de lados  $60 \text{ cm}$ ,  $80 \text{ cm}$  e  $1 \text{ m}$ . Quer-se, a partir dele, recortar um espelho retangular com a maior área possível. A fim de economizar corte, pelo menos um dos lados do retângulo deve estar sobre um lado do triângulo.*

Figura 117 – Problema 3

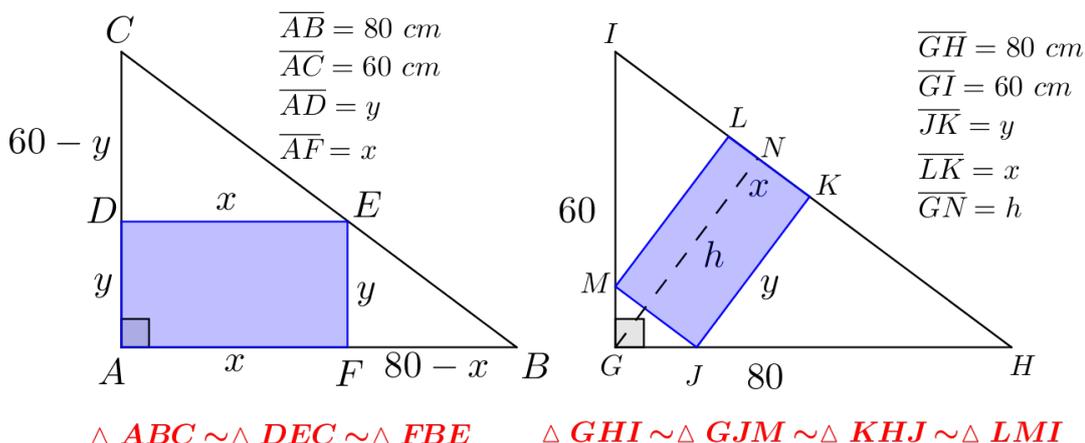


Fonte: Autor

As posições sugeridas são as da Figura 117. Em cada caso, determine qual o retângulo de maior área e compare os dois resultados.

**UMA SOLUÇÃO (LIMA et al. (2007)-adap.):**

Figura 118 – Problema 3 com elementos



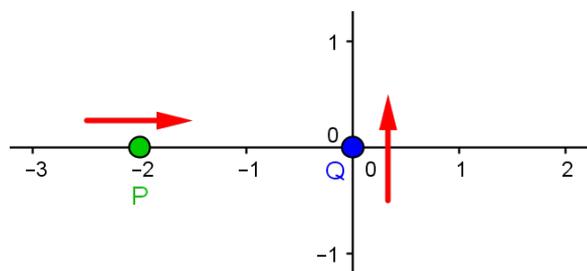
Fonte: Autor

- a) Se os lados são  $x$  e  $y$  (medidos em centímetros), temos, pela semelhança dos triângulos brancos ( $\triangle DEC \sim \triangle FBE$ ),  $\frac{60-y}{x} = \frac{y}{80-x}$ . Daí,  $3x + 4y = 240$  e  $y = 60 - \frac{3}{4}x$ . A área é  $xy = x(60 - \frac{3}{4}x) = -\frac{3}{4}x^2 + 60x$  e é máxima para  $x = -\frac{b}{2a} = 40$ . Nesse caso,  $y = 30$ . O retângulo da maior área tem lados iguais a 40 cm e 30 cm e área igual a  $1200 \text{ cm}^2$ .
- b) Na segunda figura, seja  $x$  o lado do retângulo apoiado na hipotenusa e  $y$  o outro lado. A altura  $\overline{GN}$  do triângulo retângulo é  $h = \frac{\overline{GI} \cdot \overline{GH}}{\overline{HI}} = \frac{60 \cdot 80}{100} = 48 \text{ cm}$ . Usando semelhança de triângulos, temos  $\frac{x}{100} = \frac{48-y}{48}$ . Daí,  $y = \frac{48(100-x)}{100}$ . A área do retângulo é  $xy = \frac{48x(100-x)}{100}$ , cujo valor máximo ocorre para  $x = 50 \text{ cm}$ , com área igual a  $1200 \text{ cm}^2$ .

A conclusão é que os dois modos de apoiar o retângulo sobre um dos lados do triângulo conduzem a retângulos com a mesma área máxima (igual à metade da área do triângulo).

**Problema 4 (LIMA et al. (2006b)):** No instante  $t = 0$  o ponto  $P$  está em  $(-2, 0)$  e o ponto  $Q$  em  $(0, 0)$ . A partir desse instante,  $Q$  move-se para cima com velocidade de 1 unidade por segundo e  $P$  move-se para a direita com velocidade de 2 unidades por segundo. Qual é o valor da distância mínima entre  $P$  e  $Q$ ?

Figura 119 – Problema 4



Fonte: Autor

**UMA SOLUÇÃO:**

No instante  $t$ ,  $Q$  está em  $(0, t)$  e  $P$  está em  $(2t - 2, 0)$ . A distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  é dada por  $d(P, Q) = \sqrt{[0 - (2t - 2)]^2 + (t - 0)^2} = \sqrt{5t^2 - 8t + 4}$ . Para que  $d(P, Q)$  seja mínima, devemos ter que  $5t^2 - 8t + 4$  seja mínima. Daí, isso ocorre no instante  $t = \frac{-b}{2a} = 0,8$ . Portanto,  $d(P, Q) = \sqrt{5 \cdot (0,8)^2 - 8 \cdot (0,8) + 4} = \sqrt{0,8} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  é a distância procurada.

**Problema 5 (LIMA et al. (2006b)):** *Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?*

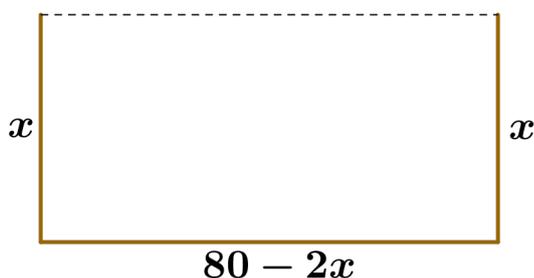
Figura 120 – Problema 5



Fonte: Autor

**UMA SOLUÇÃO:**

Figura 121 – Área circundada do Problema 5



Fonte: Autor

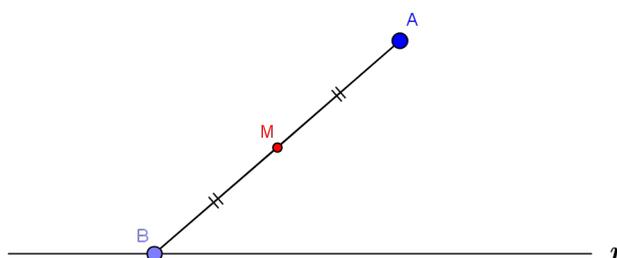
Seja  $x$  a medida de cada lado do retângulo perpendicular ao rio. Como o fazendeiro quer utilizar 80 metros de cerca, então a medida do lado paralelo ao rio é  $(80 - 2x)$ . Assim, se  $S$  é a área da região retangular, então:

$$S(x) = x \cdot (80 - 2x) \Rightarrow S(x) = -2x^2 + 80x \quad (\text{A.9})$$

De A.9, observamos que  $S$  é uma função quadrática em  $x$  e deve ser máxima em  $x = \frac{-b}{2a}$ , onde  $a = -2$  e  $b = 80$ . Daí,  $\frac{-80}{2 \cdot (-2)} = \frac{-80}{-4} = 20$  e, conseqüentemente,  $80 - 2x = 80 - 2 \cdot 20 = 40$ . Portanto, a cerca deve ter os lados perpendiculares ao rio medindo 20 metros e o lado paralelo ao rio medindo 40 metros.

**Problema 6 (NETO (2013)):** São dados no plano uma reta  $r$  e um ponto  $A$ , com  $A \notin r$ . O ponto  $B$  varia em  $r$ . Encontre, com justificativa, o LG descrito pelo ponto médio do segmento  $AB$ .

Figura 122 – Problema 6

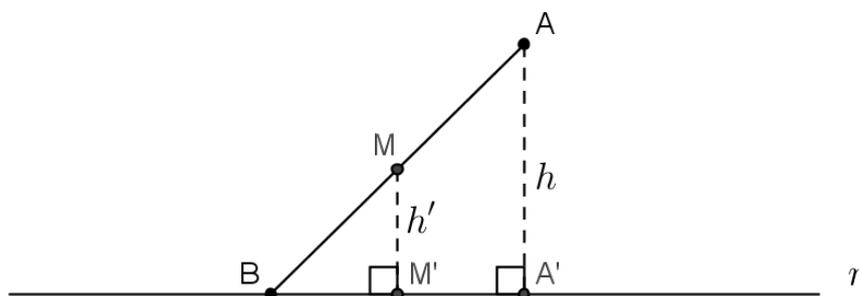


Fonte: Autor

### UMA SOLUÇÃO:

Consideremos, num mesmo plano, uma reta  $r$ , um ponto  $A$  (com  $A \notin r$ ), um ponto  $B$  que varia em  $r$ , um ponto médio  $M$  de  $AB$ , e os pontos  $A'$  (projeção ortogonal do ponto  $A$  sobre  $r$  tal que  $\overline{AA'} = h$ ) e  $M'$  (projeção ortogonal do ponto  $M$  sobre  $r$  tal que  $\overline{MM'} = h'$ ). A Figura 123 nos mostra essa construção.

Figura 123 – Construção do Problema 6



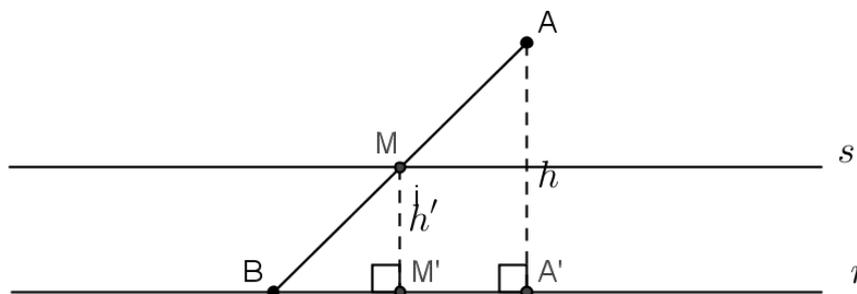
Fonte: Autor

Os triângulos  $AA'B$  e  $MM'B$ , da Figura 123, são semelhantes (caso AAA). Daí,

$$\frac{\overline{AA'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MM'}}{\overline{MB}} \Rightarrow \frac{h}{AB} = \frac{h'}{MB} \Rightarrow \frac{h}{AB} = \frac{h'}{\frac{AB}{2}} \Rightarrow h' = \frac{h}{2}.$$

Isso significa que, quando variamos o ponto  $B$  em  $r$ , o segmento  $MM'$  mantém a metade do comprimento do segmento  $AA'$ . Portanto, o LG descrito pelo ponto  $M$  é uma reta  $s$  paralela a  $r$ , como mostra a Figura 124.

Figura 124 – LG de M do Problema 6



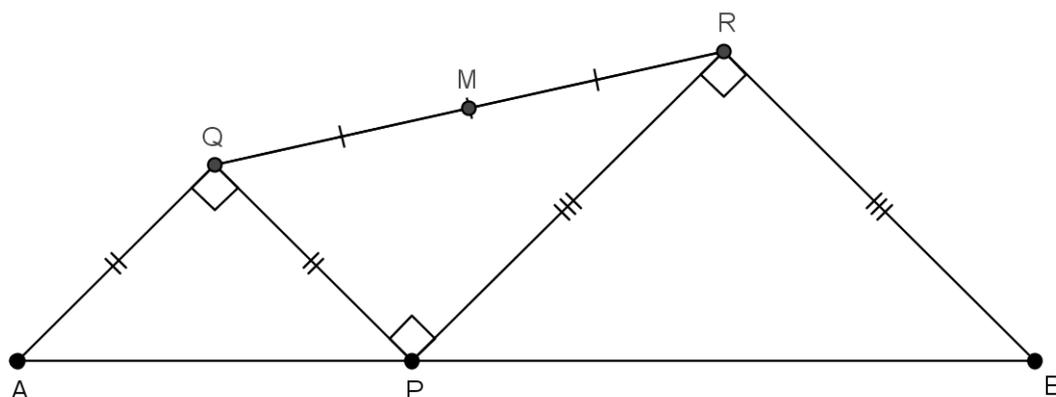
Fonte: Autor

**Problema 7 (NETO (2013)):** É dado no plano um segmento  $AB$  e um ponto  $P$  sobre ele. De um mesmo lado da reta  $\overleftrightarrow{AB}$ , construímos os triângulos retângulos isósceles  $APQ$  e  $BPR$ , de hipotenusa  $AP$  e  $BP$ , respectivamente. Em seguida, marcamos o ponto médio  $M$  do segmento  $QR$ . Encontre o LG descrito pelo ponto  $M$ , à medida que  $P$  varia sobre o segmento  $AB$ .

#### UMA SOLUÇÃO:

A Figura 125 nos fornece os dados geométricos do Problema 7.

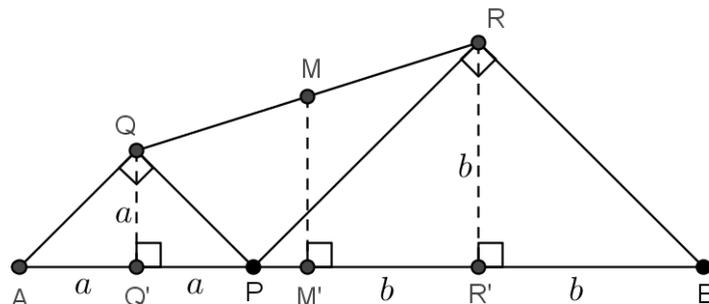
Figura 125 – Construção do Problema 7



Fonte: Autor

Na Figura 126 foram denotados por  $Q'$ ,  $M'$  e  $R'$  as projeções ortogonais dos pontos  $Q$ ,  $M$  e  $R$  sobre o segmento  $AB$ , respectivamente. Como os triângulos  $APQ$  e  $BPR$  são retângulos isósceles de hipotenusa  $AP$  e  $BP$ , respectivamente, então  $\overline{QQ'} = \overline{AQ'} = \overline{PQ'} = a$  e  $\overline{RR'} = \overline{PR'} = \overline{BR'} = b$ .

Figura 126 – Construção do Problema 7 com elementos especiais



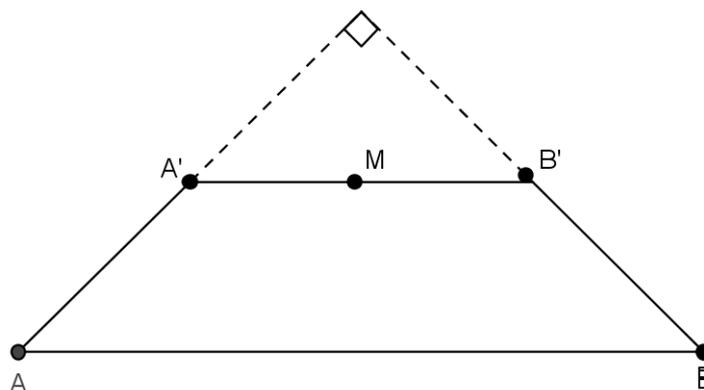
Fonte: Autor

Como o quadrilátero  $QRR'Q'$  é um trapézio (retângulo) e  $M$  é ponto médio do segmento  $QR$ , então  $\overline{MM'} = \frac{\overline{QQ'} + \overline{RR'}}{2} = \frac{a + b}{2} = \frac{2a + 2b}{4} = \frac{\overline{AB}}{4}$  (constante!).

Quando  $P = A = Q$  tem-se que  $M = A'$  é ponto médio de  $AR$  e quando  $P = B = R$  tem-se que  $M = B'$  é ponto médio de  $BQ$ . Nota-se que os triângulos retângulos  $ARB$  e  $AQB$  são congruentes.

Portanto, o LG descrito pelo ponto  $M$ , à medida que  $P$  varia sobre o segmento  $AB$  é o segmento  $A'B'$ , paralelo a  $AB$  tal que  $\overline{A'B'} = \frac{\overline{AB}}{2}$ . A Figura 127 nos mostra esse LG.

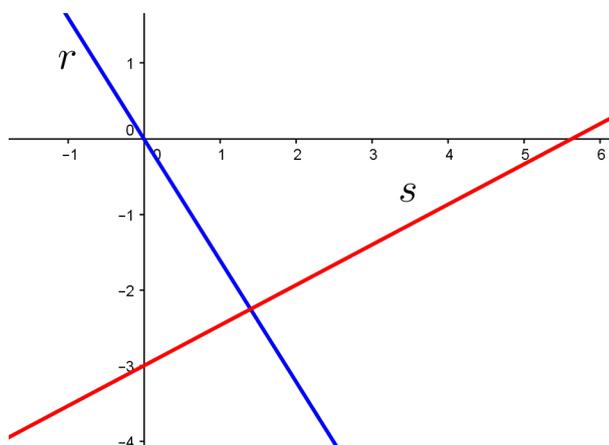
Figura 127 – LG de M do Problema 7



Fonte: Autor

**Problema 8:** São dadas no plano uma família de retas  $r : y = k_1x$  e uma família de retas  $s : y = k_2x - 3$ , de modo que  $k_1$  e  $k_2$  são números reais, distintos, tais que  $2k_1^2 + 3k_2^2 = 6$ . Determine o lugar geométrico dos pontos de interseção das retas  $r$  e  $s$ .

Figura 128 – Problema 8



Fonte: Autor

**UMA SOLUÇÃO:**

Observe que  $k_1$  e  $k_2$  são os coeficientes angulares das retas  $r$  e  $s$ , respectivamente. Para a solução de nosso problema, iremos utilizar as equações (A.10), (A.11) e (A.12):

$$y = k_1x \quad (\text{A.10})$$

$$y = k_2x - 3 \quad (\text{A.11})$$

$$2k_1^2 + 3k_2^2 = 6 \quad (\text{A.12})$$

As equações (A.10) e (A.11) nos levam aos seguintes resultados:

$$y = k_1x \Rightarrow y^2 = k_1^2x^2 \Rightarrow 2k_1^2 = 2\frac{y^2}{x^2} \quad (\text{A.13})$$

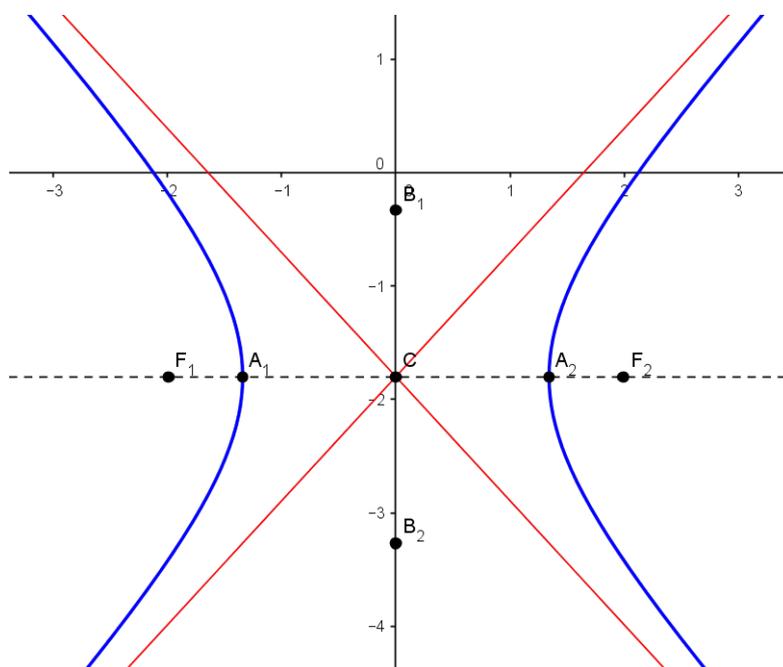
$$y = k_2x - 3 \Rightarrow (y + 3)^2 = k_2^2x^2 \Rightarrow 3k_2^2 = 3\frac{(y + 3)^2}{x^2} \quad (\text{A.14})$$

Substituindo (A.13) e (A.14) em (A.12), vem:

$$2\frac{y^2}{x^2} + 3\frac{(y + 3)^2}{x^2} = 6 \Rightarrow 6x^2 - 5y^2 - 18y - 27 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{9}{5}} - \frac{(y + \frac{9}{5})^2}{\frac{54}{25}} = 1 \quad (\text{A.15})$$

Isso significa que o gráfico da equação (A.15) é uma hipérbole com eixo focal  $y = -\frac{9}{5}$ , cujo centro é  $C = (0, -\frac{9}{5})$ , de vértices  $A_1 = (-\frac{3}{5}\sqrt{5}, -\frac{9}{5})$  e  $A_2 = (\frac{3}{5}\sqrt{5}, -\frac{9}{5})$  sobre o eixo focal, de vértices  $B_1 = (0, -\frac{9}{5} + \frac{3}{5}\sqrt{6})$  e  $B_2 = (0, -\frac{9}{5} - \frac{3}{5}\sqrt{6})$  sobre o eixo normal, focos  $F_1 = (-\frac{3}{5}\sqrt{11}, -\frac{9}{5})$  e  $F_2 = (\frac{3}{5}\sqrt{11}, -\frac{9}{5})$  e assíntotas  $\sqrt{30}x - 5y = 9$  e  $\sqrt{30}x + 5y = -9$ . A Figura 129 nos mostra a hipérbole obtida.

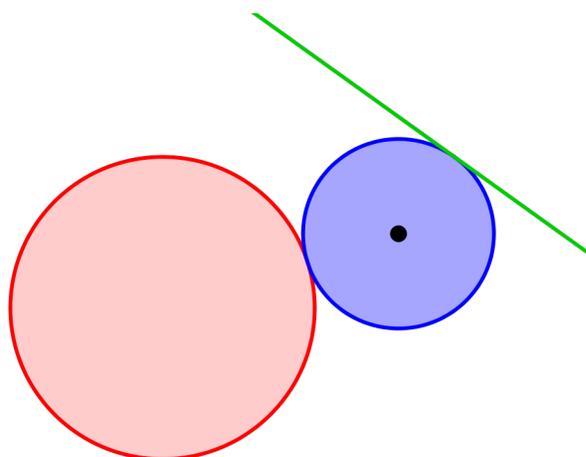
Figura 129 – Hipérbole do Problema 8



Fonte: Autor

**Problema 9:** (IME-adaptada) *Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num mesmo plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes (exteriormente) ao círculo dado e à reta dada.*

Figura 130 – Problema 9



Fonte: Autor

**UMA SOLUÇÃO:**

Na Figura 131, temos fixos, num plano, um círculo  $\lambda_1$  (de centro  $A$  e raio  $r_1$ ), uma reta  $r$  que não intercepta  $\lambda_1$ , uma reta  $s$  paralela a  $r$  tal que a distância entre elas é  $r_1$  (com  $d(A, s) > d(A, r)$ ) e uma reta  $t$  (perpendicular a  $r$  e a  $s$ ) que passa por  $A$  e intercepta  $r$ ,  $s$  e  $\lambda_1$  nos pontos  $D$ ,  $L$  e  $Q$ , respectivamente. O ponto  $C$  varia sobre a reta  $r$  de tal maneira que o círculo  $\lambda_2$  (de centro  $B$  e raio  $r_2$ ) seja tangente exteriormente ao círculo  $\lambda_1$  (no ponto  $G$ ) e à reta  $r$  (no ponto  $C$ ). Por último, a reta que passa por  $B$  e  $C$  intercepta  $s$  no ponto  $E$  e  $\overline{DQ} = k$ .

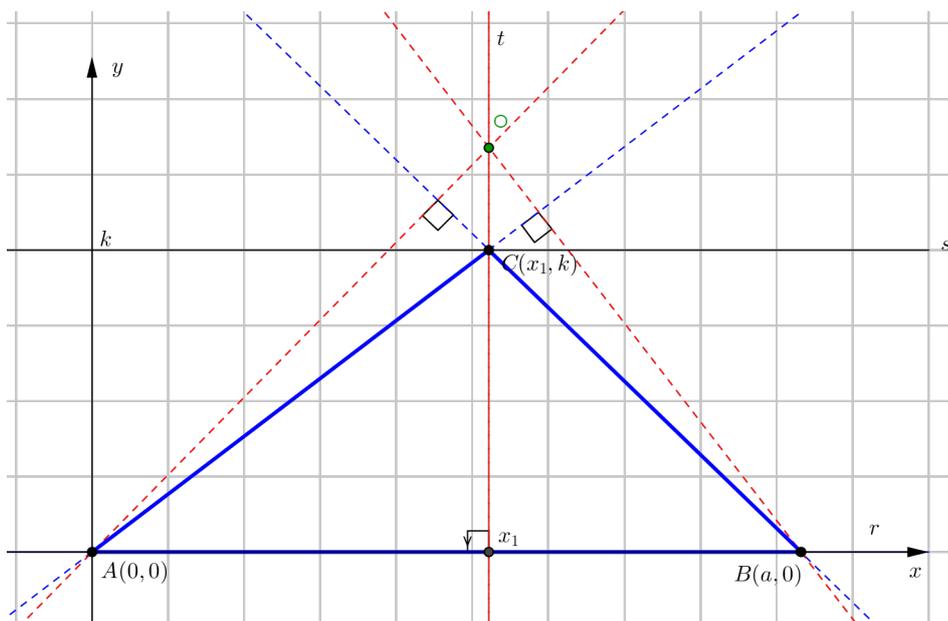
A construção da Figura 131 é de grande importância, pois torna simples e elegante a solução de nosso problema. Dessa construção geométrica tiramos que:

$$d(A, B) = r_1 + r_2 = d(B, E) = d(B, s).$$

Assim, à medida que o ponto  $C$  varia sobre a reta  $r$ , o ponto  $B$  varia e de tal forma que  $d(A, B) = d(B, s)$ . Portanto, o lugar geométrico dos pontos  $B$  do plano é uma parábola, cujo foco é o ponto  $A$  e a diretriz é a reta  $s$ . O vértice  $V$  da parábola, obtido quando  $C = D$ , é o ponto médio do segmento  $DQ$  tal que  $d(A, V) = \frac{k}{2} + r_1$ .



Figura 133 – Construção geométrica do Problema 10



Fonte: Autor

Sem perda de generalidade, considere, no plano cartesiano, os pontos  $A = (0, 0)$  e  $B = (a, 0)$  (com  $a > 0$  fixo) sobre a reta  $r$  (eixo dos  $x$ ) e um ponto  $C = (x_1, k)$  variável sobre a reta  $s : y = k$  (com  $k > 0$  fixo). Dessa forma  $t : x = x_1$  é a reta suporte da altura do triângulo  $ABC$  em relação ao vértice  $C$ . A reta que passa por  $B$  e  $C$  obedece a seguinte equação:

$$y - 0 = \frac{k - 0}{x_1 - a}(x - a) \Rightarrow y = \frac{k}{x_1 - a}(x - a) \quad (\text{A.16})$$

Da equação (A.16) tiramos que o coeficiente angular da reta  $\overleftrightarrow{BC}$  é  $m_1 = \frac{k}{x_1 - a}$ . Daí, o coeficiente angular da reta  $w$  suporte da altura do triângulo  $ABC$  em relação ao vértice  $A$  é  $m_2$  tal que  $m_1 \cdot m_2 = -1$ , pois, pela proposição (1.10.1), essas retas  $\overleftrightarrow{BC}$  e  $w$  são perpendiculares. Assim, a equação da reta  $w$  é:

$$y - 0 = -\frac{x_1 - a}{k}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{x_1 - a}{k}x \quad (\text{A.17})$$

O ponto  $O$  de interseção das retas  $t$  e  $w$  é o ortocentro do triângulo  $ABC$ . Logo,  $O = \left(x_1, -\frac{x_1 - a}{k}x_1\right) = \left(x_1, -\frac{x_1^2 - ax_1}{k}\right)$ . Como  $x_1$  é variável, então o ortocentro do triângulo  $ABC$  pertence à parábola  $y = -\frac{x^2 - ax}{k}$ , cuja equação pode ser escrita na forma  $y = -\frac{1}{k}x^2 + \frac{a}{k}x$  ou  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 = -4 \cdot \left(\frac{k}{4}\right) \left(y - \frac{a^2}{4k}\right)$ . Dessa forma, a parábola obtida tem vértice  $V = \left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4k}\right)$  (pertencente a mediatriz do segmento  $AB$ ), foco



## B PROPOSTAS DE ATIVIDADES PARA A SALA DE AULA

Neste item propomos algumas atividades que podem ser realizadas em sala de aula com auxílio do GeoGebra. São 5 problemas de lugares geométricos e 5 problemas de máximos e mínimos.

**Problema 1:** (IME) Considere um círculo e uma reta que não se interceptam, ambos contidos num mesmo plano. Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que são tangentes (interiormente) ao círculo dado e à reta dada.

**Problema 2:** (IME) Sobre uma circunferência tomou-se um ponto qualquer  $A$ . A partir desse ponto, traçam-se retas secantes, tendo como comprimento o dobro das respectivas cordas. Definir, provando, o lugar geométrico das extremidades das retas assim construídas.

**Problema 3:**(IME) Determine o lugar geométrico dos centros dos círculos que cortam dois círculos exteriores, de centros  $O_1$  e  $O_2$  e raios respectivamente iguais a  $R_1$  e  $R_2$ , com pontos diametralmente opostos.

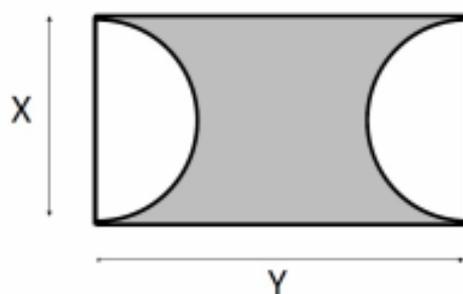
**Problema 4:** (IME) Seja o semi-círculo de diâmetro  $AB = 2R$  e  $r$  sua tangente em  $A$ . Liga-se um ponto  $P$  da reta  $r$  ao ponto  $B$ , interceptando o semi-círculo no ponto  $C$ . Determine o lugar geométrico do ponto médio de  $AC$ , quando  $P$  desloca-se sobre a tangente.

**Problema 5:** (IME) Seja um quadrado de lado  $a$  e um ponto  $P$ , exterior ao quadrado. Chame de ângulo sob o qual o quadrado é visto do ponto  $P$  o menor ângulo com vértice em  $P$ , que contenha o quadrado. Determine o lugar geométrico dos pontos  $P$ , de onde o quadrado é visto sob um ângulo de  $45^\circ$ .

**Problema 6:** (Problema 23.5 - Círculos Matemáticos - Moscou) Encontre um ponto da hipotenusa  $AB$  de um triângulo  $ABC$  tal que a soma dos quadrados das distâncias a  $AC$  e a  $BC$  é mínima.

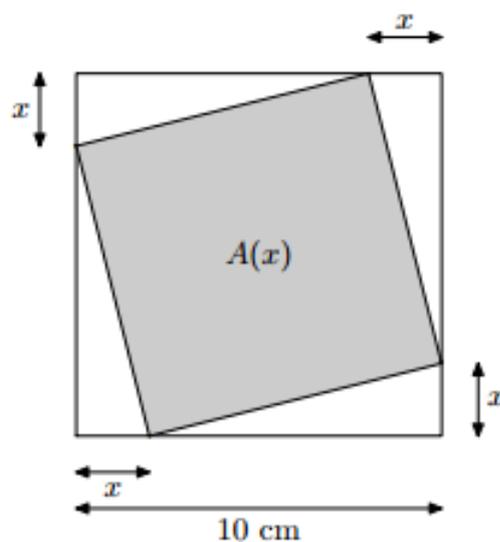
**Problema 7:** Seja  $ABCD$  um retângulo e  $E$  um ponto variável sobre o segmento  $AC$ . Por  $E$  são traçadas as retas  $r$  e  $s$ , paralelas a  $AB$  e  $AD$ , respectivamente. Se  $F$  é o ponto de interseção de  $r$  e  $AD$  e  $G$  é o ponto de interseção de  $s$  e  $CD$ , determine a posição do ponto  $E$  para que a área do retângulo  $EFDG$  seja máxima.

**Problema 8:** (ENA-2014-PROFMAT) De um retângulo de lados medindo  $X$  e  $Y$ ,  $X \leq Y$ , são retirados dois semicírculos de raio  $X/2$  formando a figura ilustrada abaixo, em cinza. Entre todas as figuras assim construídas, com perímetro medindo  $10m$ , determine aquela de área máxima e assinale, entre as alternativas abaixo, a que melhor aproxima esta área máxima.



- (A)  $12,5 \text{ m}^2$
- (B)  $2,5\pi \text{ m}^2$
- (C)  $6,8 \text{ m}^2$
- (D)  $\frac{10}{3\pi} \text{ m}^2$
- (E)  $2,65 \text{ m}^2$

**Problema 9:** (ENA-2015-PROFMAT) Em um quadrado cujo lado mede  $10 \text{ cm}$ , está inscrito um outro quadrado de área  $A(x)$ , conforme a figura. O valor mínimo de  $A(x)$  será:



- (A)  $5 \text{ cm}^2$
- (B)  $12,5 \text{ cm}^2$
- (C)  $20 \text{ cm}^2$
- (D)  $25 \text{ cm}^2$

(E)  $50 \text{ cm}^2$

**Problema 10:** (OBMEP-2016-adaptada) Os quadrados da figura têm lados paralelos e o mesmo centro. O quadrado maior tem lado 10 e o menor tem lado  $x$ . Determine  $x$  de modo que área da região hachurada seja máxima. Qual é a área máxima?

