



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

OSMILCY LIMA FEITOSA

**ALGUMAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MÍNIMOS E
MÁXIMOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA**

Boa Vista - RR

2015

OSMILCY LIMA FEITOSA

**ALGUMAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MÍNIMOS E
MÁXIMOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez
Castaneda

Boa Vista - RR

2015

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

F311a Feitosa, Osmilcy Lima.

Algumas técnicas de resolução de problemas de mínimos e máximos na Geometria Eucliana / Osmilcy Lima Feitosa. -- Boa Vista, 2015.
76 f: il.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castaneda.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Mestrado em Matemática Profissional - PROFMAT.

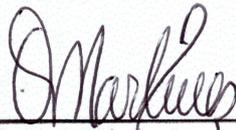
1 – Geometria. 2 – Máximos e mínimos. 3 – Extremos em Geometria. 4 – Otimização em Geometria. I – Título. II. – Castaneda, Alberto Martin Martinez (orientador).

CDU- 514.12

OSMILCY LIMA FEITOSA

**ALGUMAS TÉCNICAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
MÍNIMOS E MÁXIMOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e da Universidade Federal de Roraima-UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Defendida em 23 de abril de 2015 e avaliada pela seguinte banca examinadora.



**Prof. Dr. Alberto Martin Martinez
Castaneda**
UFRR/Orientador



Prof. Dr. Nilomar Vieira de Oliveira
UFAM



Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva
UFRR

Boa Vista - RR
2015

"A minha esposa Larissa Gardênia que compartilhou ao meu lado momentos de angústias e aflições e aos meus pais que direta e indiretamente contribuíram para minha formação. Alegrai-vos pois essa conquista é tão minha quanto suas."

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar à Deus que me deu o dom da vida e tem me ensinado a vivê-la com dignidade.

A minha esposa que soube entender os momentos de ausência e me apoiou em todos eles com dedicação e apreço.

Aos meus pais e familiares que sempre estiveram do meu lado, com palavras de incentivo e sempre torcendo pelo meu sucesso profissional.

Ao professor Alberto Martin Martinez Castaneda, por ter me orientado e auxiliado com tamanha dedicação, disponibilizando seu tempo e conhecimento para que esse trabalho pudesse ser concluído.

A CAPES, pelo apoio financeiro ao longo do curso.

Aos professores e colegas do PROFMAT pelo auxílio e compreensão, pelo companheirismo e momentos de dedicação destinados juntos aos estudos e pesquisas.

Por fim, agradeço a Universidade Federal de Roraima pelo suporte físico e técnico sempre que necessitamos.

"O coração do homem planeja o seu caminho, mas o Senhor lhe dirige os passos. (Provérbios 16:9)"

RESUMO

Ao analisar a Educação Básica nos dias atuais, observa-se que no Ensino Médio o estudo dos problemas sobre máximos e mínimos é realizado de forma limitada e superficial, resumindo-se basicamente a algumas aplicações de funções quadráticas. A resolução de problemas de otimização de índole geométrica constitui um campo fértil para trabalhar a formação matemática dos alunos nesse nível e contribuir com o aperfeiçoamento da qualidade do ensino da Matemática. Esta categoria de problemas pode ser de utilidade na preparação de alunos para as Olimpíadas de Matemática. Este trabalho aborda o estudo e descrição de métodos de solução de problemas de otimização em geometria euclidiana, apresentando uma catalogação devida a Andreescu, junto a vários exemplos resolvidos.

Palavras-chave: Geometria, Máximos e mínimos, Extremos em Geometria, Otimização em Geometria.

ABSTRACT

Looking over the Basic Education nowadays, it becomes aware that in high school the study of maxima and minima's problems is carry out in a limited and superficial way. In general, the resolution of these problems lessened to some application of quadratic functions. However, Geometric optimization's problems may be a fecund area to contribute for improving the quality of math education at this level and to develop the mathematical mind of students. That category of problems is also useful for training students for the Math Olympics. This master's dissertation deals with the study of resolution's methods of optimization problems in Euclidean Plane Geometry, presenting a cataloging, according to Andreescu, and some several solved illustrative examples.

Key-words: Geometry, Maximum and Minimum, Extremes in Geometry, Optimization in Geometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

| | | |
|----|---|----|
| 1 | Cilindro inscrito num cone de raio r da base e altura d | 21 |
| 2 | Um ponto P contido no arco MN | 25 |
| 3 | Desenho da delimitação de Cartago feita pela princesa Dido..... | 28 |
| 4 | Análise da existência da solução do problema de Heron | 37 |
| 5 | Análise da existência da solução do problema de Regiomontanus | 38 |
| 6 | Rotação de um triângulo em 90° | 39 |
| 7 | Translação de três objetos | 40 |
| 8 | Homotetia direta | 40 |
| 9 | Enunciado do problema de Heron | 41 |
| 10 | Solução do problema de Heron | 42 |
| 11 | Aplicação de transformação geométrica: rotação | 42 |
| 12 | Representação do raio de ação do soldado | 43 |
| 13 | Triângulo equilátero ABC e um ponto P em seu plano..... | 45 |
| 14 | Caixa retangular sem tampa | 48 |
| 15 | Triângulo ABC qualquer com um ponto interior X | 50 |
| 16 | Reta r e circunferências k_1 e k_2 | 52 |
| 17 | Triângulo inscrito num polígono qualquer p | 53 |
| 18 | Representação do lema: caso 1 | 54 |
| 19 | Representação do lema: caso 2 | 54 |
| 20 | Determinação do arco capaz | 55 |
| 21 | Arcos Capazes determinados pelo segmento AB e um dado ângulo α | 56 |
| 22 | Arcos Capazes em pares simétricos em relação ao segmento AB | 56 |
| 23 | Solução do problema do exemplo 3.5.1 | 57 |
| 24 | Comparação das medidas dos ângulos \widehat{AMB} e $\widehat{AM_1B}$ | 57 |
| 25 | Reta r paralela a AB | 58 |
| 26 | Curvas de nível: exemplo 3.5.2 | 59 |
| 27 | Curvas de nível: exemplo 3.5.3 | 60 |
| 28 | Triângulo inscrito e seu centróide | 62 |
| 29 | Representação dos navios e suas trajetórias | 63 |
| 30 | Representação do exemplo 3.6.2 no plano cartesiano | 65 |
| 31 | Resolução do problema do exemplo 3.6.2 | 66 |
| 32 | Triângulo inscrito em uma circunferência | 68 |
| 33 | Quadrilátero inscrito em uma circunferência | 68 |
| 34 | Quadrilátero inscrito dividido em quatro triângulos..... | 69 |
| 35 | Enunciado do exercício 3.7.3 | 69 |
| 36 | Solução do exercício 3.7.3..... | 70 |

| | | |
|----|---|----|
| 37 | Circunferência de Malfatti | 73 |
| 38 | As circunferências de Malfatti em um triângulo equilátero..... | 73 |
| 39 | Três circunferências inscritas em um triângulo equilátero | 74 |
| 40 | Enunciado do problema 3.7.5 | 76 |
| 41 | Enunciado do problema 3.7.6 | 77 |
| 42 | Solução do problema 3.7.6 | 78 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|---|--|----|
| 1 | Disponibilidade de utilização das máquinas | 18 |
| 2 | Coefficiente de produtividade | 18 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-----|--------------------------------|
| PO | Pesquisa Operacional |
| PL | Programação Linear |
| LAL | Lado, ângulo, lado |
| AAA | Ângulo, ângulo, ângulo |
| ENQ | Exame Nacional de Qualificação |
| PC | Computador Pessoal |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|-------------------|------------------------------|
| \mathbb{R} | Conjunto dos Números Reais |
| \rightarrow | Implica |
| π | Letra grega minúscula pi |
| \in | Pertence |
| \Leftrightarrow | Se, e somente se |
| \subset | Está contido |
| \triangle | Triângulo |
| α | Letra grega minúscula alfa |
| γ | Letra grega minúscula gama |
| λ | Letra grega minúscula lambda |
| β | Letra grega minúscula beta |

SUMÁRIO

| | | |
|--------------|--|-----------|
| | INTRODUÇÃO | 15 |
| 1 | A CLASSE DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO. OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS EM GEOMETRIA | 17 |
| 1.1 | EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO..... | 17 |
| 1.2 | O PROBLEMA DE MÁXIMOS E MÍNIMOS OU PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO..... | 21 |
| 1.2.1 | Resumo sobre resultados clássicos de otimização para funções $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ | 23 |
| 1.3 | OS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS..... | 25 |
| 2 | BREVE HISTÓRIA DA TEORIA DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO | 27 |
| 2.1 | OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NA ANTIGUIDADE..... | 27 |
| 2.2 | OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS A PARTIR DA RENASCENÇA..... | 30 |
| 2.3 | OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO SÉCULO XX..... | 32 |
| 3 | MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE EXTREMOS GEOMÉTRICOS | 35 |
| 3.1 | ANÁLISE DA EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE OTIMIZAÇÃO..... | 35 |
| 3.2 | MÉTODO DE CÁLCULO DE EXTREMOS UTILIZANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS..... | 39 |
| 3.3 | MÉTODO DE CÁLCULO DE EXTREMOS EMPREGANDO DESIGUALDADES ALGÉBRICAS..... | 45 |
| 3.4 | O MÉTODO DA VARIAÇÃO PARCIAL..... | 51 |
| 3.5 | O PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA..... | 54 |
| 3.6 | MÉTODO DE CÁLCULO DE EXTREMOS EMPREGANDO O CÁLCULO DIFERENCIAL..... | 62 |
| 3.7 | OUTROS PROBLEMAS DE MÍNIMOS E MÁXIMOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA..... | 67 |
| | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 80 |
| | REFERÊNCIAS | 81 |

INTRODUÇÃO

Os problemas de determinação de extremos (máximos e mínimos) surgem naturalmente numa diversidade de situações na pesquisa científica, na economia e na engenharia e suas aplicações. Desde a Grécia Antiga até hoje, a pesquisa matemática presta uma grande atenção ao estudo dos problemas extremais. A Otimização, com suas múltiplas subáreas, é um rico campo aberto ao desenvolvimento da Matemática Contemporânea.

O mais antigo problema de máximos e mínimos na história da Matemática é de natureza geométrica, o chamado problema isoperimétrico clássico: achar, dentre as curvas planas fechadas de um dado comprimento, aquela que abarca a maior superfície. Os matemáticos gregos tentaram resolver este problema desde o século V a.C. quando formularam e resolveram vários problemas extremais que se refletiram nos Elementos de Euclides e nas obras de Arquimedes e Apolônio. Isto não ficou congelado na antiguidade, mas na chamada Matemática Elementar nos dias atuais existe uma variedade de problemas de máximos e mínimos geométricos de grande beleza, cujo estudo na escola seria de utilidade na formação do pensamento matemático dos alunos.

Atualmente, no Ensino Médio, o estudo dos problemas extremais é realizado de forma limitada e superficial, resumindo-se basicamente a algumas aplicações de funções quadráticas. No entanto, existe uma busca constante de métodos de ensino da matemática de forma mais contextualizada que estimulem o desenvolvimento do pensamento matemático e do raciocínio lógico dos alunos. Neste sentido, a pesquisa sobre os problemas de máximos e mínimos em Geometria possui interesse e utilidade no aperfeiçoamento da qualidade do ensino da Matemática na Educação Básica, e na preparação dos alunos para Olimpíadas de Matemática.

Em particular, os problemas de máximos e mínimos de índole geométrica podem constituir uma proposta eficiente nesse contexto pois existe uma sistemática nos métodos de resolução desta classe de problemas, como se constata em (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006), a principal fonte bibliográfica deste trabalho. Segundo este autor, os principais métodos para encontrar extremos geométricos são: (i) mediante transformações geométricas, (ii) utilizando desigualdades algébricas, (iii) aplicando recursos do Cálculo Diferencial, (iv) o método da Variação Parcial, e (v) o Princípio de Tangência.

O objetivo geral deste trabalho é estudar os problemas de otimização em Geometria Euclidiana e seus métodos de solução, resumindo-os e sistematizando-os, de modo a elaborar um material que possa ser utilizado como um subsídio complementar pelos professores do Ensino Médio.

A metodologia utilizada na elaboração da dissertação consistiu de uma ampla pesquisa bibliográfica, consultando livros, artigos científicos e comunicações, impressos ou tomados da internet. A leitura desses materiais nos permitiu a compreensão do assunto pesquisado e estimulou a análise crítica dos métodos usuais do ensino da Geometria na escola. Então, levantou-se a hipótese de introduzir o estudo dos problemas de determinação de máximos e mínimos geométricos na prática pedagógica.

Evidentemente, houve a necessidade do uso do conhecimento matemático na demonstração de algumas proposições e na resolução de determinados problemas. Após a análise e síntese necessária escreveu-se esse texto que resume o trabalho de pesquisa desenvolvido.

O primeiro capítulo apresenta a classe dos problemas de otimização em geral, dentre eles os de natureza geométrica, mediante alguns exemplos resolvidos e conceitua as ideias essenciais sobre o tema. Também apresenta um resumo de alguns resultados básicos de Cálculo Diferencial sobre cálculo de extremos de funções reais. O segundo capítulo descreve uma breve história da evolução da teoria dos problemas de otimização. O terceiro capítulo responde ao objetivo principal do trabalho, descrevendo e exemplificando os métodos de resolução de problemas de extremos geométricos seguindo (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006).

1 A CLASSE DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO. OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS EM GEOMETRIA

Neste capítulo, se apresenta a classe dos *problemas de otimização*, também chamados *problemas de máximos e mínimos*. Inicia-se o assunto enunciando vários problemas de origens diversas, mas que dentro dessa diversidade, possuem um padrão matemático comum, justamente o correspondente a essa categoria de problemas. Embora na maioria desses problemas sejam apresentadas suas soluções, não é o principal interesse neste capítulo a abordagem dos métodos de solução, mas a conceituação dos problemas onde se procuram máximos e mínimos. Ou seja, o objetivo fundamental do capítulo é entender o que é um problema de máximo e mínimo.

1.1 EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Exemplo 1.1.1. *Um carpinteiro possui uma ripa com 8 metros de comprimento e pretende com esta fazer uma moldura retangular para um quadro. Como ele deve cortar a ripa, para que a área do quadro seja máxima?*

(Fonte: <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/precalculo/sala/capitulos/cap101s4.html>)

Solução: Seja x o comprimento da base do retângulo que o carpinteiro pretende construir e y o comprimento da sua altura. A área desse retângulo é $A = xy$ e seu perímetro é $P = 2x + 2y$. O objetivo é encontrar o valor de x e y para os quais o valor de A é máximo. A restrição determinada pelo comprimento da ripa se traduz na equação $2x + 2y = 8$. De $2x + 2y = 8$, tem-se $y = 4 - x$. Substituindo em $A(x, y) = xy$ obtemos a função $A(x) = 4x - x^2$ dependente da variável x . Trata-se de uma parábola com concavidade voltada para baixo, pelo que o valor máximo da ordenada ocorre no vértice. A abscissa do vértice é $x = \frac{-4}{-2} = 2$.

Portanto, o carpinteiro deve construir a moldura com a forma de um quadrado de lado igual a 2 metros. A área máxima é igual a $4m^2$.

Observa-se que o problema em essência consiste em determinar o valor máximo da função $A(x, y) = xy$ no subconjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2x + 2y = 8\}$ de \mathbb{R}^2 .

Exemplo 1.1.2. *Certa empresa do ramo alimentício tirou de produção uma linha de um produto não lucrativo. Isso criou um considerável excedente na capacidade de produção. A gerência está considerando dedicar essa capacidade excedente para produzir um ou mais produtos, identificados como produtos 1, 2 e 3. A capacidade disponível das máquinas que poderia limitar a produção está resumida na tabela 1:*

Tabela 1 – Disponibilidade de utilização das máquinas

| Tipo de máquina | Tempo disponível (horas de máquina) |
|-----------------|-------------------------------------|
| A | 500 |
| B | 350 |
| C | 150 |

Fonte: (FILHO, 2001)

O número de horas de máquina requerido por unidade dos respectivos produtos é conhecido como coeficiente de produtividade (em horas de máquina por unidade), conforme representado na tabela 2:

Tabela 2 – Coeficiente de produtividade

| Tipo de máquina | produto 1 | produto 2 | produto 3 |
|-----------------|-----------|-----------|-----------|
| A | 9 | 3 | 5 |
| B | 5 | 4 | 0 |
| C | 3 | 0 | 2 |

Fonte: (FILHO, 2001)

O lucro unitário estimado é de R\$30,00, R\$12,00 e R\$15,00, respectivamente, para os produtos 1, 2 e 3. Determine a quantidade de cada produto que a firma deve produzir para maximizar seu lucro.(FILHO, 2001)

Solução: A princípio, traduz-se a situação real descrita no enunciado do problema na linguagem matemática. Para começar, serão definidas as seguintes variáveis:

x_1 : quantidade de unidades do produto 1 a serem produzidas;

x_2 : quantidade de unidades do produto 2 a serem produzidas;

x_3 : quantidade de unidades do produto 3 a serem produzidas;

z : lucro total obtido pela venda da produção.

O lucro z , em função das variáveis x_1 , x_2 e x_3 , é dado pela função:

$$z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$$

A única restrição a que estão sujeitas as variáveis independentes x_1 , x_2 e x_3 é o tempo máximo disponível em cada máquina (A, B ou C). Essas restrições do problema podem ser modeladas pelo sistema de inequações:

$$9x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 500 \tag{1.1}$$

$$5x_1 + 4x_2 \leq 350 \quad (1.2)$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 150 \quad (1.3)$$

A inequação (1.1) garante não ultrapassar a disponibilidade de tempo da máquina A e as restrições (1.2) e (1.3), respectivamente, impõem semelhante condição para as máquinas B e C. A formulação matemática do problema, resumidamente, consiste em determinar o valor máximo da função $z = 30x_1 + 12x_2 + 15x_3$ no subconjunto de \mathbb{R}^3 definido pelas restrições sobre as variáveis x_1 , x_2 e x_3 , determinadas pelo sistema formado pelas inequações (1.1), (1.2) e (1.3). Observe que a função $z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tem como domínio o conjunto \mathbb{R}^3 , mas no problema interessa achar o ponto onde o máximo de z ocorre, não no domínio completo, mas no subconjunto próprio dele definido pelo sistema das inequações que modelam as restrições do problema. A solução deste problema requer o emprego de recursos estudados em Programação Linear, especificamente o Método Simplex, que consiste em uma técnica utilizada para se determinar numericamente, a solução de sistemas lineares com essas características.

Exemplo 1.1.3. *Durante várias semanas, o departamento de trânsito de certa cidade vem registrando a velocidade dos veículos que passam por certo cruzamento. Os resultados mostram que entre 13 e 18 horas, a velocidade média neste cruzamento é dada aproximadamente por $v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$ km/h, onde t é o número de horas após o meio-dia. Qual o instante, entre 13 e 18 horas, em que o trânsito é mais rápido? E qual o instante em que ele é mais lento? [Tomado de <http://wwwp.fc.unesp.br/arbalbo/arquivos/problemasdeotimizacao.pdf>]*

Solução: O objetivo é determinar os valores de máximo e mínimo absolutos da função $v(t)$ no intervalo $[1, 6]$. Pode se aplicar os recursos oferecidos pelo Cálculo Diferencial e Integral. A função primeira derivada de $v(t)$ é $v'(t) = 3t^2 - 21t + 30$. Os pontos críticos de $v(t)$ são obtidos resolvendo a equação $v'(t) = 3t^2 - 21t + 30 = 0$. As raízes dessa equação de segundo grau são $t = 2$ e $t = 5$, ambos no intervalo.

Para determinar se são pontos de máximo ou mínimo locais, empregamos o teste da segunda derivada:

$$v''(t) = 6t - 21 \rightarrow v''(2) = -9 < 0, \text{ logo } t = 2 \text{ é ponto de máximo local de } v;$$

$$v''(5) = 9 > 0, \text{ pelo que } t = 5 \text{ é ponto de mínimo local de } v.$$

Por ser uma função contínua¹ definida em um intervalo fechado, v pode assumir seus valores máximos e mínimos globais nos pontos críticos ou nos extremos do intervalo. Portanto, é necessário comparar os valores que v assume nos pontos críticos,

¹ A função $v(t)$ é uma função polinomial e toda função polinomial é contínua

com os valores que toma nos extremos do intervalo. Temos: $v(1) = 40,5$; $v(2) = 46$; $v(5) = 32,5$ e $v(6) = 38$. Conclui-se que $t = 2$ é ponto de máximo global e $t = 5$ é ponto de mínimo global de v no intervalo $[1, 6]$. Interpretando esse resultado, verifica-se que o trânsito é mais rápido às 14h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 46 km/h, e mais lento às 17h, quando os carros passam pelo cruzamento a uma velocidade média de 32,5 km/h.

A formulação resumida do problema é achar os valores máximo e mínimo da função $v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}; v(t) = t^3 - 10,5t^2 + 30t + 20$ para $t \in [1, 6] \subset \mathbb{R}^+$.

Na resolução do próximo problema não será levado em consideração os resultados conhecidos do Cálculo Diferencial para calcular extremos de funções. Lembre que o Teorema de Weierstrass (será enunciado no item 1.2.1) garante a existência do máximo e do mínimo absoluto nas condições do problema.

Exemplo 1.1.4. *Dado um número $a > 0$, quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é a ? [PROFMAT. ENQ. 2012.1]*

Solução: Sabe-se que se x_1, x_2, \dots, x_n são números reais positivos, sua média aritmética é sempre maior ou igual a sua média geométrica, isto é, $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$. A igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Sejam x e y as dimensões de um retângulo de área $a > 0$. Aplicando a desigualdade acima com $x_1 = x$ e $x_2 = y$ tem-se que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = \sqrt{a}$. Multiplicando por 4 ambos os lados resulta $2x + 2y \geq 4\sqrt{a}$. O lado da esquerda da desigualdade é o perímetro do retângulo. Se $x = y = a$ ocorre a igualdade, logo o retângulo de perímetro mínimo e área $a > 0$ é o quadrado de lados iguais a \sqrt{a} .

No problema acima, de índole geométrica, determinou-se qual é o retângulo de perímetro mínimo tal que sua área seja constante é igual a um número real $a > 0$. Poderia ser formulado assim:

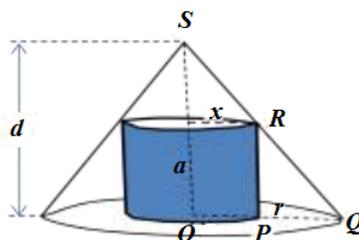
Determinar o valor mínimo da função $P(x, y) = 2x + 2y$ no subconjunto do seu domínio \mathbb{R}^2 definido pela restrição $xy = a$.

Exemplo 1.1.5. *Inscrever um cilindro de superfície lateral máxima em um cone de raio da base igual a $r > 0$. (GALLARDO, 2013)*

Solução: Sejam, r e d , respectivamente, o raio da base e a altura do cone; x o raio da base do cilindro inscrito e a sua altura; OQ é o raio da base do cone; P o ponto de interseção da base do cilindro inscrito com OQ . A representação do problema, com alguns detalhes adicionais, encontra-se na figura 1.

A área lateral A_l do cilindro inscrito é $A_l = 2\pi ax$. Da semelhança dos triângulos OQS e PQR , tem-se que $\frac{a}{d} = \frac{r-x}{r}$, de onde $a = \frac{d}{r}(r-x)$.

Figura 1 – Cilindro inscrito num cone de raio r da base e altura d



Fonte: (GALLARDO, 2013)

$$\text{Daí, } A_l = 2\pi \frac{d}{r}(r-x)x = -\frac{2\pi d}{r} \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{\pi r d}{2}.$$

Então, A_l atinge seu valor máximo quando a parcela $-\frac{2\pi d}{r} \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 = 0$, isto é, quando $x = \frac{r}{2}$.

Portanto, o cilindro com área lateral máxima inscrito em um cone de raio da base igual a r e de altura d é aquele cujo raio vale $\frac{r}{2}$ e cuja altura vale $\frac{rd}{2}$.

Neste problema geométrico de máximos construímos uma função

$$A_l = -\frac{2\pi d}{r} \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + \frac{\pi r d}{2}$$

dependente da variável x , que representa o raio da base do cilindro inscrito. Essa variável x , para tomar um valor admissível como solução do problema proposto, ou seja, ser de fato a medida do raio de um cilindro inscrito no cone, deve cumprir a restrição $0 < x < r$. Logo, o enunciado do problema pode ser assim:

Achar os valores máximos da função $A_l = -\frac{2\pi d}{r} \left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + \pi r d$, com sua variável independente x sujeita à condição $0 < x < r$.

1.2 O PROBLEMA DE MÁXIMOS E MÍNIMOS OU PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Nos problemas apresentados no item 1.1 podemos observar que, embora de natureza particular diferente, todos têm em comum a procura dos valores máximos ou mínimos de uma dada função sobre seu domínio ou sobre uma parte própria desse domínio. Esta é a essência da natureza dos problemas de máximos e mínimos, também chamados problemas de otimização. A seguir será definido com rigor os conceitos iniciais, seguindo a (IZMAILOV ALEXEY. SOLODOD, 2005).

Definição 1.2.1. *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Diz-se que:*

- (a) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo global de f em D se, e somente se, $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D$.

- (b) $x_1 \in D$ é um ponto de máximo global de f em D se, e somente se, $f(x_1) \geq f(x)$, para todo $x \in D$.
- (c) $x_0 \in D$ é um ponto de mínimo local de f em D se, e somente se, existe uma vizinhança U de x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in D \cap U$.
- (d) $x_1 \in D$ é um ponto de máximo local de f em D se, e somente se, existe uma vizinhança U de x_1 tal que $f(x_1) \geq f(x)$, para todo $x \in D \cap U$.

O problema da procura dos pontos que cumprem as propriedades enunciadas nos itens (a) e (c) da definição 1.2.1 escreve-se:

$$\min f(x) \text{ sujeito a } x \in D$$

Um ponto que cumpre a condição (a) na definição 1.2.1 é chamado um minimizador global do problema. Analogamente, um ponto x_0 definido como em (c) denomina-se um minimizador local do problema. O conjunto D é chamado conjunto viável do problema; os pontos $x \in D$ são denominados pontos viáveis e f é a função objetivo. As imagens $f(x_0)$ e $f(x_1)$ são chamadas de valor ótimo.

Pode-se também escrever o problema da busca dos máximos globais e locais como:

$$\max f(x) \text{ sujeito a } x \in D.$$

Em (b), diz-se que x_1 é um maximizador global do problema e em (d), $x_1 \in D$ é chamado de um maximizador local do problema.

É evidente que todo minimizador global também é um minimizador local, mas não é verdadeira a proposição recíproca.

Se em (a) ou (c) ocorre a desigualdade estrita, isto é, $f(x_0) < f(x)$, para todo $x \neq x_0$, o ponto x_0 é dito um minimizador estrito global em (a) ou um minimizador estrito local em (c). Também se consideram os maximizadores estritos globais ou locais em (b) e (d), quando a desigualdade da definição for estrita. Do mesmo modo, todo maximizador global é um maximizador local, mas não reciprocamente. É fácil notar que todo problema de maximização equivale a um problema de minimização e vice-versa. Em efeito, como

$$f(x_0) \leq f(x) \iff -f(x) \leq -f(x_0)$$

resulta que

$$\max f(x) \text{ sujeito a } x \in D \iff \min -f(x) \text{ sujeito a } x \in D.$$

As soluções de ambos os problemas são os mesmos pontos, mas os valores ótimos tem sinais opostos. Isto é, se x_0 é um minimizador do problema $\min f(x)$ sujeito a $x \in D$ então x_0 é um maximizador do problema $\max f(x)$ sujeito a $x \in D$, e os valores ótimos de ambos os problemas são opostos.

Por causa da equivalência entre o problema de maximização e o de minimização, desde o ponto de vista matemático, não existem diferenças relevantes entre ambos, e tanto faz estudar um ou outro. Alguns autores, como (IZMAILOV ALEXEY. SOLODOD, 2005), desenvolvem a teoria para problemas de minimização.

Os problemas de cálculo de máximos e mínimos são denominados em conjunto como problemas de otimização. Esta denominação é relativamente recente e está vinculada às aplicações em problemas gerenciais. O capítulo 3 trará mais detalhes sobre isto.

Se $D = \mathbb{R}^n$ o problema de otimização é dito irrestrito. Quando $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \neq \mathbb{R}^n$ o problema é dito de otimização com restrições. As restrições, como na formulação do Problema de Programação Linear, são expressas como um sistema de equações ou inequações.

A seguir será apresentado a modo de resumo alguns resultados básicos sobre otimização. Considerou-se conveniente redigir este resumo com um grau de generalidade um pouco maior do estritamente necessário para abordar os problemas de extremos geométricos que aparecem neste trabalho.

1.2.1 Resumo sobre resultados clássicos de otimização para funções $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Será mostrado através de um resumo os principais resultados clássicos para achar extremos de funções reais de uma variável real.

Um teorema de grande importância é o chamado Teorema de Weierstrass², que garante a existência de extremos para qualquer função real contínua definida sobre um compacto.

Teorema 1.2.1 (Weierstrass). *Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ um compacto. Se $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ para todo $x \in K$.*

Em outras palavras, toda função real e contínua definida sobre um compacto atinge seu valor máximo e seu valor mínimo em pontos desse compacto. Vale lembrar

² O Teorema de Weierstrass é um teorema bem conhecido da Análise Real, por isso será enfatizado apenas seu enunciado. Sua demonstração pode ser encontrado no material de Fundamentos de Cálculo do ProfMat, na página 17 da unidade 8

que os subconjuntos compactos de \mathbb{R} são os intervalos fechados e limitados.

Do teorema de Weierstrass se inferem os seguintes corolários (PASQUALI, 2014):

1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não identicamente nula, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Então f assume um valor mínimo em algum x real.
2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não identicamente nula, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Então existe um maximizador absoluto $x_0 \in \mathbb{R}$ de f e $f(x_0) > 0$.
3. Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não identicamente nula, tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Então, f tem um maximizador absoluto em algum ponto do domínio.
4. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que:
 - (i) $f(a) = f(b) = 0$;
 - (ii) existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x_0) > 0$.

Então, f tem um maximizador absoluto em algum ponto de (a, b) .

Teorema 1.2.2. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável em um ponto x_0 do interior de D . Uma condição necessária para que x_0 seja um maximizador ou minimizador local é que $f'(x_0) = 0$.*

Observação: A condição é necessária, mas não é suficiente. Isto é, pode ser que $f'(x_0) = 0$, mas não ser x_0 um ponto de máximo ou de mínimo.

Definição 1.2.2. *Diz-se que um ponto $x \in D$ é um ponto crítico (estacionário) da função f se f é diferenciável em x e $f'(x) = 0$.*

Alguns autores chamam de estacionários aos pontos onde a derivada da função existe e é nula, e denominam críticos aos pontos estacionários junto com aqueles pontos do domínio onde a função não é derivável.

O teorema 1.2.2 estabelece que se $x \in D$ é um ponto interior de D tal que f é derivável em x e existe um extremo local de f em x , então, necessariamente $f'(x_0) = 0$. Pode ser que $f'(x_0) = 0$ e x não seja um ponto de extremo local. Isto é, a condição de nulidade da derivada no ponto é necessária mas não é suficiente para a existência de extremo.

Teorema 1.2.3. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes derivável em um ponto x_0 do interior de D tal que $f'(x_0) = 0$. Então:*

(a) *Se $f''(x_0) > 0$, o ponto x_0 é de mínimo local.*

(b) *Se $f''(x_0) < 0$, o ponto x_0 é de máximo local.*

1.3 OS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

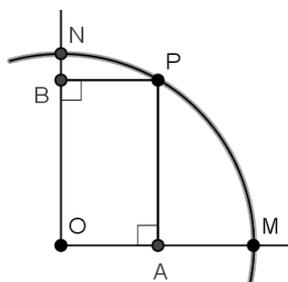
Os problemas geométricos de máximos e mínimos, como seu nome claramente indica, são problemas de otimização, onde se procuram valores máximos e mínimos de determinadas grandezas associadas a objetos geométricos. Por exemplo, segmentos, ângulos, áreas ou volumes de medida máxima ou mínima, no contexto de uma dada situação-problema de índole geométrica.

Também é comum nesses problemas determinar qual objeto geométrico cumpre uma condição associada a um valor máximo ou mínimo; por exemplo, “Numa dada circunferência, qual é o triângulo de área máxima com um vértice no centro da circunferência e os outros dois vértices em pontos da própria circunferência?”.

São exemplos de problemas geométricos de máximos e mínimos os seguintes:

1. Ache um ponto X do plano de um dado triângulo ABC tal que a soma $S(X) = AX + BX + CX$ seja mínima. (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)
2. Seja P um ponto do arco MN da figura abaixo. Mostrar que a soma $PA + PB$ é máxima quando P estiver na bissetriz do ângulo \widehat{MON} . (PINHO, 2013)

Figura 2 – Um ponto P contido no arco MN



Fonte:(PINHO, 2013)

3. Dada uma circunferência e dada uma corda nessa circunferência, encontrar o triângulo inscrito nessa circunferência que tenha perímetro máximo e tal que a corda dada seja um de seus lados.(PINHO, 2013)

4. O ponto A está situado entre duas retas paralelas, a uma distância a e b delas, servindo de vértice de um ângulo de medida α . Considere todos os triângulos possíveis, cujos outros dois vértices se situam um em cada uma das retas dadas. Determine o valor mínimo da área dos triângulos dessa família. (SHARIGUIN, 1989)

5. Entre todos os triângulos de igual perímetro, qual é o de maior área? (FIGUEIREDO, 1989)

2 BREVE HISTÓRIA DA TEORIA DOS PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Este capítulo aborda resumidamente alguns elementos da história da pesquisa dos problemas de máximos e de mínimos na Matemática. Não se limita em uma resenha exclusiva aos problemas sobre extremos geométricos, pois isso impediria situá-los no contexto matemático em que estavam inseridos e entender como influenciaram a pesquisa matemática geral sobre otimização. Dessa forma, o capítulo procura ter um escopo mais amplo e mostrar certas relações entre os problemas de otimização geométricos e os gerais.

2.1 OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NA ANTIGUIDADE

Os problemas de procura das grandezas máximas e mínimas foram objeto de meticulosa consideração no transcurso de toda a evolução da Matemática. Segundo (GALÉEV E. TIJOMÍROV, 1991), o chamado problema isoperimétrico clássico: “achar, dentre as curvas planas fechadas de um dado comprimento, aquela que limita a maior superfície possível”, é considerado o mais antigo dos problemas de máximos e mínimos.

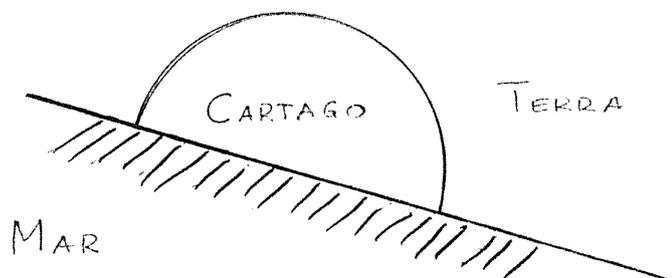
É muito mencionada na literatura sobre a história dos problemas de máximo e de mínimo, a lenda de Dido (também chamada de Elisa ou Elisha), que envolve um problema isoperimétrico. A mesma está contada na Eneida, poema épico escrito pelo grande poeta romano Virgílio (70 a.C. - 19 a.C.).

Dido era uma princesa fenícia da cidade de Tiro que fugiu de navio no século IX a.C. para o norte da África quando seu esposo Siqueu foi assassinado pelo rei Pigmalião, que era irmão da Dido. Ela, junto com um grupo dos seus seguidores, fundou lá a cidade de Cartago (na atual Tunísia). Segundo a lenda, o rei local lhe disse que podia tomar toda a terra que couber numa bolsa feita com a pele de um único animal. Dido decidiu cortar a pele em tiras muito finas que foram emendadas formando uma longa corda, que usaram para cercar um terreno semicircular na orla marítima, como mostrado na figura 3. Este tipo de problema, segundo (MERCURI FRANCESCO; PEDROSA, 1993), é chamado problema isoperimétrico relativo.

Existem algumas variações da lenda de Dido, por exemplo, se era uma circunferência ou uma semicircunferência, mas em todas se menciona o problema isoperimétrico.

A solução de Dido, ou melhor, de algum matemático do seu séquito, foi evidentemente intuitiva. A solução formal não é simples e foi escrita após alguns séculos. Muitas demonstrações foram publicadas, algumas devidas a grandes matemáticos,

Figura 3 – Desenho da delimitação de Cartago feita pela princesa Dido



Fonte:(MERCURI FRANCESCO; PEDROSA, 1993)

mas incompletas. Por exemplo, o eminente matemático germano-suíço Jacob Steiner (1796-1863) resolveu o problema assumindo a existência da solução e considerando três etapas na sua demonstração:

- (i) A curva deve fechar uma região convexa.
- (ii) Qualquer reta que divida pela metade o perímetro da região, também divide a região em duas partes com a mesma área.
- (iii) A semicircunferência de comprimento $\frac{\pi}{2}$ cujos extremos estejam sobre uma reta dada, é a curva que abrange uma região de área máxima, considerando todas as curvas de perímetro $\frac{\pi}{2}$ que limitam regiões convexas a um lado da reta e com extremos nela.

O problema isoperimétrico teve uma importância significativa em pesquisas sobre extremos vários séculos depois. A respeito (MERCURI FRANCESCO; PEDROSA, 1993) escrevem:

“Entender bem o que é uma solução completa do problema isoperimétrico foi muito importante para a formulação correta do que é a solução de problemas variacionais em Matemática. Principalmente no que se refere ao aspecto existencial das soluções”.

Voltando à antiga Grécia, os filósofos tentaram resolver o problema isoperimétrico clássico ainda no século V a.C.. Existem escritos de Aristóteles no século III onde já se afirma que a circunferência é a solução, mas a sua “demonstração” era de índole filosófica. Os gregos Zenódoro e Pappus também escreveram sobre o problema nas suas obras. Ainda que a solução do problema fosse aceita, não existem registros da época de alguma demonstração matemática de que a circunferência é a curva que

maximiza a área para um dado perímetro fixo. Os geômetras gregos formularam e resolveram vários problemas de máximos e de mínimos, os quais aparecem em *Os Elementos*, de Euclides, e nas obras de Arquimedes e Apolônio.

Um primeiro fato histórico bem documentado está nas obras de Apolônio, um destacado matemático grego da antiguidade, que viveu entre 262 e 190 a.C. Apolônio dedicou o Livro V da sua obra monumental *As Cônicas* (em oito volumes), a estudar segmentos de comprimento máximo e mínimo traçados em relação a uma cônica. Segundo (BOYER, 2010), Apolônio argumenta em sua introdução que "o tema é dos que parece ser digno de estudo pelo seu próprio interesse"(p. 203).

Segundo (KLINE, 1990):

Apolônio demonstra que se O é qualquer ponto no interior de uma cônica e se OP é o segmento de reta de comprimento máximo ou mínimo desde O até a cônica, então a reta perpendicular a OP em P é tangente à cônica em P ; e se O' é qualquer ponto fora da cônica sobre OP , então $O'P$ é o segmento de comprimento mínimo de O até a cônica. Agora, esta propriedade é expressa como a perpendicularidade entre a tangente e normal."(P. 97) (em tradução livre).

Este problema pode ser estudado atualmente num contexto mais geral, como parte das condições de transversalidade em problemas de Cálculo das Variações, uma teoria criada por Euler, no século XVIII.

(BOYER, 2010) afirma sobre o trabalho de Apolônio:

Embora devamos admirar o autor por sua elevada atitude intelectual, pode ser pertinentemente observado que o que em seu tempo era bela teoria, sem perspectiva de aplicabilidade à ciência ou engenharia de seu tempo, a partir daí tornou-se fundamental em campos como a dinâmica terrestre e a mecânica celeste. Os teoremas de Apolônio sobre máximos e mínimos na verdade são teoremas sobre tangentes e normais de seções cônicas. [...] É claro, em outras palavras, que foi a matemática pura e Apolônio que permitiram, cerca de 1800 anos mais tarde, os *Princípios de Newton*...(Boyer 1986, p. 104)

Um pouco mais adiante, o já mencionado livro de Boyer, relata um fato histórico da antiguidade vinculado com problemas de otimização e nos lembra um dos princípios filosóficos de Aristóteles, que atribui a natureza um comportamento otimizador:

Heron se interessava por mensuração em todas as formas [...] foi Heron quem mostrou, por um argumento geométrico simples, numa obra chamada *Catóptrica* (ou reflexão), que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão é uma consequência do princípio aristotélico que diz que a natureza nada faz do modo mais difícil. Isto é, se a luz deve ir de uma fonte S a um espelho MM' e, então, ao olho E de um observador, o caminho mais curto possível SPE , é aquele em que os ângulos SPM e EPM' são iguais. (Boyer 1986, p. 118)

Verifica-se no próximo item, que na Renascença se retoma a ideia do comportamento otimizador da natureza. Outro fato histórico interessante que mostra como naquela época estavam presentes as ideias sobre extremos numa perspectiva correta, (embora não necessariamente rigorosa e formal) é a obra de Pappus de Alexandria, que escreveu um livro em volta do 320 a.C. com o título de Coleção Matemática.

A respeito, (BOYER, 2010) escreve:

Papus parece estar seguindo de perto uma obra *Sobre figuras isométricas*, escrita quase meio milênio antes por Zenodoro (cerca de 180 a.C), do qual alguns fragmentos foram preservados por comentadores posteriores. Entre as proposições no tratado de Zenodoro, havia uma afirmando que de todas as figuras sólidas de igual superfície, a esfera tem o volume máximo, mas evidentemente só se dava uma justificativa incompleta". (Boyer 1986, p 127)

No breve resumo acima revela-se a importância atribuída aos problemas extremos desde a antiguidade, na própria Matemática e nas suas aplicações a outras ciências, bem como sua influência no desenvolvimento posterior dos conhecimentos sobre problemas gerais, não só geométricos, de máximos e mínimos.

2.2 OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS A PARTIR DA RENASCENÇA

Na renascença, muitos matemáticos eminentes se dedicaram ao estudo dos problemas de máximos e mínimos. No século XVII o desenvolvimento das Ciências Naturais determinou o aprofundamento nas pesquisas no campo da otimização. Tudo começou pelas tentativas de explicar a Lei da Refração da Luz, que desde a antiguidade se tentou deduzir. No século II a.C., Ptolomeu tentou uma abordagem experimental, mas sua empresa fracassou. No século XVII o cientista holandês Snellius estabeleceu essa lei e, então, surgiu o problema do estudo dos princípios físicos que a fundamentam. Para explicar dita lei, o grande matemático francês Pierre de Fermat propôs, aproximadamente no ano 1600, o princípio ótimo que posteriormente recebeu seu nome e que diz: "O trajeto que um raio luminoso segue num meio heterogêneo é o mais curto possível e corresponde a um tempo mínimo".

A partir desse momento, a ideia dos chamados "*Princípios Variacionais*", isto é, a convicção de que as leis da natureza se deduzem de relações extremas (relações entre valores máximos e mínimos de grandezas), passou a ser uma das ideias centrais das Ciências Naturais e norteou as pesquisas.

Até a segunda metade do século XVII não houve nenhum procedimento geral que permitisse resolver os problemas sobre cálculo de extremos. A necessidade da sua formulação estimulou notavelmente a criação do Cálculo Diferencial.

O primeiro procedimento de caráter geral que tinha por objetivo calcular máximos e mínimos foi descrito por Fermat no ano 1630. Na linguagem atual é o conhecido Teorema de Fermat, encontrado nos livros de Cálculo, pelo qual estabelece que a anulação da derivada num ponto do interior do domínio da função, é uma condição necessária para a existência de extremo neste ponto. Na realidade, Fermat formulou esse resultado somente para polinômios. Na sua forma geral foi obtido por Isaac Newton nos anos sessenta do século XVII e redescoberto, independentemente, por Leibniz e publicado por ele no famoso artigo “*Nova methodus promaximis et minimis*”, com o qual começa a história da Análise Matemática. Observe atentamente o título em latim (na época todos os artigos científicos se publicava nesta língua), que livremente pode-se traduzir como “*Novo método para encontrar máximos e mínimos*”.

No século XVIII, Euler e Lagrange criaram os procedimentos de solução de problemas de cálculo de extremos de funções de várias variáveis, com e sem restrições do tipo equação. O principal procedimento, denominado Método dos Multiplicadores de Lagrange, atualmente forma parte do currículo de qualquer curso superior de engenharia ou de Matemática.

Os aportes de Lagrange e de Euler permitiram tratar os problemas de otimização nos quais o elemento otimizante não é um número real nem um vetor \vec{n} dimensional, mas uma função. Refere-se ao Cálculo de Variações e à solução rigorosa de problemas como o famoso e histórico “Problema da Braquistócrona”, onde se propõe encontrar a curva plana ao longo da qual uma partícula se deslizará unicamente por influência da gravidade e sem fricção, num tempo mínimo, de um ponto P a outro Q , considerando estes pontos num plano vertical, Q mais baixo que P , mas não ambos numa mesma reta vertical. Certamente, achar tal curva, é achar a função que a define.

Na revista *Acta Eruditorum* do mês de junho de 1696 (primeira e única revista daquela época) foi publicado o artigo de Johann Bernoulli cujo título traduzimos livremente como “Um novo problema para cuja solução são convidados os matemáticos”. Nele propunha-se o problema da braquistócrona, a curva do descenso mais rápido, a partir do qual começa a história do Cálculo de Variações clássico. Houve soluções muito elegantes, com critérios específicos para este problema, como resposta ao desafio formulado por Johann Bernoulli, aos matemáticos dessa época. Cinco matemáticos responderam com soluções: Isaac Newton, Jacques Bernoulli (irmão de Johann), Gottfried Leibniz, Ehrenfried Walther von Tschirnhauss e Guillaume de L'Hôpital. Destacam-se, dentre as soluções apresentadas, a do próprio Johann Bernoulli, a de Leibniz, a de Jacques Bernoulli (irmão de Johann) e a famosa de Newton, que levou o primeiro lugar. Quatro das soluções (excluída a de L'Hôpital) foram publicadas na edição de maio da revista. Newton levava anos retirado da vida científica quando esse evento ocorreu e apresentou seu trabalho anonimamente. Conta-se que quando Bernoulli leu a solução

anônima de Newton o identificou e exclamou: *“Eu reconheço o leão pela marca da garra”*.

Esse problema proposto por Bernoulli deu origem ao Cálculo de Variações ou Cálculo Variacional, atualmente constituído num ramo clássico e fundamental da Matemática, que resumidamente podemos dizer que estuda a determinação de máximos e mínimos condicionados de uma classe de funções contínuas (chamadas funcionais) definidas sobre algum espaço de funções. O Cálculo de Variações generaliza os métodos de determinação de extremos de funções reais de uma variável real do Cálculo Diferencial.

O desenvolvimento da teoria do Cálculo de Variações prosseguiu no transcurso de mais dois séculos. Além das condições necessárias de primeira ordem (equações de Euler-Lagrange), foram descobertas condições suficientes de segunda ordem para dois tipos de extremos: forte e fraco, nos trabalhos de Legendre, Jacobi e Weierstrass, bem como a atualmente chamada teoria de Hamilton-Jacobi que permitiu construir a teoria do campo de Kneser e Hilbert.

Os resultados do Cálculo de Variações demonstraram ser uma ferramenta muito poderosas na Mecânica, na Óptica e na Eletrodinâmica, com muitas aplicações à engenharia. Na Física, nas áreas de Relatividade e Mecânica Quântica, aparecem inúmeros exemplos que revelam o poder do Cálculo de Variações.

2.3 OS PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS NO SÉCULO XX

A meados dos anos trinta do século XX considerava-se que o assunto dos problemas extremos estava praticamente esgotado. Mas em 1939 o matemático russo Leonid Vitaliyevich Kantorovich foi convidado a oferecer uma consultoria para uma empresa dedicada à produção de madeira compensada. Motivado pelos problemas encontrados criou novos métodos de estudo e solução da classe de problemas de otimização que utilizavam exclusivamente funções lineares na formulação da função objetivo e das equações e inequações das restrições.

Após a formalização do problema, de fato foram estabelecidos os fundamentos de um novo ramo da teoria dos problemas de otimização, hoje chamado Programação Linear. Na realidade, embora o nome “Programação Linear” já está generalizado, existe certa confusão com a aceção da palavra programação, que está muito vinculada com a informática. Melhor seria utilizar a expressão “Otimização Linear”, mas é tarde para alguém tentar obrigar a troca de nome.

Na época de Kantorovich sua descoberta não teve difusão nem impacto científico, principalmente porque o ditador soviético Josef Stalin considerava antimarxista a

aplicação de métodos matemáticos na economia, e os que tentavam eram fortemente reprimidos. Foi em 1975 que Kantorovich recebeu o Prêmio Nobel, conjuntamente com o economista norte-americano T. Ch. Kupmans, pelos resultados obtidos e suas aplicações econômicas.

A história que aparece na maioria dos livros considera que a Programação Linear se desenvolveu a partir da quarta década do século XX. Aqui surgiu o nome Pesquisa Operacional (PO), que é bem mais abrangente que a Programação Linear (PL), que é um ramo seu. O nascimento da PO foi fruto da Segunda Guerra Mundial, contexto em que foi gerada.

A Administração Militar inglesa convocou um grande grupo de cientistas de diferentes especialidades, incluindo vários matemáticos, para estudar a solução de problemas táticos e estratégicos associados à defesa do país, aplicando o método científico a estes e outros problemas de índole militar. Devido aos esforços bélicos, existia uma necessidade urgente de assinar recursos escassos as operações militares e as atividades dentro de cada operação, na forma mais eficiente possível.

O nome de Pesquisa Operacional foi dado, aparentemente, porque a equipe estava desenvolvendo a atividade de pesquisar operações militares, como, por exemplo, o desenvolvimento do uso do novo radar no combate aéreo; o gerenciamento das operações anti-submarinas e de proteção de comboios no oceano; e em geral a logística das operações militares. Motivados pelos êxitos dos ingleses, os administradores militares norte-americanos começaram a realizar pesquisas similares. Para isto, reuniram um grupo seletivo de especialistas que obtiveram bons resultados nos seus trabalhos. Os estudos incluíram problemas logísticos complexos, planejamento de colocação de minas no mar e utilização efetiva de equipamentos eletrônicos.

Ao término da guerra, estas bem sucedidas operações militares geraram um grande interesse fora do campo militar. Os administradores industriais começaram a aplicar as ferramentas da Pesquisa Operacional para a solução dos seus problemas, que se originaram pelo crescimento e complexidade das indústrias. Outro fator para o desenvolvimento da Pesquisa Operacional foi que muitos cientistas que tinham participado das equipes de PO durante a guerra e tinham informação importante sobre este trabalho estavam motivados a continuar procurando resultados neste campo. Assim, resultaram avanços muito importantes na pós-guerra. Muitas das ferramentas da PO, como a Programação Linear, a Programação Dinâmica, Linhas de Espera, Teoria de Inventários e outras estiveram criadas antes de terminar a década de 1950.

Segundo o texto de (CASTANEDA, 2013), embora tem-se creditado à Inglaterra a criação da Pesquisa Operacional como uma nova disciplina, os Estados Unidos tomaram logo a liderança neste campo. A primeira técnica matemática amplamente aceita no meio da PO foi o Método Simplex, algoritmo que permite resolver qualquer

problema de Programação Linear. Ficou amplamente conhecida em 1947 pelo matemático americano George B. Dantzig. O fato de existir um algoritmo capaz de resolver qualquer problema de PL é importantíssimo. Isso deu um grande impulso às aplicações da PL e a partir daquela data novas técnicas se desenvolveram graças ao esforço e cooperação de matemáticos, cientistas e administradores, tanto da área acadêmica como da industrial.

O surgimento dos computadores deu um grande impulso a Pesquisa Operacional. Para resolver os problemas da PO é necessário um grande número de cálculos e sem a ajuda de um computador eletrônico é impossível conseguir resolvê-los. Na década de 1980 apareceram computadores pessoais (PC) cada vez mais rápidos e com maior memória, acompanhados por pacotes de softwares eficientes para resolver os problemas de PO. Isto colocou as técnicas da PO ao alcance de um grande número de pessoas. Atualmente, milhões de indivíduos têm acesso à aplicação das modernas técnicas da PO.

As origens científicas da PO datam de muito tempo antes da Segunda Guerra Mundial. Modelos primitivos de programação matemática foram apresentados pelos economistas Quesnay, em 1759; e Walras, em 1874; modelos econômicos mais sofisticados de um gênero semelhante foram propostos por Von Neumann, em 1937, e como foi dito, por Kantorovich em 1939. As bases matemáticas de modelos lineares foram estabelecidas perto da mudança do século XIX. Em 1826, Fourier descobriu um método para manipular desigualdades lineares, que está muito relacionado com a solução de problemas de programação linear. Outros trabalhos precursores são devidos a Jordan, em 1873; Minkowski, em 1896; e Farks, em 1903. Outro exemplo de resultado precursor é o trabalho seminal sobre modelos dinâmicos devido a Markov, que viveu de 1856 a 1922.

O desenvolvimento da PL estimulou o crescimento de outros ramos da Teoria de Otimização, como a Análise Convexa, que constitui atualmente um dos pilares mais sólidos, e ainda em construção, da Otimização. Os trabalhos do eminente matemático John Von Neumann foram decisivos na expansão dos resultados mais importantes nessas áreas no século XX. Outro nome inesquecível na otimização é o do matemático russo Lev S. Pontriaguin, pai da Teoria do Controle Ótimo.

Observa-se nesta breve síntese a importância dos problemas de otimização na Matemática e suas remotas origens na antiguidade da história da matemática, onde muitos problemas geométricos de máximos e mínimos configuraram o gérmen de métodos e técnicas avançadas de otimização. A beleza de muitos desses problemas cativa e pode ser fonte de recursos didáticos para ensinar uma Matemática mais atraente para os alunos.

3 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE EXTREMOS GEOMÉTRICOS

Este capítulo tem por objetivo estudar e exemplificar um conjunto de métodos para calcular extremos de natureza geométrica, seguindo fundamentalmente a (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006), de modo a descrever uma sistemática na resolução deste tipo de problemas, o que acredita-se ser de utilidade para os professores, no ensino da Matemática na escola, e na preparação de alunos para Olimpíadas de Matemática.

Os principais métodos abordados serão:

- (1) Utilizando transformações geométricas.
- (2) Aplicando desigualdades algébricas.
- (3) Método da Variação parcial.
- (4) Princípio da Tangência.
- (5) Aplicando recursos do Cálculo Diferencial.

Antes de entrar propriamente nos métodos, serão feitas algumas considerações gerais, especialmente sobre a análise da existência de soluções na resolução dos problemas geométricos de otimização.

3.1 ANÁLISE DA EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO NOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS DE OTIMIZAÇÃO

Na resolução de problemas de máximos e mínimos aplicando métodos analíticos o problema da análise *a priori* da existência de soluções é factível aplicando certos teoremas, como o de Weierstrass (cf. página 23), ou ainda se pertinente, ferramentas mais sofisticadas como resultados da área de Otimização Convexa.

Uma vez provado que existe solução ótima se procura alguma via para achá-la. No ensino médio essas ferramentas analíticas que promovem propriedades suficientes para a existência de extremos não podem ser utilizadas com facilidade e, portanto, os problemas de otimização geométricos são resolvidos geralmente sem analisar com rigor o assunto da existência de soluções. Em uma abordagem de solução puramente geométrica é preciso algumas vezes partir do fato que o problema possui solução. Mas deve-se ser cauteloso, pois existem problemas de extremos em geometria que

não possuem solução, por exemplo: determinar os polígonos de área máxima e de área mínima inscritos em uma circunferência dada. A existência de solução é uma dificuldade significativa que merece atenção quando se resolve um desses problemas.

Sobre isto, (PASQUALI, 2014) expressa:

Este aspecto de um problema [a existência de solução] é raramente discutido em problemas em geral no ensino médio. No entanto, esta questão é extremamente importante e deve ser sempre considerada. Se, sabemos, a priori, que um problema tem solução, então é possível fazer uma análise de como se pode chegar a solução e porque o resultado é de fato solução do problema.

A utilização de certos resultados considerados avançados não deve ser tomada como algo “proibido” na resolução de problemas de extremos no âmbito do ensino médio, mas como uma opção factível se tomada com bom senso pedagógico e metodológico e, claro, levando em conta as características dos alunos. Veja a opinião ao respeito de (FIGUEIREDO, 1989):

... nossas discussões seguem quase sempre raciocínios geométricos, procurando mostrar a beleza e a elegância da Geometria Euclidiana. Entretanto, não pusemos limites quanto aos métodos utilizados. Em alguns lugares fazemos uso da Geometria Analítica, do Cálculo Vetorial e do Cálculo Diferencial. Não vemos mérito em evitar essas técnicas, quando elas fornecem soluções simples e elegantes.

No próprio artigo, (FIGUEIREDO, 1989) esclarece sobre o mesmo assunto:

Nossa atitude em comentar assuntos mais avançados é proposital e tem o caráter pedagógico de mostrar que a Matemática tem uma evolução e que as várias teorias se interrelacionam. Esse é um aspecto da Matemática que a torna particularmente bela!

Em relação ao problema da análise da existência de soluções nos problemas geométricos de máximos e mínimos no ensino da Geometria na escola, (PASQUALI, 2014) adota o que denomina “Argumento da Continuidade”. Segundo a autora:

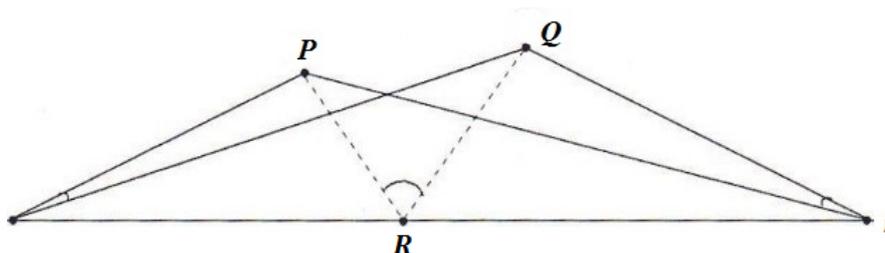
O argumento de continuidade, que será utilizado aqui de forma intuitiva, pode ser enunciado da seguinte maneira: “Se uma certa grandeza (perímetro, área ou um ângulo), que depende de um outro valor (um lado, uma altura, etc.) que varia continuamente entre dois números (todos números reais), também varia de forma contínua em relação àquele valor, então esta grandeza pode assumir um valor máximo e/ou um valor mínimo”. Mais especificamente, se uma certa grandeza varia de um valor próximo a zero crescendo, e depois decrescendo novamente, então ela deve passar por um valor máximo. Se uma certa grandeza varia de um “valor grande”, decresce e volta a crescer, então ela deve passar por um mínimo. E assim há outras argumentações deste tipo. Estes argumentos estão fundamentados de forma precisa em resultados do cálculo relativos a funções contínuas que são meras aplicações (ou exercícios) do teorema de Weierstrass.

Para ilustrar a ideia de (PASQUALI, 2014), será mostrado seus argumentos sobre a existência da solução do Problema de Heron.

Problema 3.1.1 (Problema de Heron). *Sejam uma reta r e dois pontos P e Q no mesmo lado de r . Achar um ponto R sobre r de tal forma que a soma $PR + RQ$ seja mínima, ou seja, qual o caminho mais curto de P a Q tocando r ?*

Pelo argumento de continuidade percebe-se que o problema tem solução. Ou seja, se o ponto R estiver “infinitamente à direita” na reta r , podemos perceber que a soma $PR + RQ$ é muito grande. Se deslocarmos o ponto R para a esquerda em r , podemos perceber que a soma $PR + RQ$, variando continuamente, diminui e torna-se novamente muito grande quando estiver “infinitamente à esquerda” em r . Portanto, a soma $PR + RQ$ passa por (pelo menos) um ponto em que ela é mínima. Logo o problema tem solução.

Figura 4 – Análise da existência da solução do problema de Heron



Fonte:(PASQUALI, 2014)

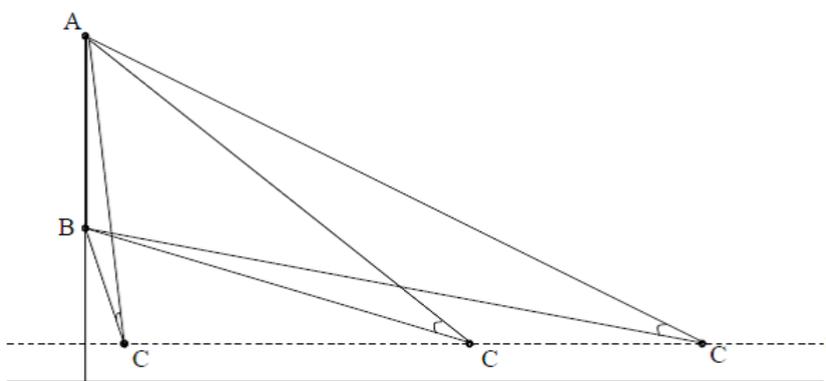
Outro exemplo da autora da aplicação do argumento da continuidade aparece na solução do histórico problema de Regiomontano (1436-1476). Regiomontano, ou melhor, Johannes Müller von Königsber, também conhecido como Regiomontanus, foi um matemático, astrólogo e cosmógrafo alemão reconhecido como um dos mais destacados matemáticos do século XV. Atribui-se a ele a invenção dos sinais + e – num manuscrito datado em 1456. O problema de otimização seguinte (1471) leva seu nome.

Problema 3.1.2 (Problema de Regiomontanus). *Suponha uma estátua de altura h sobre um pedestal de altura p . Um homem de altura m ($m < p$) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo α , que varia de acordo com a distância d entre o homem e a base do pedestal. Determinar d para que o ângulo de visão α seja o maior possível. Tomado de (PASQUALI, 2014).*

A análise da existência da solução dada em (PASQUALI, 2014) é a seguinte:

Inicialmente, iremos denominar o ponto A como sendo o topo da estátua, o ponto B como sendo o pé da estátua e o ponto C como sendo os olhos do observador. Usando o argumento de continuidade podemos perceber que o problema tem solução. Se o ponto C estiver “infinitamente à direita” da estátua, podemos notar que o ângulo de visão é muito pequeno. Se o ponto C for se aproximando da estátua, poderemos notar que o ângulo de visão aumenta, e a partir de um determinado momento ele passa a diminuir novamente, até tornar-se zero (quando o observador encontra-se no pé da estátua). O mesmo ocorre, se o observador estiver à esquerda da estátua. Assim, deve existir uma posição para o ponto C tal que o ângulo $\alpha = \widehat{ABC}$ de visão é máximo, e portanto o problema tem solução.

Figura 5 – Análise da existência da solução do problema de Regiomontanus



Fonte:(PASQUALI, 2014)

Evidentemente, a aplicação do *argumento da continuidade* não é formal, já que a função teria que ser definida com maiores detalhes, como por exemplo, dizendo quais são o domínio e o contradomínio, e provar com rigor o cumprimento das hipóteses do teorema de Análise que seja aplicado. No ensino médio isso é impossível. Mas, é uma boa ideia introduzir intuitivamente a análise da existência de solução mostrando aos alunos como se trabalha em Matemática. Sem dúvida, o ensino da Matemática na escola deveria levar aos alunos a perceber que esta é uma ciência cujo método científico é diferente do utilizado nas outras ciências, inclusive nas denominadas exatas, como a Física. Noções sobre como se estrutura uma teoria matemática, o que é um teorema, uma definição, uma demonstração de alguma forma deveriam aparecer no conteúdo. A ideia da aplicação do argumento da continuidade, contribui favoravelmente nesse sentido. Na maioria das soluções apresentadas em (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006) não se analisa previamente a existência de soluções.

É conveniente destacar que em geral os métodos de solução dos problemas de otimização geométricos muitas vezes possuem uma dose de intuição e heurística que

pode contrastar com o paradigma do rigor absoluto, que a todas luzes, é inapropriado para o nível da escola.

A seguir abordaremos cada um dos métodos estudados em (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006).

3.2 MÉTODO DE CÁLCULO DE EXTREMOS UTILIZANDO TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

É chamado de transformação geométrica uma aplicação bijetiva entre duas figuras geométricas, no mesmo plano ou em planos diferentes, de modo que, a partir de uma figura geométrica original se forma outra geometricamente igual ou semelhante à primeira.

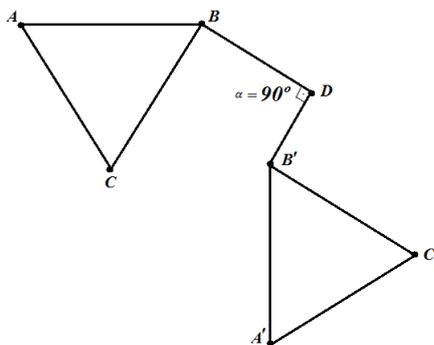
É muito utilizado na solução de problemas em Geometria, submeter à figura objeto de análise a determinadas transformações, de modo a levá-la a uma situação na qual seja mais fácil trabalhar. Nos problemas de cálculo de máximos e mínimos geométricos esta estratégia é, com certa frequência, empregada. Dentre as principais transformações utilizadas podemos citar as simetrias, as rotações e as homotetias. Nesta seção será ilustrado este método através de exemplos. Antes de desenvolver os exemplos será feito um breve resumo abordando as definições das transformações geométricas mais utilizadas.

Definição 3.2.1 (Rotação). *No plano uma rotação de centro D e amplitude α é uma transformação geométrica que a cada ponto B faz corresponder um ponto B' tal que:*

$$\overline{DB} = \overline{DB'}$$

$$\widehat{BDB'} = \alpha$$

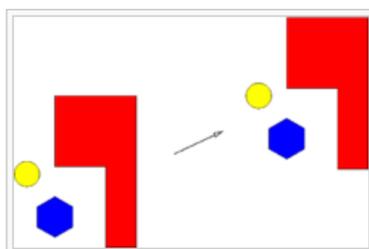
Figura 6 – Rotação de um triângulo em 90°



Pode ser no sentido positivo, quando se move ao contrário do sentido dos ponteiros do relógio, ou no sentido negativo, quando se move no mesmo sentido dos ponteiros dos relógios.

Definição 3.2.2 (Translação). *É o movimento que um objeto realiza de um ponto a outro. É o deslocamento paralelo, em linha reta na mesma direção e no mesmo sentido, de um objeto ou figura, em função de um vetor percorrendo a mesma distância. Uma translação é uma isometria que desloca a figura original segundo uma direção, um sentido e um comprimento (vetor). As translações conservam a direção e o comprimento de segmentos de reta, e as amplitudes dos ângulos.*

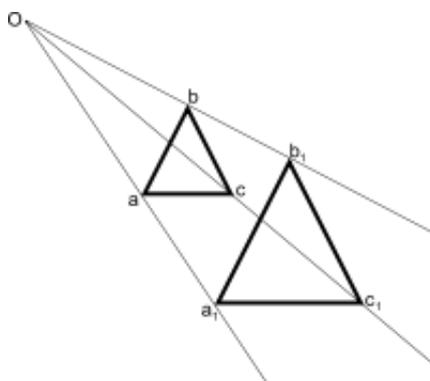
Figura 7 – Translação de três objetos



Fonte: (WIKIPEDIA, 2014)

Definição 3.2.3 (Homotetia). *Podemos, de forma resumida, dizer que duas figuras geométricas semelhantes estarão em homotetia, sempre que todos os pares de pontos correspondentes concorrerem num mesmo ponto fixo, chamado de centro da homotetia.*

Figura 8 – Homotetia direta



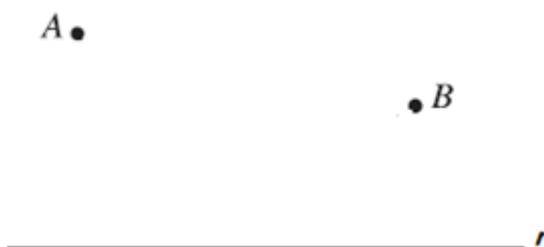
Fonte: (WIKIPEDIA, 2014)

A aplicação das transformações geométricas na resolução de problemas extremos tem sido usada das mais diversas formas, como será visto nos exemplos a seguir:

Exemplo 3.2.1. (Este é o conhecidíssimo problema de Heron). Seja dada uma reta r no plano e dois pontos A e B , localizados no mesmo semiplano determinado por r . Deve-se encontrar um ponto X em r tal que a poligonal AXB tenha o mínimo comprimento.

Solução: Sejam dados dois pontos quaisquer A e B localizados no mesmo semiplano determinado por uma reta r qualquer, conforme mostrado na figura 9.

Figura 9 – Enunciado do problema de Heron

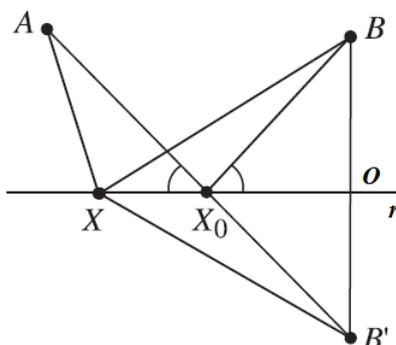


Fonte: Autor

Seja B' o ponto simétrico a B em relação a r . Assim, a distância de B até r é igual a distância de B' até r . Seja X_0 o ponto de interseção entre o segmento AB' e r . Logo, $AX_0B = AX_0B'$, pois os triângulos OBX_0 e $OB'X_0$ são congruentes pelo caso LAL. Vamos mostrar agora que a poligonal AX_0B é mínima. De fato: seja X um ponto qualquer em r tal que $X_0 \neq X$.

Pela desigualdade triangular, temos que $AX + XB' > AB'$. Como $XB' = XB$, pois os triângulos AXB e AXB' são congruentes pelo caso LAL, e ainda $X_0B' = X_0B$, tem-se $AXB > AX_0B$. Logo, o ponto X_0 é tal que o comprimento AX_0B é mínimo, como desejava-se mostrar.

Figura 10 – Solução do problema de Heron



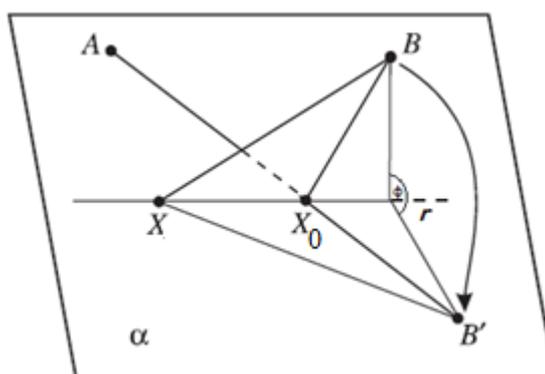
Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

O seguinte problema é uma generalização do anterior ao espaço de três dimensões.

Exemplo 3.2.2. *No espaço são dados uma reta r e dois pontos A e B que não sejam coplanares com r . Propõe-se encontrar um ponto X em r tal que a poligonal AXB tenha o mínimo comprimento.*

Solução: Seja α um plano que contenha a reta r e o ponto A . Faz-se uma rotação conveniente de ϕ graus do ponto B em torno de r , de modo que B se transforme no ponto B' do plano α , tal que os pontos A e B' não estejam no mesmo semiplano de ϕ determinado por r e $OB = OB'$ (vide figura 11). Seja X_0 o ponto de interseção do segmento AB' com a reta r . Analogamente ao problema do exemplo 3.2.1, resulta fácil ver que $AX_0B = AX_0B'$. Deseja-se mostrar que a poligonal AX_0B possui o comprimento mínimo. Seja X um ponto qualquer em r tal que $X_0 \neq X$.

Figura 11 – Aplicação de transformação geométrica: rotação



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

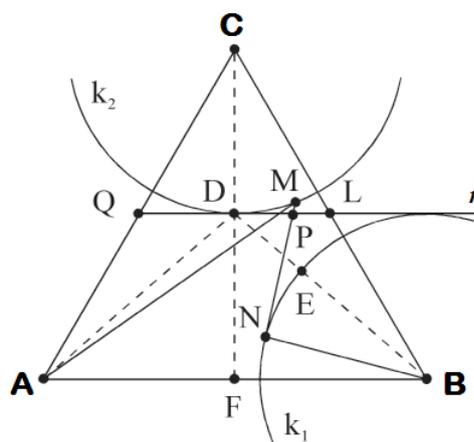
Logo, $AX + XB = AX + XB' \geq AB' = AX_0 + X_0B'$, onde a igualdade ocorre exatamente quando $X_0 = X$. Assim, X_0 é o ponto de r tal que a poligonal AX_0B seja mínima, como desejava-se mostrar.

O próximo problema foi retirado da Olimpíada Internacional de Matemática.

Exemplo 3.2.3. *Um soldado tem que verificar a existência de minas em uma região que tem a forma de um triângulo equilátero. O raio de ação do detector de minas é metade da altura do triângulo. Assumindo que o soldado começa num dos vértices do triângulo, encontrar o caminho mais curto que ele poderia usar para levar a cabo a sua tarefa.*

Solução: Represente a região minada pelo triângulo equilátero ABC e por h o comprimento da sua altura. Assuma que a trajetória do soldado começa no ponto A . Considere as circunferências k_1 e k_2 com centros, respectivamente, em B e C , ambas com raio $\frac{h}{2}$, conforme mostrado na figura 12.

Figura 12 – Representação do raio de ação do soldado



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

A fim de verificar os pontos B e C , o caminho do soldado deve ter pontos de interseção com as circunferências k_1 e k_2 . Seja t o comprimento total do caminho do soldado, M o ponto de interseção desse caminho com k_2 e N o ponto de interseção com k_1 . Seja r a reta paralela a base AB e que passa no ponto médio da altura do triângulo. Denote por D o ponto médio da altura.

Adicionando a constante $\frac{h}{2}$ para t e usando a desigualdade triangular, obtém-se:

$$t + \frac{h}{2} = AM + MN + NB = AM + MP + PN + NB \geq AP + PB \quad (3.1)$$

onde P é o ponto de intersecção de MN e r . Por outro lado, o problema de Heron (Exemplo 3.2.1) mostra que $AP + PB \geq AD + DB$, onde ocorre a igualdade precisamente quando $P = D$.

Da equação (3.1) implica que:

$$t + \frac{h}{2} = AM + MN + NB = AM + MP + PN + NB \geq AP + PB \geq AD + DB$$

Logo,

$$t + \frac{h}{2} \geq AD + DB$$

Como $DB = DE + EB$, e ainda, $EB = \frac{h}{2}$, então:

$$t + \frac{h}{2} \geq AD + DE + EB$$

$$t \geq AD + DE$$

onde E é o ponto de intersecção entre DB e k_1 .

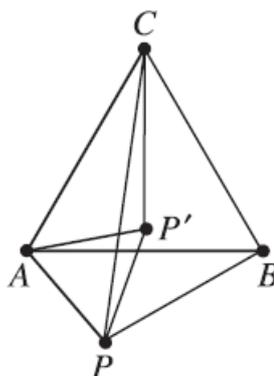
O argumento anterior mostra que o caminho mais curto do soldado que começa em A e tem pontos comuns, primeiro com k_2 e, em seguida com k_1 , é a poligonal ADE . Mostra-se agora que ao percorrer este caminho, o soldado consegue verificar toda a região delimitada pelo $\triangle ABC$. Sejam F, Q e L os pontos médios, respectivamente, dos lados AB, AC , e BC . Como $DL < \frac{h}{2}$, pois do triângulo LDC , o maior ângulo opõe-se ao maior lado e o menor ângulo opõe-se ao menor lado; como o menor ângulo é $\widehat{DCL} = 30^\circ$, segue-se que $DL < \frac{h}{2}$, daí conclui-se que o círculo com o centro D e raio $\frac{h}{2}$ contém o todo $\triangle QLC$. Em outras palavras, a partir da posição D o soldado vai ser capaz de verificar toda a região delimitada pelo $\triangle QLC$. Quando o soldado se move ao longo do segmento AD , ele irá verificar todos os pontos da região delimitada pelo quadrilátero $AFDQ$, pois a altura do triângulo AFD referente a base AD é menor que $\frac{h}{2}$ pelo mesmo argumento acima (maior lado opõe-se o maior ângulo) e de forma análoga a altura do triângulo ADQ referente a base AD também é menor $\frac{h}{2}$, de onde conclui-se que quando o soldado se move ao longo do segmento AD , ele irá verificar todos os pontos da região delimitada pelo quadrilátero $AFDQ$. Analogamente, enquanto se move ao longo de DE , ele irá verificar todos os pontos da região limitada pelo quadrilátero $FBLD$. Deste modo, movendo-se ao longo do caminho de ADE , o soldado será capaz de verificar toda a região limitada por $\triangle ABC$. Assim, ADE é uma solução para o problema.

Exemplo 3.2.4. *Seja ABC um triângulo equilátero e P um ponto no seu plano. Prove que existe um triângulo com lados iguais aos segmentos de reta AP , BP , e CP . Este triângulo é degenerado se, e somente se, P encontra-se na circunferência circunscrita no triângulo ABC .*

Deseja-se mostrar que para cada ponto P no plano ABC , a desigualdade $AP + BP \geq CP$ é verdade. A igualdade ocorre se, e somente se, P pertence ao arco AB da circunferência circunscrita no triângulo ABC .

Solução: Considere $CP \geq AP$ e $CP \geq BP$. Agora, façamos uma rotação de 60° no sentido anti-horário sobre A , movendo o ponto P para P' . Então $AP = AP'$ e $\widehat{PAP'} = 60^\circ$. Então $\triangle APP'$ é equilátero. Assim $PP' = PA$. Note também que a rotação carrega B para C . Daí o segmento $P'C$ é o reflexo do segmento PB sob a rotação de 60° , portanto $CP' = BP$. Assim o triângulo PCP' tem lados iguais aos segmentos AP , BP e CP . Por causa da suposição $CP \geq AP$, $CP \geq BP$ e ainda $\widehat{APP'} = 60^\circ$, então o triângulo existe e é degenerado se e somente se $\widehat{APC} = 60^\circ = \widehat{ABC}$, caso em que $APBC$ é um quadrilátero cíclico. Esta última significa que o ponto P reside no arco AB da circunferência do ABC .

Figura 13 – Triângulo equilátero ABC e um ponto P em seu plano



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

3.3 MÉTODO DE CÁLCULO DE EXTREMOS EMPREGANDO DESIGUALDADES ALGÉBRICAS

Uma grande variedade de problemas geométricos de máximos e mínimos pode ser resolvida através de desigualdades algébricas apropriadas. De modo geral, muitas desigualdades algébricas podem ser interpretadas geometricamente e aplicadas em alguns problemas. Um exemplo típico é a desigualdade das médias aritmética e

geométrica, definida por:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Nesta seção, será abordado diversos problemas geométricos em máximos e em mínimos usando desigualdades algébricas clássicas. Ao usar esta aproximação a solução é dada normalmente pelos casos em que a igualdade ocorre. Isso porque é completamente importante analisar com cuidado estes casos. Segue abaixo algumas desigualdades algébricas clássicas que são usadas frequentemente na resolução de problemas de extremos geométricos.

1. **Desigualdade das médias:** Sejam x_1, x_2, \dots, x_n números reais positivos. Definimos:

$$MQ = \text{Média Quadrática: } MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

$$MA = \text{Média Aritmética: } MA = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$MG = \text{Média Geométrica: } MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$MH = \text{Média Harmônica: } MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

Tem-se que $MH \leq MG \leq MA \leq MQ$. A igualdade ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. A desigualdade $MG \leq MA$ é chamada em alguns textos de Desigualdade de Cauchy.

2. **Desigualdade de Bernoulli:** Se $x \in \mathbb{R}$, $x > -1$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

3. **Desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz:** Se $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ são números reais quaisquer, $n \geq 2$, cumpre-se que:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$$

A igualdade se cumpre se, e somente se, x_i e y_i são proporcionais, $i = 1, 2, \dots, n$.

4. **Desigualdade de Minkowski:** Se $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, z_1, z_2, \dots, z_n$ são números reais quaisquer, $n \geq 2$, cumpre-se que:

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + \dots + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + \dots + z_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2 + \dots + z_n^2} \\ & \geq \sqrt{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \dots + y_n)^2 + \dots + (z_1 + z_2 + \dots + z_n)^2} \end{aligned}$$

Para ilustrar o método do cálculo de extremos utilizando desigualdades algébricas será explorado alguns exemplos. Começa com o problema isoperimétrico do triângulo, que é um problema clássico bem conhecido.

Exemplo 3.3.1. *De todos os triângulos com um determinado perímetro encontrar aquele com máxima área.*

Solução: Seja A a área de um triângulo qualquer de lados a, b, c e $2s = a + b + c$ o seu perímetro. Pela fórmula de Heron, sua área A é dada por:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Por outro lado, usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os valores $(s-a)$, $(s-b)$ e $(s-c)$, tem-se:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{3}$$

Agora, fica:

$$\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{3} = \frac{s-a+s-b+s-c}{3} = \frac{3s-(a+b+c)}{3} = \frac{s}{3}$$

pois, $a + b + c = 2s$. Logo:

$$\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{3} = \frac{s}{3}$$

Por transitividade, resulta:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \frac{s}{3} \\ (s-a)(s-b)(s-c) &\leq \left(\frac{s}{3}\right)^3 \end{aligned}$$

Multiplicando por s ambos os membros da desigualdade, e logo em seguida aplicando a raiz quadrada, resultará:

$$\begin{aligned} s(s-a)(s-b)(s-c) &\leq s \left(\frac{s}{3}\right)^3 \\ \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &\leq \sqrt{s \left(\frac{s}{3}\right)^3} \end{aligned}$$

Pela fórmula de Heron, tem-se $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, então da desigualdade acima:

$$A \leq \sqrt{s \left(\frac{s}{3}\right)^3}$$

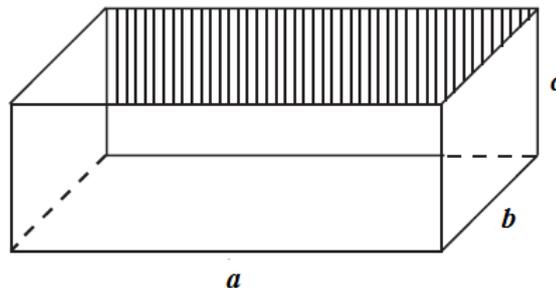
$$A \leq \sqrt{\frac{s^4}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}} = \frac{s^2\sqrt{3}}{9}$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $s - a = s - b = s - c$, ou seja, quando $a = b = c$. Assim, a área de qualquer triângulo de perímetro $2s$ não excede $\frac{s^2\sqrt{3}}{9}$ e será igual apenas quando $a = b = c$, ou seja, para um triângulo equilátero.

Exemplo 3.3.2. De todas as caixas retangulares sem uma tampa e tendo como superfície uma determinada área, encontrar aquele com o volume máximo.

Solução: Sejam a, b, c as medidas das arestas da caixa conforme a figura abaixo, e seja A a área da superfície da caixa.

Figura 14 – Caixa retangular sem tampa



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

Como a caixa tem 5 faces, pois está sem tampa, tem que se calcular a área de sua superfície total. Assim,

$$A = ab + 2bc + 2ac$$

Usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica:

$$\sqrt[3]{(ab)(2bc)(2ac)} \leq \frac{ab + 2bc + 2ac}{3}$$

$$\sqrt[3]{4a^2b^2c^2} \leq \frac{A}{3}$$

Elevando os dois membros da desigualdade a terceira potência:

$$\left(\sqrt[3]{4a^2b^2c^2}\right)^3 \leq \left(\frac{A}{3}\right)^3$$

$$4a^2b^2c^2 \leq \left(\frac{A}{3}\right)^3$$

Como o volume da caixa é definido por $V = abc$, então:

$$4V^2 \leq \left(\frac{A}{3}\right)^3$$

$$\sqrt{4V^2} \leq \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

$$2V \leq \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

$$V \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

onde o volume máximo se dá quando existe a igualdade, ou seja, $ab = 2bc = 2ac$. Dessa igualdade, concluímos que $a = b$ e $c = \frac{a}{2}$. Logo, o volume máximo se dá quando:

$$V = abc = a.a.\frac{a}{2} = \frac{a^3}{2}$$

Da desigualdade do volume temos:

$$V \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}$$

$$V \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A}{3} \frac{A}{3} \frac{A}{3}\right)}$$

$$V \leq \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)}$$

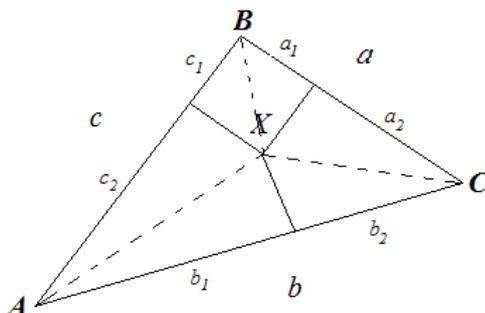
Considerando o volume máximo quando ocorre a igualdade e relacionando com a fórmula do volume, teremos:

$$V = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)} \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)}$$

$$\text{Assim, } a = b = \sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)} \text{ e } c = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{A}{3}}$$

Exemplo 3.3.3. Dado um triângulo ABC qualquer e seja X um ponto interior ao triângulo. Denotando por x, y, z a distância de X aos lados BC, AC e AB , respectivamente. Encontrar a posição de X para que a soma $x^2 + y^2 + z^2$ seja mínima.

Figura 15 – Triângulo ABC qualquer com um ponto interior X



Fonte: Autor

Solução: Considere $a = BC, b = AC$ e $c = AB$, conforme a figura 15.

Calculando a área de cada um dos 6 triângulos da figura:

$$A = \frac{a_1 \cdot x}{2} + \frac{a_2 \cdot x}{2} + \frac{b_1 \cdot y}{2} + \frac{b_2 \cdot y}{2} + \frac{c_1 \cdot z}{2} + \frac{c_2 \cdot z}{2}$$

$$A = \frac{(a_1 + a_2)x}{2} + \frac{(b_1 + b_2)y}{2} + \frac{(c_1 + c_2)z}{2}$$

$$A = \frac{ax + by + cz}{2}$$

Então $2[ABC] = ax + by + cz$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$4[ABC]^2 = (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4[ABC]^2}{(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Dessa forma, a soma $x^2 + y^2 + z^2$ deve ser mínima para todos os pontos X . Assim:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

Para qualquer triângulo existe apenas um ponto X que satisfaz a condição acima. Esse ponto é chamado Ponto de Lemoine, que é definido como o ponto de intersecção das semimedias do triângulo em relação às bissetrizes correspondentes. Como se busca o valor máximo da expressão $x^2 + y^2 + z^2$, não é difícil ver que isso

acontece quando X coincide com o vértice do menor ângulo do triângulo. Sem perda de generalidade, considere $a = BC$ o menor lado (ou um deles) do triângulo ABC . Agora, $a(x + y + z) \leq ax + by + cz = 2[ABC]$, então $x + y + z \leq h_a$, onde h_a é a altura relativa ao lado BC (vértice A). Por outro lado, sabe-se que:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq (x + y + z)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq h_a^2$$

A igualdade ocorre quando $X = A$.

3.4 O MÉTODO DA VARIAÇÃO PARCIAL

Este método se baseia na observação de que se uma função de várias variáveis alcança um extremo (máximo ou mínimo) em relação a todas as variáveis, também o alcança em relação a qualquer subconjunto das variáveis originais.

Para ilustrar a ideia será utilizado um exemplo particular. Suponhamos que $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tem um máximo (mínimo) em $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3, x_4 = a_4, x_5 = a_5$. Então, a função $g(a_1, a_2, x_3, x_4, a_5)$ tem um máximo (mínimo) em $x_3 = a_3, x_4 = a_4$. A recíproca é falsa, isto é, se existir um extremo para a função original restringida a algum subconjunto das variáveis, não é válido inferir que existe extremo em relação a todas as variáveis.

O método de variação parcial pode ser utilizado com sucesso quando se supõe que o problema de máximo ou mínimo a ser considerado tenha uma solução. Na verdade, mesmo quando não se conhece a existência de uma solução, é por vezes possível, utilizando a variação parcial, obter algumas dicas e até mesmo descrever precisamente o que o objeto extremal poderia ser. Isto é, como um recurso heurístico na procura da solução.

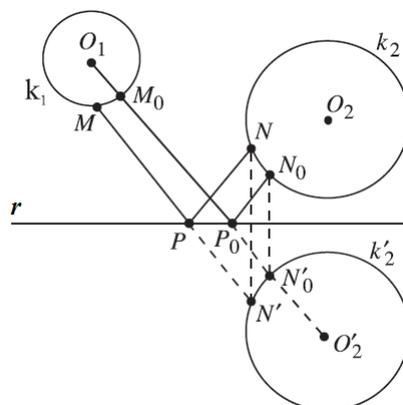
Nas soluções dos problemas considerados abaixo será usado variações parciais sem assumir de antemão que existem os respectivos objetos extremos. A construção deste último será feita no decurso da solução.

Exemplo 3.4.1. *Uma reta r é dada no plano e duas circunferências k_1 e k_2 no mesmo lado da reta. Encontre o caminho mais curto de k_1 para k_2 de modo que tenham um ponto comum em r .*

Solução: Para solucionar o problema é necessário encontrar pontos M em k_1 , N em k_2 e P em r tais que $t = MP + PN$, de forma que a distância t seja mínima. Seja O_1 e O_2 os centros das circunferências k_1 e k_2 respectivamente. Usando a primeira

técnica de resolução de problemas extremais apresentada nesse trabalho (utilizando transformações geométricas) e considerando uma outra circunferência k'_2 , de centro O'_2 , simétrico a k_2 em relação a r , tem-se a distância mínima quando P coincide com o ponto de interseção da reta r com o segmento MN' , conforme mostra a figura 16.

Figura 16 – Reta r e circunferências k_1 e k_2



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

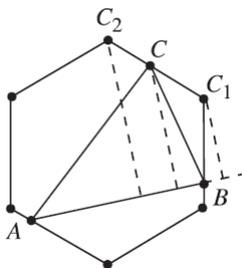
Dessa forma, o ponto N' é simétrico a N em relação a r . Logo, $t = MP + PN'$. Assim, o problema reduz a encontrar o segmento MN' de modo que seu comprimento seja mínimo. Pelas propriedades da circunferência, sabe-se que a menor distância entre k_1 e k'_2 é o segmento $M_0N'_0$, onde M_0 e N'_0 são os pontos de interseção do segmento $O_1O'_2$ com as circunferências k_1 e k'_2 respectivamente. Agora, basta tomar P_0 , o ponto de interseção entre $O_1O'_2$ e r . Assim, a distância $M_0P_0N'_0$ será a solução do problema.

Exemplo 3.4.2. *Seja P um polígono qualquer no plano. Mostre que de todos os triângulos inscritos em P existe um com seus vértices entre os vértices de P tal que sua área seja máxima. Da mesma forma, de todos os triângulos inscritos em P existe um com seus vértices entre os vértices de P tal que seu perímetro seja máximo.*

Solução: Considere arbitrariamente um triângulo ABC inscrito em P , ou seja, os pontos A, B e C estão entre os vértices de P . Basta fixar os pontos A e B por um instante e considerar C entre os vértices C_1 e C_2 de P , conforme a figura 17. Pode se notar facilmente que pelo menos uma das distância C_1 ou C_2 a reta suporte que passa por AB é maior que a distância entre C e AB . Denotando por C' esse vértice cuja distância é maior, temos que $[ABC'] \geq [ABC]$, pois os triângulos possuem a mesma base AB . Logo, tem maior área o triângulo de maior altura. De maneira semelhante, fixando os pontos A e C' , encontra-se um vértice B' tal que $[AB'C'] \geq [ABC']$ e ainda fixando os pontos B' e C' encontra-se um vértice A' tal que $[A'B'C'] \geq [AB'C']$. Por

transitividade, concluí-se que $[A'B'C'] \geq [ABC]$. De todos os triângulos inscritos em P , existe um conjunto finito de triângulos cujos vértices estão entre os vértices de P , conforme o enunciado do problema. Segue que, a partir dos argumentos acima, existe um triângulo T , tal que qualquer triângulo inscrito em P não possui área maior do que T .

Figura 17 – Triângulo inscrito num polígono qualquer p



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

Para a segunda parte do problema, basta proceder de forma análoga a primeira. Antes, deve-se considerar o lema a seguir:

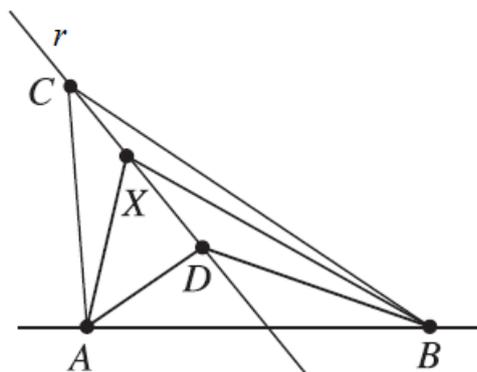
Lema 3.4.1. *Sejam A, B, C e D quatro pontos distintos no plano de tal modo que os pontos C e D encontram-se no mesmo semiplano formado pela reta suporte de AB . Então, existe um ponto X em CD tal que $AX + XB$ é máximo e tal ponto coincide com o ponto C ou D .*

Prova do lema: Seja r a reta suporte do segmento CD . Considere dois casos:

Caso 1: a reta r intercepta o segmento AB .

Sem perda de generalidade, considere que o ponto D esteja mais próximo de AB do que o ponto C . Agora, precisa-se encontrar um ponto X em CD de tal forma que a poligonal AXB tenha comprimento máximo. É evidente que a solução única para esse problema é $X = C$, pois esse tem maior distância de AB , conforme a figura 18.

Figura 18 – Representação do lema: caso 1

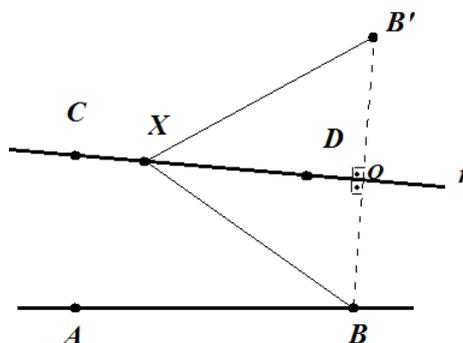


Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

Caso 2: a reta r não intercepta o segmento AB .

Seja B' o ponto de simetria de B em relação a r . Logo, $XB = XB'$, pois os triângulos OXB e OXB' são congruentes pelo caso LAL. Então, $AX + XB = AX + XB'$ para qualquer X em r . Assim, basta considerarmos os pontos A, B', C e D que cairemos no caso 1. Isso prova o lema.

Figura 19 – Representação do lema: caso 2



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

De maneira análoga a primeira parte do problema e usando o lema 3.4.1 pode-se concluir que existe um triângulo T , tal que qualquer triângulo inscrito em P não possui perímetro maior do que T .

3.5 O PRINCÍPIO DA TANGÊNCIA

O método de procura de extremos geométricos baseado no denominado *Princípio da Tangência* utiliza curvas de nível de funções definidas no plano ou espaço. O conceito de curva de nível de uma superfície é familiar aos alunos dos cursos de

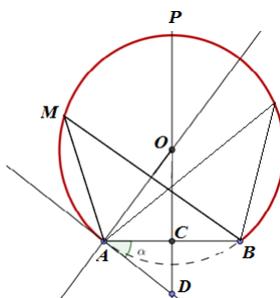
Matemática, pois é estudado na disciplina de Cálculo Diferencial de Funções de várias Variáveis. Aqui se utilizará de maneira mais intuitiva. Para ilustrar como o método funciona e facilitar a compreensão das propriedades nele envolvidas será apresentado o problema a seguir. Após o desenvolvimento do exemplo segue a descrição do método em forma geral.

Exemplo 3.5.1. *Seja r uma reta dada no plano e A e B dois pontos situados no mesmo semiplano determinado por r . Achar o ponto $M \in r$ tal que o ângulo \widehat{AMB} seja máximo.*

Para abordar a solução do problema proposto é conveniente lembrar o problema geométrico clássico sobre lugares geométricos que conduz à definição do conceito de *arco capaz*. Esse problema, conhecido também na literatura como Problema de Thales tem o seguinte enunciado: Dados dois pontos A e B do plano e um ângulo α , também dado, determinar o lugar geométrico dos pontos do plano desde os quais se enxerga o segmento AB sob o ângulo constante α .

Solução: Sejam os pontos A e B como no enunciado do problema, mostrados na figura 20.

Figura 20 – Determinação do arco capaz



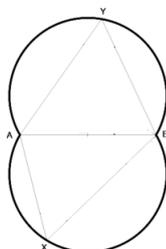
Fonte: Autor

Traça-se a mediatriz PC do segmento AB e desenha-se o dado ângulo α , de modo que seu vértice coincida com o ponto A e o segmento AB seja um dos seus lados. Chame de D ao ponto de interseção do outro lado de α com a mediatriz PC , conforme na figura 20.

Ainda, traça-se uma perpendicular à reta AD que passe por A . Tome o ponto O de interseção dessa perpendicular com a mediatriz PC como centro de uma circunferência de raio OA . Todos os ângulos \widehat{AMB} inscritos na circunferência O com vértice M no arco APB cumprem que $\widehat{AMB} = \alpha$, pois a medida do ângulo inscrito e a medida do ângulo semi-inscrito é igual à metade da medida do arco subtendido, no caso o arco AB desenhado com linha descontínua na figura 20. O arco APB é um dos dois denominados arcos capazes. O outro, evidentemente, é o simétrico do arco

APB com relação ao segmento AB . A união de ambos os arcos simétricos é o lugar geométrico dos pontos do plano que enxergam o segmento AB no ângulo α . Na figura 21 mostra-se um par de arcos capazes correspondentes ao segmento AB .

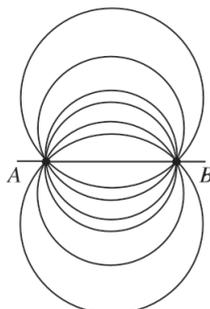
Figura 21 – Arcos Capazes determinados pelo segmento AB e um dado ângulo α



Fonte: Autor

Na figura 22 tem-se a família dos arcos capazes, dispostos em pares simétricos, em relação ao segmento AB . A cada par de arcos corresponde um ângulo α_i .

Figura 22 – Arcos Capazes em pares simétricos em relação ao segmento AB

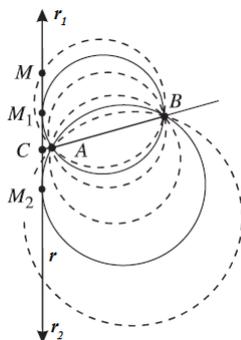


Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

Ao tomar esses arcos capazes para diferentes valores de α obtém-se uma família de arcos que cobrem o plano completo, exceto os pontos que pertencem à reta AB . Cada ponto da reta r do enunciado do problema pertence a um dos arcos dessa família (figura 23) e o problema agora consiste em encontrar o arco da família cujo ponto comum com r corresponde ao maior valor possível dos ângulos.

Primeiramente, considere o caso em que r intersecta à reta AB , como na figura 23. Seja C o ponto de intercepção e r_1 e r_2 as duas semirretas de r de origem em C . Considere o arco γ_1 (desenhado em linha contínua na figura 23) da família descrita acima que é tangente a r_1 , e seja M_1 o ponto de tangência de γ_1 e r_1 . É claro que γ_1 é o menor círculo que passa por A e B e tem interseção não vazia com r_1 . Então, para qualquer ponto M em r_1 , diferente de M_1 , tem-se que $\widehat{AMB} < \widehat{AM_1B}$. Esse fato se

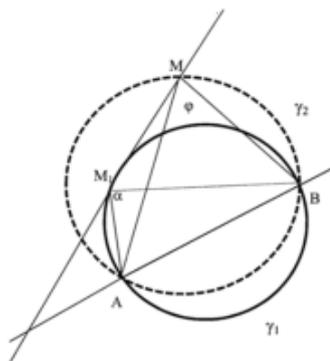
Figura 23 – Solução do problema do exemplo 3.5.1



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

observa com facilidade no destaque mostrado na figura 24, já que o \widehat{AMB} é exterior e o $\widehat{AM_1B}$ é inscrito, ambos subtendendo o mesmo arco do círculo γ_1 .

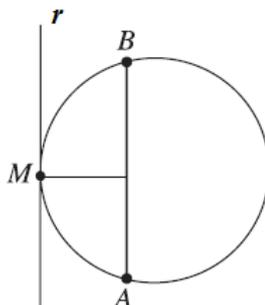
Figura 24 – Comparação das medidas dos ângulos \widehat{AMB} e $\widehat{AM_1B}$



Fonte: Autor

De forma análoga, a semirreta r_2 é tangente a algum arco γ_2 em certo ponto M_2 . A solução do problema é dada por M_1 ou por M_2 (ou por ambos), em dependência de qual dos ângulos seja agudo.

Se a reta r é paralela a AB existe um único arco da família dos arcos capazes que é tangente a r . Nesse caso a solução é dada pelo ponto M que é a interseção de r com a mediatriz do segmento AB , como mostrado na figura 25.

Figura 25 – Reta r paralela a AB 

Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

A partir do exemplo desenvolvido define-se o método de solução neste item sob uma perspectiva geral. Observe os seguintes aspectos no processo de resolução do problema:

1. Estuda o comportamento do ângulo \widehat{AMB} não só para pontos $M \in r$, mas também para pontos fora de r . Mas exatamente, considera o \widehat{AMB} como uma função do ponto M do plano, ou seja, $f(M) = \widehat{AMB}$.
2. Analisa o comportamento da função $f(M) = \widehat{AMB}$ medial associada a todos os arcos nos quais o valor de $f(M)$ é constante. Essas curvas, denominadas curvas de nível, podem ser definidas para qualquer função $f(M)$ cuja variável independente seja um ponto M do plano (ou de um subconjunto próprio do plano). Com maior rigor, se $\lambda \in \gamma$, a curva de nível de $f(M)$ associada a λ é o conjunto L_λ de todos os pontos M do domínio de $f(M)$ tais que $f(M) = \lambda$, isto é, $L_\lambda = \{M : f(M) = \lambda\}$.

Na solução do problema 3.5.1 mostrou-se que o valor máximo da função $f(M) = \widehat{AMB}$, com $M \in r$, é atingido nos pontos onde r é tangente a uma curva de nível de $f(M)$. Uma classe ampla de problemas de máximos e mínimos geométricos no plano pode ser resolvida utilizando a ideia de calcular o valor máximo ou mínimo de uma função $f(M)$ cujo domínio é o plano ou uma parte dele, restringida a uma curva plana L . A seguir segue o enunciado do Princípio de Tangência, segundo Andreescu.

Proposição 3.5.1 (Princípio de Tangência). *Seja $f(M)$ uma função definida no plano. O máximo (mínimo) de f sobre uma curva L do plano é atingido em pontos onde L é tangente a uma curva de nível de $f(M)$.*

Uma justificativa da validade do Princípio de Tangência é a seguinte (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006), página 50: Suponhamos que $f(M)$ alcança seu

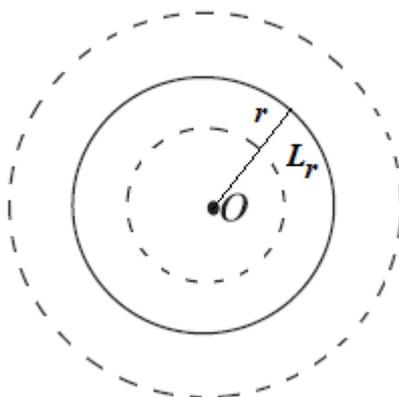
valor máximo sobre L num ponto $P \in L$ e que $f(P) = c$. Então, a curva L não tem pontos comuns com o conjunto $\{M \mid f(M) > c\}$, logo está totalmente contida no conjunto $\{M \mid f(M) \leq c\}$. Portanto, L não pode interceptar a curva de nível $L_c = \{M \mid f(M) = c\}$, o que significa que L tem que ser tangente a L_c em P .

Observe que o Princípio de Tangência trata de um problema de otimização condicionada, pois se procuram os extremos de uma função f não sobre seu domínio completo, mas sobre uma curva que é um subconjunto próprio desse domínio. A proposição estabelece que esses extremos condicionados, se existirem, são pontos de tangência da curva L com alguma curva de nível de $f(M)$.

Para ilustrar o conceito de curvas de nível de uma função dependente de um ponto do plano será apresentado alguns exemplos, também tomados de Andreescu.

Exemplo 3.5.2. *Sejam O um ponto fixo do plano e $f(M) = OM$, isto é, a distância de O a M . Então, para qualquer $x > 0$ a curva de nível L_x é a circunferência de centro O e raio r (veja figura 26).*

Figura 26 – Curvas de nível: exemplo 3.5.2

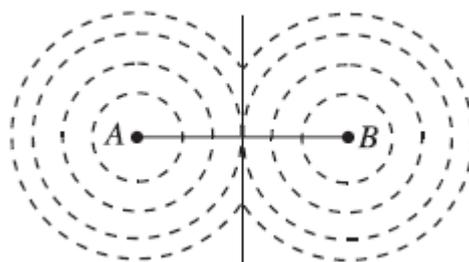


Fonte: Autor

Exemplo 3.5.3. *Sejam A e B pontos fixos no plano. Descreva as curvas de nível da função $f(M) = \min\{MA, MB\}$*

Solução: Seja $AB = 2d$. Considere os semiplanos determinados pela mediatriz do segmento AB . Tem-se que $f(M) = MA$ se M está no semiplano que contém a A , e $f(M) = MB$ se M está no semiplano que contém a B . Assim, a curva de nível $f(M)$ correspondente a $r > 0$ tal que $r \leq d$ é a união das duas circunferências centradas em A e B e raio r . Se $r > d$, a curva de nível é a união dos dois arcos, um em cada semiplano.

Figura 27 – Curvas de nível: exemplo 3.5.3



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

A seguir será mostrado outro problema de extremos geométricos resolvido pelo Princípio da Tangência.

Exemplo 3.5.4. Achar os pontos M na circunferência circunscrita a um triângulo ABC tais que a soma $f(M) = (\overline{MA})^2 + (\overline{MB})^2 + (\overline{MC})^2$ seja: (a) mínima; (b) máxima.

Solução: Para aplicar o Princípio da Tangência deve-se determinar quais as curvas de nível da função $f(M) = (\overline{MA})^2 + (\overline{MB})^2 + (\overline{MC})^2$. Para isso, será feita a dedução da denominada Fórmula de Leibniz para triângulos. Será utilizado vetores.

Seja ABC um triângulo qualquer e M um ponto arbitrário do plano. Lembre-se da Geometria, que seu centroide define-se como o ponto G do plano tal que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$. Prova-se que o centróide é único.

Pela definição de soma de vetores:

$$\vec{MA} = \vec{MG} + \vec{GA} \quad (3.2)$$

$$\vec{MB} = \vec{MG} + \vec{GB} \quad (3.3)$$

$$\vec{MC} = \vec{MG} + \vec{GC} \quad (3.4)$$

Elevando ao quadrado cada uma das igualdades acima:

$$(\vec{MA})^2 = (\vec{MG})^2 + 2 \cdot \vec{MG} \cdot \vec{GA} + (\vec{GA})^2$$

$$(\vec{MB})^2 = (\vec{MG})^2 + 2 \cdot \vec{MG} \cdot \vec{GB} + (\vec{GB})^2$$

$$(\vec{MC})^2 = (\vec{MG})^2 + 2 \cdot \vec{MG} \cdot \vec{GC} + (\vec{GC})^2$$

Somando lado a lado as três igualdades acima, resulta:

$$\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = 3 \cdot \vec{MG}^2 + 2 \cdot (\vec{MG} + \vec{GA} + \vec{MG} + \vec{GB} + \vec{MG} + \vec{GC}) + \vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2$$

$$\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = 3 \cdot \vec{MG}^2 + 2 \cdot \vec{MG} (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) + (\vec{GA})^2 + (\vec{GB})^2 + (\vec{GC})^2$$

Como $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$, tem-se que:

$$\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = 3 \cdot \vec{MG}^2 + (\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2) \quad (3.5)$$

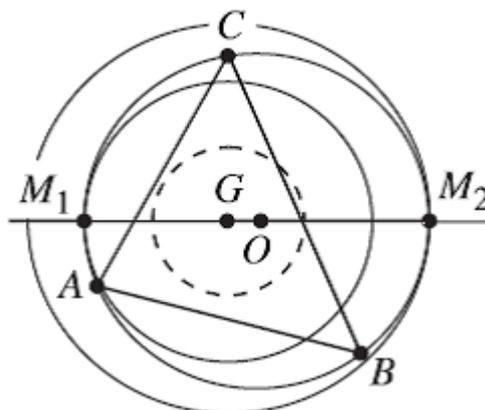
A igualdade (3.5) é chamada de Fórmula de Leibniz para o triângulo. Como $3 \cdot \vec{MG}^2 \geq 0$, dela se infere a proposição seguinte:

Proposição 3.5.2. *Sejam ABC um triângulo qualquer, G seu centróide e M um ponto arbitrário do plano. Então, $\vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 \geq (\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2)$. A igualdade ocorre se, e somente se $M = G$.*

Isso dar condições de ver quais as curvas de nível de f . Basta fixar $\lambda \in \gamma$ tal que $\lambda > (\vec{GA}^2 + \vec{GB}^2 + \vec{GC}^2)$, conforme a proposição anterior, e examinar a equação $f(M) = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 = \lambda$.

Da fórmula de Leibniz tem-se $3MG^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$, logo $3MG^2 = \lambda - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$. Como $GA^2 + GB^2 + GC^2$ é constante, digamos que igual a k , resulta $3MG^2 = \lambda - k$. Pela proposição (3.5.1), é $\lambda > k$, logo MG é constante, digamos $MG = \rho > 0$. Ser MG constante significa que o lugar geométrico dos pontos M é uma circunferência de centro no centróide G do triângulo. Então, as curvas de nível L_λ de f são circunferências com centro no centróide G do triângulo ABC . Seja O o circuncentro do triângulo ABC . Se ABC não é equilátero, então $O \neq G$ e a reta OG (chamada reta de Euler) está bem definida intercepta à circunferência circunscrita ao triângulo ABC em dois pontos, M_1 e M_2 . Esses pontos M_1 e M_2 são pontos de tangência de uma curva de nível de $f(M)$ e a circunferência circunscrita ao triângulo ABC . Veja a figura 28, onde se assume que G está entre O e M_1 .

Figura 28 – Triângulo inscrito e seu centróide



Fonte: Autor

Se o triângulo ABC for equilátero, então $G = O$ e a circunferência circunscrita é uma curva de nível de $f(M)$, isto é, $f(M)$ é constante sobre a circunferência circunscrita. O Princípio da Tangência garante que $f(M)$ tem um mínimo em $M = M_1$ e um máximo em $M = M_2$.

3.6 MÉTODO DE CÁLCULO DE EXTREMOS EMPREGANDO O CÁLCULO DIFERENCIAL

Muitos problemas de geometria sobre máximos e mínimos podem ser resumidos a encontrar os máximos ou os mínimos de certas funções de uma ou várias variáveis. Um exemplo bem conhecido é o problema de inscrever um triângulo da área máxima em um círculo. Em geral, a função obtida ao modelar o problema é complicada e difícil de investigar. Por vezes, no entanto, se consegue reduzir o problema para encontrar os máximos ou mínimos de uma função que depende de uma variável.

Embora as definições e teoremas do cálculo diferencial e integral não sejam abordadas no ensino médio, será destinada uma seção para abordar essa técnica de resolução de problemas geométricos extremos a fim de enriquecer ainda mais este trabalho. Nessa seção, será abordado a resolução de problemas de máximos e mínimos a partir de funções reais cujas soluções podem ser reduzidas para a investigação de funções relativamente simples de uma variável.

Antes de prosseguir com os exemplos, será enunciado (sem a necessidade de demonstração) o teorema do valor intermediário, de fundamental importância no estudo das funções de uma variável e que é frequentemente utilizado no cálculo de extremos geométricos. Outros teoremas (como o de Weierstrass, Fermat) já foram enunciados no capítulo 1.

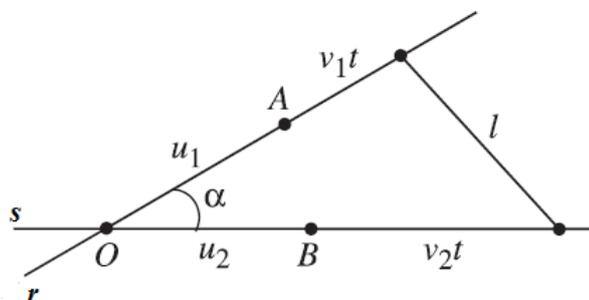
Teorema 3.6.1 (Teorema do Valor Intermediário). *Se $f(t)$ é contínua no intervalo fechado finito $I = [a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos um $t \in [a, b]$ de tal modo que $f(t) = 0$.*

A seguir, será apresentado alguns exemplos de resolução de problemas de extremos geométricos empregando o cálculo diferencial. Começa com um exemplo em que se usa uma função quadrática.

Exemplo 3.6.1. *Dois navios decidem viajar juntos com as direções dadas e velocidades constantes. Às 9h a distância entre eles é de 20 quilômetros, às 9h35min a distância é de 15 quilômetros e às 9h55min a distância é de 13 quilômetros. Encontre o momento em que a distância entre os navios é mínima.*

Solução: Considere que um dos navios viaja ao longo de uma reta r , enquanto o segundo se desloca ao longo de uma reta s . Suponha agora que r e s se cruzam em algum ponto O , conforme a figura abaixo. Denote por α o ângulo entre os dois sentidos de movimento e por A e B as posições dos navios às 9h. Seja $u_1 = OA$ e $u_2 = OB$ e considere v_1 e v_2 as velocidades dos dois navios.

Figura 29 – Representação dos navios e suas trajetórias



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

Usando a lei dos cossenos resulta:

$$l^2 = (u_1 + v_1 t)^2 + (u_2 + v_2 t)^2 - 2(u_1 + v_1 t)(u_2 + v_2 t) \cos \alpha$$

Assim, a expressão acima é uma função quadrática $l(t)$ que pode ser escrita da seguinte forma:

$$l^2 = at^2 + 2bt + c$$

para algum valor real de a, b, c . Suponha agora que a unidade de tempo é de 5 minutos.

Dessa forma, tem-se as seguintes equações:

às 9h tem-se $t = 0$ e $l = 20$. Assim, $20^2 = a.(0)^2 + 2b.(0) + c \rightarrow 400 = c$,

às 9h35min tem-se $t = 7$ e $l = 15$. Assim, $15^2 = a.7^2 + 2b.7 + c \rightarrow 225 = 49a + 14b + c$.

às 9h55min tem-se $t = 11$ e $l = 13$. Assim, $13^2 = a.11^2 + 2b.11 + c \rightarrow 169 = 121a + 22b + c$.

Das três equações acima, encontra-se o seguinte sistema:

$$400 = c \quad (3.6)$$

$$225 = 49a + 14b + c \quad (3.7)$$

$$169 = 121a + 22b + c \quad (3.8)$$

Substituindo (3.6), em (3.7) e (3.8) resulta:

$$225 = 49a + 14b + 400$$

$$225 - 400 = 49a + 14b$$

$$49a + 14b = -175$$

E ainda,

$$169 = 121a + 22b + 400$$

$$169 - 400 = 121a + 22b$$

$$121a + 22b = -231$$

Então,

$$49a + 14b = -175$$

$$121a + 22b = -231$$

Resolvendo o sistema encontra-se $a = 1$ e $b = -16$

Logo, a solução única do sistema é $a = 1$, $b = -16$ e $c = 400$. Daí, tem que:

$$l^2 = at^2 + 2bt + c$$

$$l^2 = t^2 - 32t + 400$$

E ainda,

$$l^2 = t^2 - 32t + 256 + 144$$

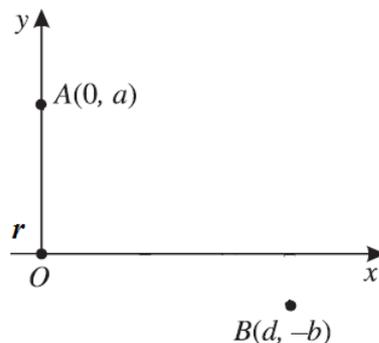
$$l^2 = (t - 16)^2 + 144$$

Como $l \geq 12$, então quando $l = 12$ resulta $t = 16$. Logo, $16.5 = 80$ minutos. Portanto, a distância mínima será depois de 80 minutos, ou seja, às 10h20min.

Exemplo 3.6.2. Dada uma reta r no plano e dois pontos A e B em diferentes lados da reta. Uma partícula move-se com velocidade constante v_1 no semi-plano contendo A e com velocidade constante v_2 no semi-plano contendo B . Encontre o caminho de A a B , que é atravessado em um tempo mínimo pela partícula.

Solução: Considere o plano cartesiano XOY onde o eixo OY coincida com a semirreta OA e seja perpendicular a r . Assim, teremos que $A = (0, a)$ e $B = (d, -b)$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $a > 0$, $b > 0$ e $d > 0$, daí tem-se um plano conforme a figura 30:

Figura 30 – Representação do exemplo 3.6.2 no plano cartesiano



Fonte: Autor

Agora, dado um ponto X em r , de coordenadas $X = (x, 0)$. Usando a fórmula da distância entre dois pontos, tem que:

$$AX = \sqrt{x^2 + a^2}$$

e

$$BX = \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

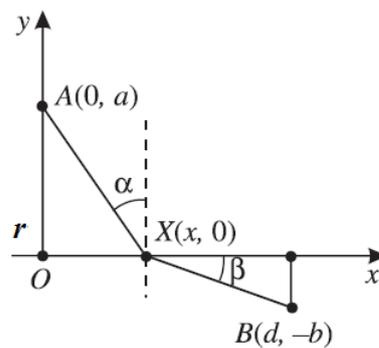
Como o tempo é calculado a partir da razão entre espaço e velocidade, pode-se concluir que o tempo t que a partícula necessita para ir de A até B é definida por:

$$t(x) = \frac{AX}{v_1} + \frac{BX}{v_2}$$

Substituindo os valores de AX e BX , tem-se:

$$t(x) = \frac{1}{v_1} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{v_2} \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

Figura 31 – Resolução do problema do exemplo 3.6.2



Fonte: (ANDREESCU T.; MUSHKAROV, 2006)

Usando as definições de cálculo e derivando ambos os membros da equação acima em função de x , e levando em consideração o estudo da função $t(x)$ para $0 \leq x \leq d$ (para x fora deste intervalo $t(x)$ não pode ter um mínimo) pode-se concluir que:

$$t'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d - x}{v_2 \sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

Tem ainda que:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{a^2}{x^2}}}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{x^2}}}$$

É fácil observar que a função $\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ é estritamente crescente no intervalo $[0, d]$. Da mesma forma, $-\frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$ é estritamente crescente no mesmo intervalo.

Dessa forma, $t'(x)$ também é estritamente crescente no intervalo $[0, d]$. Uma vez que $t'(0) < 0$ e $t'(d) > 0$, o teorema do valor intermediário mostra que existe um (único) $x_0 \in (0, d)$ com $t'(x_0) = 0$. É agora claro que $t'(x) < 0$ para $x \in [0, x_0)$ e $t'(x) > 0$ para $x \in (x_0, d]$, pelo teorema da monotonicidade, $t'(x)$ é estritamente decrescente no intervalo $[0, x_0]$ e estritamente crescente em $[x_0, d]$. Assim, $t'(x)$ tem um valor mínimo em x_0 . Observe que para o ponto $X_0 = (x_0, 0)$ a condição $t'(x_0) = 0$ pode ser escrito como:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{v_1} = \frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2 + x_0^2}} = \frac{d-x_0}{v_2\sqrt{b^2 + (d-x_0)^2}} = \frac{\text{sen}\beta}{v_2}$$

onde α é o ângulo entre AX e OY , enquanto β é o ângulo entre BX e OX .

Portanto, não existe um único ponto x_0 em r tal que o caminho AXB é percorrido durante um tempo mínimo de partícula, e este ponto é caracterizado pela equação:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{v_1} = \frac{\text{sen}\beta}{v_2}$$

A última igualdade é a chamada lei de Snell-Fermat para a difração da luz, cuja definição pode ser enunciada como segue.

Definição 3.6.1. *A trajetória percorrida pela luz ao se propagar de um ponto a outro é tal que o tempo gasto em percorrê-la é um mínimo.*

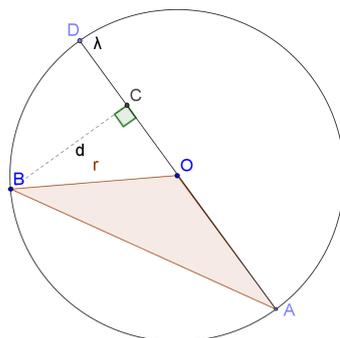
3.7 OUTROS PROBLEMAS DE MÍNIMOS E MÁXIMOS NA GEOMETRIA EUCLIDIANA

Exercício 3.7.1. *Dada uma circunferência de centro O , encontrar o triângulo com um vértice em O e os outros dois vértices na circunferência, tal que sua área seja máxima.*

Solução: Sejam O , A e B os vértices do triângulo dado inscrito em uma circunferência λ de centro O e raio r . Logo, $OA = OB = r$.

Como o triângulo OAB tem um de seus vértices no centro da circunferência, então dois de seus lados é igual ao raio r . Sem perda de generalidade, fixe um desses

Figura 32 – Triângulo inscrito em uma circunferência



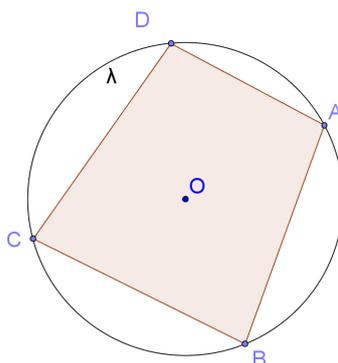
Fonte: Autor

lados como sendo a base do triângulo. Seja OA a base fixada e seja B o vértice variável. Como se deseja o triângulo de maior área, basta encontrar o triângulo de maior altura, já que a base é a mesma. Seja AD o diâmetro de λ . É fácil notar que a maior altura possível é exatamente o raio r da circunferência. Dessa forma, o triângulo de maior área é o triângulo retângulo OAB , onde o ângulo reto é exatamente o ângulo central da circunferência.

Exercício 3.7.2. *Dada uma circunferência de centro O , encontrar o quadrilátero inscrito na circunferência, tal que sua área seja máxima.*

Solução: Sejam A, B, C e D os vértices do quadrilátero dado inscrito em uma circunferência λ de centro O e raio r .

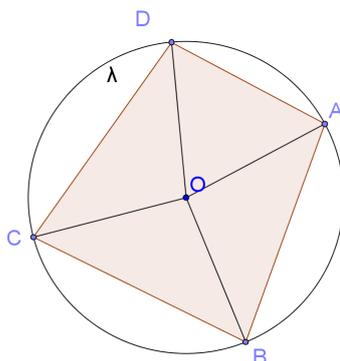
Figura 33 – Quadrilátero inscrito em uma circunferência



Fonte: Autor

Se dividir o quadrilátero em triângulos com vértices no centro de λ , irá resultar quatro triângulos conforme a figura 34.

Figura 34 – Quadrilátero inscrito dividido em quatro triângulos

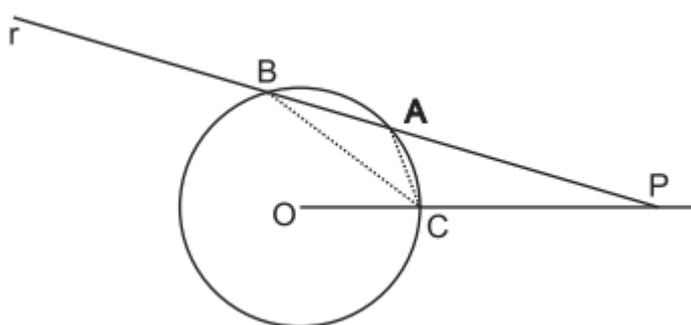


Fonte: Autor

O problema se resume então em achar triângulos cujas áreas são máximas. Pelo exercício 3.7.1, concluí-se que os triângulos com área máxima são os triângulos retângulos. Logo, o quadrilátero inscrito na circunferência com maior área é o quadrado.

Exercício 3.7.3. XIII Olimpíada Regional de Matemática de Santa Catarina – 2010) Na figura 35 o raio da circunferência é igual a 6 e a distância PC é igual a 10. Por P traça-se uma reta r que intercepta a circunferência em dois pontos A e B . Variando a inclinação da reta r produzimos outros pontos A e B , e conseqüentemente temos novos triângulos ABC . Dentre todos esses triângulos, um deles possui a maior área. Calcular essa área.

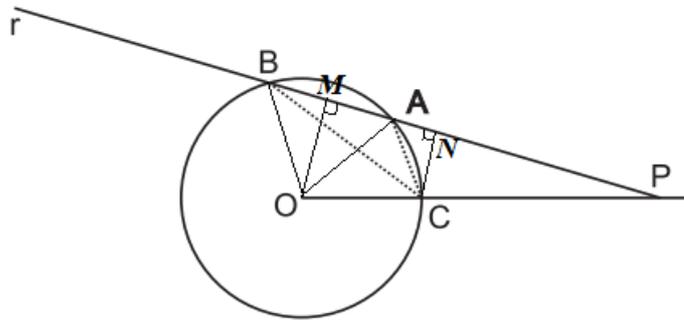
Figura 35 – Enunciado do exercício 3.7.3



Fonte:(UFSC, 2010)

Solução: Sejam OM e CN as distâncias dos pontos O e C a reta r respectivamente. Pelo caso AAA, os triângulos OMP e CNP são semelhantes (possuem um ângulo reto e o ângulo comum \hat{P}).

Figura 36 – Solução do exercício 3.7.3



Fonte: Autor

Dessa forma, tem-se:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PO}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} \quad (3.9)$$

Por outro lado, consideremos os triângulos OAB e ABC . Logo, pelo cálculo da área:

$$S[ABC] = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{CN}}{2}$$

$$S[OAB] = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OM}}{2}$$

Dividindo uma equação pela outra resulta:

$$\frac{S[ABC]}{S[OAB]} = \frac{\frac{\overline{AM} \cdot \overline{CN}}{2}}{\frac{\overline{AB} \cdot \overline{OM}}{2}}$$

$$\frac{S[ABC]}{S[OAB]} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{CN}}{\overline{AB} \cdot \overline{OM}}$$

$$\frac{S[ABC]}{S[OAB]} = \frac{\overline{CN}}{\overline{OM}}$$

De (3.9), segue que:

$$\frac{S[ABC]}{S[OAB]} = \frac{5}{8}$$

Daí, concluí-se que a área do triângulo ABC será máxima quando a área do triângulo OAB também for máxima. Pelo exercício 3.7.1, segue que isso acontece

quando o ângulo central for reto. Portanto, a área do triângulo ABC será máxima quando o triângulo OAB for reto em O .

Para o cálculo de sua área, segue que como $OA = OB = r$, então o triângulo OAB é isósceles. Por definição, a altura coincide com a mediana, assim o ponto M é o ponto médio do lado AB . Temos ainda que se o triângulo OAB é isósceles, então $\widehat{OAB} = \widehat{ABO} = 45$, pois o triângulo de maior área possui ângulo \hat{O} reto. Como $\widehat{OAB} = 45$ e $\widehat{AMO} = 90$, pois OM é a altura do triângulo, concluímos que $\widehat{MOA} = 45$. Logo, o triângulo OAM também é isósceles. Assim, $\overline{OM} = \overline{MA}$. Usando o teorema de Pitágoras no triângulo OAM :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{AM}^2$$

Daí segue:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OM}^2$$

$$\overline{OA}^2 = 2\overline{OM}^2$$

$$\overline{OA} = \sqrt{2\overline{OM}^2}$$

$$\overline{OA} = \overline{OM}\sqrt{2}$$

$$\overline{OM} = \frac{\overline{OA}\sqrt{2}}{2}$$

Como $AO = r = 6$, então:

$$\overline{OM} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (3.10)$$

De (3.9), tem-se que:

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{OM}} = \frac{5}{8}$$

$$\overline{CN} = \frac{5\overline{OM}}{8} \quad (3.11)$$

Substituindo (3.10) em (3.11), resulta:

$$\overline{CN} = \frac{5 \cdot 3\sqrt{2}}{8} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

Temos ainda que $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$ e ainda que $\overline{AM} = \overline{MB} = \overline{OM}$, pois o triângulo OAM é isósceles. Daí, segue que:

$$\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$$

$$\overline{AB} = \overline{OM} + \overline{OM}$$

$$\overline{AB} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = 6\sqrt{2}$$

Assim, a área do triângulo ABC é:

$$S[ABC] = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CN}}{2}$$

$$S[ABC] = \frac{6\sqrt{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{8}}{2}$$

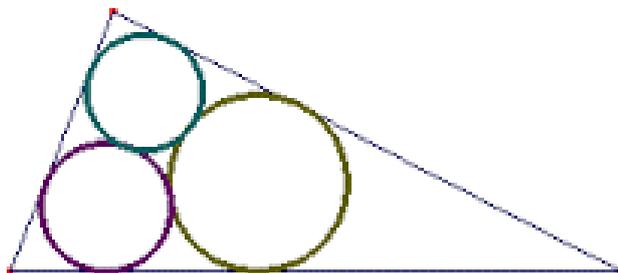
$$S[ABC] = \frac{6\sqrt{2} \cdot 15\sqrt{2}}{16}$$

$$S[ABC] = \frac{45}{4}$$

O que será a área máxima do triângulo ABC .

Exercício 3.7.4. *No início do século XIX o geômetra italiano Malfatti formulou o seguinte problema: de um dado triângulo, inscrever três círculos de tal forma que a soma de suas áreas seja máxima. Nas pesquisas posteriores, por circunferência de Malfatti se entendia três circunferências que se tocam duas a duas, e cada uma das quais é também tangente a dois lados do triângulo dado. Demonstrar que para um triângulo equilátero as circunferências de Malfatti não dão a solução do problema inicial. (Somente em meados do século XX foi estabelecido que a circunferência de Malfatti não dão a solução do problema inicial qualquer que seja o triângulo).*

Figura 37 – Circunferência de Malfatti

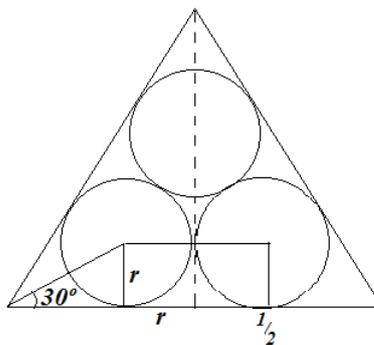


Fonte: Autor

Solução: Deseja-se mostrar que em um dado triângulo equilátero, a soma das áreas das circunferências de Malfatti não são máximas, ou seja, existem outras circunferências cujas soma das suas áreas são maiores que as de Malfatti.

A princípio, vamos considerar três circunferências com as propriedades descritas acima, ou seja, as circunferências de Malfatti inscritas em um triângulo equilátero. Sem perda de generalidade, considere um triângulo equilátero de lado igual a 1. Dessa forma, tem-se:

Figura 38 – As circunferências de Malfatti em um triângulo equilátero



Fonte: Autor

Nesse caso, como o triângulo é equilátero, facilmente se conclui que as circunferências inscritas são congruentes, pois os pontos notáveis são coincidentes. Assim, usando as relações trigonométricas no triângulo retângulo, resulta:

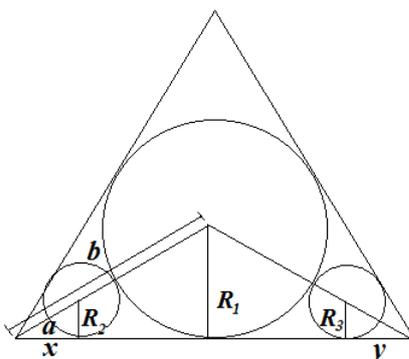
$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{r}{\frac{1}{2} - r} \longrightarrow r = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

Logo, a soma das áreas das três circunferências será:

$$A = 3\pi \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{4} \right)^2 \rightarrow A = \frac{3\pi(2 - \sqrt{3})}{4} \approx 0,1005\pi \quad (3.12)$$

Considere agora outras três circunferências inscritas num triângulo equilátero, onde essas circunferências não são de Malfatti e será mostrado que sua área é maior que a encontrada acima.

Figura 39 – Três circunferências inscritas em um triângulo equilátero



Fonte: Autor

Como o triângulo é equilátero, os pontos notáveis são coincidentes. Seja R_1, R_2, R_3 os raios das circunferências, conforme a figura 39. Assim, tem-se que:

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{R_1}{\frac{1}{2}} \rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{R_2}{x} \rightarrow R_2 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}30^\circ = \frac{R_3}{y} \rightarrow R_3 = \frac{y\sqrt{3}}{2}$$

Usando o teorema de Pitágoras e chamando de a a hipotenusa do triângulo retângulo, R_2 um dos catetos e x o outro cateto, logo:

$$\begin{aligned} a^2 &= R_2^2 + x^2 \\ a^2 &= \left(\frac{x\sqrt{3}}{2} \right)^2 + x^2 \\ a^2 &= \frac{x^2}{3} + x^2 \end{aligned}$$

$$a^2 = \frac{4x^2}{3}$$

$$a = \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

Usando o teorema de Pitágoras e chamando de b a hipotenusa do triângulo retângulo, R_1 um dos catetos e $\frac{1}{2}$ o outro cateto, resulta:

$$b^2 = R_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$b^2 = \frac{1}{3}$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $b - a = R_1 + R_2$, então:

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2x}{\sqrt{3}}$$

Fazendo as substituições em R_1 e R_2 , tem-se:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \frac{1}{6}$$

Logo,

$$R_2 = \frac{x\sqrt{3}}{3} \longrightarrow R_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

De forma análoga, podemos concluir que $R_3 = R_2$.

Por fim, a soma das áreas das três circunferências pode ser definida como:

$$S = \pi R_1^2 + \pi R_2^2 + \pi R_3^2$$

$$S = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^2 + \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)^2$$

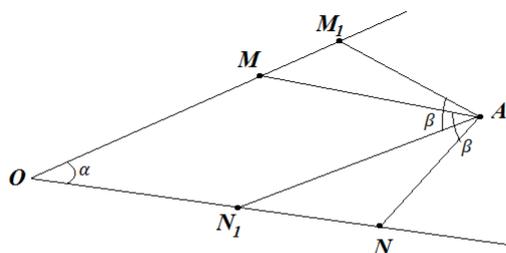
$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{108} + \frac{\pi}{108} \approx 0,1018\pi \quad (3.13)$$

Comparando (3.12) e (3.13) concluí-se que a área das circunferências de Malfatti é menor que a outra. Logo, as circunferências de Malfatti não dão a solução do problema inicial.

Exercício 3.7.5. *O vértice do ângulo α se encontra no ponto O , A é um ponto fixo dentro do ângulo. Tomam-se dois pontos M e N nos lados do ângulo tal que $\widehat{MAN} = \beta$, ($\alpha + \beta < \pi$). Mostre que se $|AM| = |BM|$, então a área do quadrilátero $OMAN$ será máxima (entre todos os quadriláteros possíveis que se obtém ao variar a posição dos pontos M e N).*

Solução: Considere o quadrilátero $OMAN$ formados pelos pontos conforme o enunciado do problema e seja sua área igual a S . Deseja-se mostrar que, de todos os quadriláteros possíveis, o de maior área ocorre quando $|AM| = |BM|$. Suponha então que M_1 e N_1 são outros pontos nos lados do ângulo, conforme figura 40.

Figura 40 – Enunciado do problema 3.7.5



Fonte: Autor

Tem-se que $\widehat{M_1AN_1} = \beta = \widehat{MAN}$. Como $\widehat{M_1AN_1} = \widehat{M_1AM} + \widehat{MAN_1}$ e ainda $\widehat{MAN} = \widehat{MAN_1} + \widehat{N_1AN}$. Dessa forma, têm-se que:

$$\begin{aligned} \longrightarrow \widehat{M_1AM} + \widehat{MAN_1} &= \widehat{MAN_1} + \widehat{N_1AN} \\ \longrightarrow \widehat{MAM_1} &= \widehat{N_1AN} \end{aligned}$$

Por outro lado, pela soma dos ângulos internos do quadrilátero, AM_1ON_1 resulta:

$$\widehat{AM_1M} = 360 - \alpha - \beta - \widehat{ON_1A}$$

$$\widehat{AM_1M} = 360 - (\alpha + \beta) - \widehat{ON_1A}$$

por hipótese, $(\alpha + \beta < \pi)$, logo:

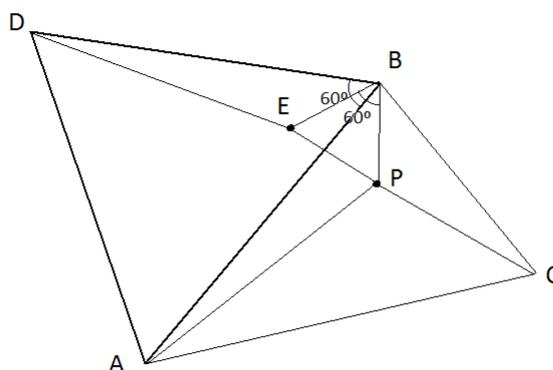
$$\widehat{AM_1M} > 180 - \widehat{ON_1A} = \widehat{AN_1N}$$

(usando o teorema do ângulo externo).

Como ao maior ângulo de um triângulo opõe-se o maior lado, concluí-se que $|M_1A| < |N_1A|$ e por conseguinte, $S(M_1AM) < S(N_1AN)$; dessa forma $S(OM_1AN_1) < S(OMAN)$

Exercício 3.7.6. *Seja ABC um triângulo onde todos os seus ângulos são menores que 120° e seja P um ponto qualquer no plano. Demonstrar que a soma das distâncias de P até os vértices do triângulo tem o valor mínimo quando P é um ponto interior, a partir da qual cada um dos lados do triângulo são vistos sob o ângulo de 120° (Ponto de Torricelli)*

Figura 41 – Enunciado do problema 3.7.6



Fonte: Autor

Solução: Seja P um ponto qualquer interior ao triângulo ABC . Tome E um ponto exterior ao triângulo de tal forma que o triângulo BPE seja equilátero. Tome ainda um ponto D de tal forma que o triângulo ABD também seja equilátero, conforme a figura 41.

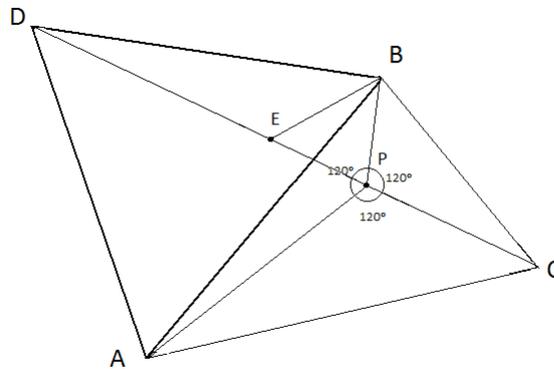
Pelo caso LAL, os triângulo BDE e BPA são congruentes. Logo, $\overline{DE} = \overline{AP}$ e ainda $\overline{EP} = \overline{BP}$. Logo, $\overline{DE} + \overline{EP} + \overline{PC} = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{PC}$

Essa soma é mínima quando os ponto D, E, P, C são colineares (a menor distância entre dois pontos é uma reta).

Sabe-se ainda que o triângulo EBP é equilátero, então seus ângulos internos medem 60° . Logo, o suplemento deles medem 120° . Como os triângulos BDE e BPA

são congruentes, temos que $\widehat{DEB} \equiv \widehat{APB}$. Daí, resulta o valor da medida de todos os seus ângulos, conforme a figura 42.

Figura 42 – Solução do problema 3.7.6



Fonte: Autor

Onde todos os lados do triângulo são vistos sob o ângulo de 120°.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Fruto da experiência docente, de troca de ideias com colegas e da utilização de diversos livros de texto escolares, concluí-se empiricamente que os problemas de máximos e mínimos tem sido tradicionalmente pouco empregados na prática docente no ensino médio. Os alunos não têm noções sobre esta classe de problemas, nem imaginam algumas das suas possibilidades de aplicação nas mais diversas áreas do conhecimento, pois tem sido apresentado de forma superficial e limitado. Segundo os PCN's, "O conhecimento matemático [...] é apresentado de forma descontextualizada, atemporal e geral, porque é preocupação do matemático comunicar resultados e não o processo pelo qual os produziu". (BRASIL, 1997), p. 26.

Na educação básica, o uso dos problemas extremos tem se restringido apenas a aplicações das funções quadráticas, o que gera uma visão muito estreita sobre o assunto. Nos tipos de problemas que usualmente se apresentam parece que a maior, e tal vez única dificuldade, é transformar problemas práticos em modelos matemáticos e organizar estratégias de resolução. Essa seleção do conteúdo e a metodologia de ensino associada, negligenciam possibilidades de desenvolver o raciocínio lógico e matemático dos alunos. Essas hipóteses poderiam ser objeto de um trabalho de pesquisa que as fundamente com rigor. Esse trabalho é, de fato, uma proposta para ampliar o horizonte do ensino da Matemática na escola, dando espaço ao estudo de problemas sobre extremos geométricos.

A dissertação, no primeiro capítulo, conceitua as ideias básicas para bem compreender o que é um problema geral de otimização, e em particular, um problema geométrico de otimização. Inclui ainda um resumo de resultados de Análise para resolver problemas de otimização clássica. O segundo capítulo apresenta um resumo histórico que mostra o desenvolvimento e evolução da pesquisa matemática sobre resolução de problemas de máximos e mínimos. O terceiro capítulo corresponde ao objetivo fundamental do trabalho. Ele apresenta algumas considerações sobre a análise da existência de soluções nos problemas de otimização de índole geométrica e a taxonomia devida a Andreescu, ilustrada com exemplos resolvidos. A ênfase maior foi dada aos métodos baseados em transformações geométricas e desigualdades algébricas, que podem ser mais acessíveis à maioria dos docentes do ensino médio. Pode-se observar que as transformações geométricas favorecem o estudo dos problemas de forma diferenciada e possibilita a criação de novas técnicas através de rotação, translação e homotetia.

O grande intuito foi despertar um interesse maior aos docentes na área da otimização e criar subsídios para preparação dos alunos para as olimpíadas de matemática

das escolas públicas. Espera-se que este trabalho fomente outros profissionais de ensino a buscar o fascínio dos alunos para o estudo dos problemas extremais, não só de natureza geométrica.

REFERÊNCIAS

- ANDREESCU T.; MUSHKAROV, O. S. L. *Geometric problems on maxima and minima*. New YorkAA: [s.n.], 2006.
- BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL, M. d. E. e. d. D. S. d. E. F. *Parâmetros curriculares nacionais. Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.
- CASTANEDA, A. M. M. Introdução à programação linear. apostila para a disciplina de programação linear. departamento de matemática. Boa vista, RR, 2013.
- COSTA BELMIRO E RODRIGUES, E. Transformações geométricas nos programas de matemática do ensino básico e secundário. *Novo Espaço - Matemática - 8.º Ano.*, 2012. Disponível em: <www.mat.uc.pt/~mat0829/Transformacoesgeometricas-2.pdf>.
- FIGUEIREDO, D. G. Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana. Campinas, 1989. Disponível em: <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n09_n10/n09_n10_Artigos02.pdf>.
- FILHO, J. V. *Técnicas de otimização aplicadas a sistemas agroindustriais*. São Paulo: Atlas S. A., 2001.
- GALÉEV E. TIJOMÍROV, V. *Breve curso de la teoría de problemas extremales*. Moscou: MIR, 1991.
- GALLARDO, L. M. H. Determinación de máximos y mínimos sin necesidad del cálculo diferencial. Rio de Janeiro UNAM. México, 2013. Disponível em: <<http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/137.pdf>>
- IZMAILOV ALEXEY. SOLODOD, M. *Otimização – volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 1*. Oxford: [s.n.], 1990.
- MERCURI FRANCESCO; PEDROSA, R. L. *Uma introdução às desigualdade isoperimétricas*. Rio de Janeiro: [s.n.], 1993. Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/19CBM/19_CBM_93_04.pdf>.
- PASQUALI, K. C. Máximos e mínimos em geometria euclidiana plana. Florianópolis, Santa Catarina, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96564/Kely_Cristina_Pasquali.pdf?sequence=1>.
- PINHO, J. L. R. Resolvendo problemas de extremos em geometria usando métodos não analíticos: o muito que se pode fazer no ensino médio com um "pouco" de geometria. Brasília, 2013. Disponível em: <<http://simposio.profmat-sbm.org.br/docs/Palestra-Professor-Pinho.pdf>>.
- SHARIGUIN, I. F. *Problemas de geometría planimetría*. Moscou: MIR, 1989.

UFSC, U. F. d. S. C. Olimpíada regional de matemática. Florianópolis - SC, 2010. Disponível em: <www.orm.mtm.ufsc.br>.

WIKIPÉDIA. *Transformações geométricas*. Wikipédia, a enciclopédia livre, 2014. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Homotetia>>. Acesso em: 20 out. 2014.