UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ORNÉLIO HINTERHOLZ JUNIOR

O USO DO POV-RAY NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Boa Vista - RR

2015

ORNÉLIO HINTERHOLZ JUNIOR

O USO DO POV-RAY NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva

Boa Vista - RR

2015

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

H666u Hinterholz Júnior, Ornélio.

O uso do pov-ray no ensino de geometria analítica no ensino médio / Ornélio Hinterholz Júnior – Boa Vista, 2015.

101 f. : il

Orientador: Prof. Dr. Luciano Ferreira da Silva.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 – Geometria analítica. 2 – Teoria da aprendizagem. 3 – Pop-ray. 4 – Educação matemática. I - Título. II – Silva, Luciano Ferreira da (orientador).

CDU – 514.12

ORNÉLIO HINTERHOLZ JUNIOR

O USO DO POV-RAY NO ENSINO DE GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, defendida em 24 de abril de 2015, e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Luciano Ferreira Silva

Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva - UFRR
Orientador

Roberto Cristóvão Mesquita Silva

Prof. Dr. Roberto Cristóvão Mesquita Silva - UFAM

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima - UFRR

"Duvida que a união faz a força? Olhe para o que os pixels são capazes!"

(Anônimo)

RESUMO

Em plena era da informação, na qual os jovens mostram-se aficionados e ansiosos por inovações tecnológicas, não é mais possível praticar em sala de aula, de forma perene, tão somente as metodologias tradicionais de ensino. A presente pesquisa teve por objetivo inovar pedagogicamente ao estabelecer conexões teórico-práticas aplicáveis entre a Computação Gráfica e os conteúdos da Geometria Analítica do Ensino Médio com vistas ao desenvolvimento das competências requeridas aos alunos. Os tipos de metodologias adotadas no trabalho foram: descritiva e exploratória (quanto aos objetivos), qualitativa (quanto à abordagem), e bibliográfica (quanto aos procedimentos). O objetivo foi alcançado por meio de uma profunda revisão de literatura, culminando com a elaboração de mapas conceituais, que correlacionaram conceitos da Geometria Analítica com conceitos da Computação Gráfica. Foram elaboradas também sequências didáticas definidas com base na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e na Teoria dos Níveis de Raciocínio Geométrico de Van Hiele e adaptadas a partir de problemas disponibilizados publicamente pelo Projeto NRICH, da Universidade de Cambridge para que se adequassem à possibilidade de resolução com a utilização de um software do tipo ray-tracing denominado POV-Ray.

Palavras-chave: Educação matemática. Geometria analítica. Teoria da aprendizagem significativa de Ausubel. Teoria dos níveis de raciocínio geométrico de Van Hiele. POV-Ray.

ABSTRACT

In the middle of Information Age, in which young people show up passionate and eager for technological innovations, it is no longer possible to practice in the classroom, in a perennial way, only just the traditional teaching methodologies. This research aimed to innovate pedagogically by establishing theoretical and practical connections between the applicable Computer Graphics and the High School Analytic Geometry content in order to develop the skills required to students. The kinds of methodologies used in this research were: descriptive and exploratory (as for objectives), qualitative (as for approach), and literature review (as for procedures). The aim was achieved through a thorough literature review, culminating in the development of conceptual maps, which correlated concepts of Analytical Geometry with concepts of Computer Graphics. Didactic sequences, also were prepared, defined based on Meaningful Learning Theory of Ausubel and the Theory of Geometric Reasoning Levels of Van Hiele and adapted from problems publicly available by University of Cambridge's NRICH Project. The adaptation was necessary in order to allow the problems resolution with the use of a ray-tracing software called POV-Ray.

Key-words: Mathematics education. Analytic geometry. Meaningful learning theory of Ausubel. Theory of geometric reasoning levels of Van Hiele. POV-Ray.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano [...]. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p. 75)

O papel do professor, então é, o de ensinar aos alunos esses aspectos da Matemática, visto que, no Ensino Superior, o mesmo adquiriu as ferramentas e desenvolvimento do raciocínio próprios da Matemática Abstrata. Entretanto, hoje, conforme Sanada e Wajskop (2010):

> Muitos cursos de formação de professores não preparam seus licenciandos para trabalhar com alunos reais, [...] não favorecem o aprendizado de seus licenciandos acerca do que significa ensinar nos dias de hoje e do que significa lidar com as dificuldades concretas do espaço da sala de aula e com as demais articulações necessárias no âmbito educacional. [...] Deste modo, muitos professores levam para as salas de aula a crença no desenvolvimento natural das habilidades e competências de seus alunos, esquecendo-se que o processo de desenvolvimento e aprendizagem se dá de maneira articulada.

Nesse sentido, o cerne desta pesquisa recai no entendimento de que o maior entrave encontra-se na carência de articulação entre conteúdos e a realidade do aluno.

1.1 MOTIVAÇÃO

O Ensino Médio é a etapa final da Educação Básica Brasileira e tem sido foco de muitas discussões importantes, em particular, na busca de sua identidade, que deve ser construída com base numa concepção curricular cujo princípio é a unidade entre trabalho, ciência, cultura e tecnologia (LOPES, 2011).

Entretanto, o problema que existe com a Educação no Brasil e mais especificamente com o Ensino da Matemática é um fato conhecido. Castro (2007) afirma que “a maior parte dos estudantes brasileiros tem formação inadequada em matemática para as respectivas séries”. De fato, ainda conforme a autora supracitada, a situação do ensino é grave e complexa atingindo todos os níveis, desde o ensino básico até as universidades, já que os resultados de desempenho da educação básica brasileira, medidos por diferentes avaliações nacionais e internacionais, confirmam a baixa qualidade do ensino e as dificuldades constatadas pelas avaliações do ensino superior do país.

Ressalta-se ainda que, conforme Knobel (2013 apud FERREIRA, 2013), o ensino de ciências e matemática não está entre as prioridades do país, que sofre com a falta de recursos e com um sistema de educação formal provocando uma inércia gigante. Nesse caso para o ensino de matemática, a estratégia deve ser mudada para estimular ainda mais os jovens a fazer ciência.

Brasil (2006) afirma que foram eleitas para as áreas de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias três grandes competências como metas a serem perseguidas durante essa etapa da escolaridade básica e complementar do ensino fundamental para todos os brasileiros:

- representação e comunicação: envolvendo leitura, interpretação e produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

- investigação e compreensão: visando o enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

- contextualização das ciências no âmbito sociocultural: na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Nesse sentido, podemos, então, vincular às competências acima descritas à necessidade de desenvolvimento, por parte dos alunos, das seguintes habilidades relacionadas à Matemática, ainda conforme Brasil (2006), tais como: raciocínio algoritmo, raciocínio recursivo, resolução de problemas e suas técnicas, discretização do espaço, e cálculo com aritmética modular. Sendo que tais habilidades devem envolver abordagens combinatórias, algébricas e geométricas.

Existem várias maneiras de desenvolver numa sala de aula de matemática tais competências, habilidades e conhecimentos. Abordagens interdisciplinares estão entre essas possibilidades, embora essas necessitem de “pedagogia apropriada, processo integrador, mudança institucional e relação entre disciplinaridade e interdisciplinaridade” (KLEIN, 2001, p. 110).

Além disso, cabe destacar que as práticas interdisciplinares, aliadas a uma postura crítica e a um questionamento constante do saber, podem trazer possibilidades de um enriquecimento por meio de novos enfoques, ou da combinação de perspectivas diferentes, incentivando a busca de caminhos alternativos que não apenas aqueles dos saberes já adquiridos, instituídos e institucionalizados (PIRES, 2004).

No campo do ensino de matemática, vários autores abordam a necessidade da utilização de práticas pedagógicas interdisciplinares em sala de aula. Citamos como principais referências os trabalhos de Lavaqui e Batista (2013), Tironi e Silva (2013) e

Machado (1993), tais trabalhos serão abordados de forma mais aprofundada durante o decorrer do trabalho, porém o entendimento mútuo dos autores se dá numa única direção, a da necessidade de estabelecimento do uso de novos caminhos e estratégias inovadoras.

Segundo Silva (2011b), em plena era da tecnologia, os jovens apresentam-se ansiosos por inovações e respondem de maneira positiva a tudo que for “moderno”. Na busca por inovar, os professores também tendem a levar o que há de mais moderno e avançado para sala de aula. Mas, não basta apenas ilustrar uma aula com algum elemento da mídia, é necessário saber o que usar, como utilizar, e saber para que está usando. A interdisciplinaridade, quando trabalhada em projetos, também facilita a utilização das mídias, pois, conforme (CORREIA, s.d.):

> A aplicabilidade das TIC[1] favorecerá o investimento no ambiente escolar, possibilitando a construção de projetos educativos que desenvolvam a autonomia dos alunos enquanto sujeitos de sua aprendizagem, bem como, favorecerá a interação entre alunos e professores na operacionalização de uma aula dinâmica e participativa, com o uso da escrita, da oralidade, do som e da imagem estática ou não. Substratos oferecidos pelas mídias que irão enriquecer o trabalho de professores e alunos no chão da escola.

Finalmente, entende-se ser possível uso da Ciência da Computação dentro da sala de aula, mais especificamente da área de Computação Gráfica, esta última por ser uma área muito interdisciplinar, segundo Velho (2005). A Computação Gráfica pode ser usada como aliada ao processo de ensino-aprendizagem inovador tendo um viés forte para o desenvolvimento do Raciocínio Lógico-Matemático e o Raciocínio Computacional, além de possibilitar a realização de práticas pedagógicas interdisciplinares com as devidas justaposições de campos de conhecimento, tais como: Matemática, Computação, Física, Psicologia, Artes plásticas, Inteligência Artificial, Biologia, Comunicação, etc.

Existem várias definições para Computação Gráfica, uma delas, segundo Bhatia (2008, p. 2-3), diz que: “Computação Gráfica é o campo da Computação visual, onde alguém que utilize um computador pode tanto gerar imagens visuais sinteticamente e integrá-las, quanto alterar as informações visuais e espaciais coletadas como amostras do mundo real.”

Destaca-se ainda que toda a Computação Gráfica é baseada em pixels, que são pontos que fazem com que a imagem seja sintetizada visualmente em um monitor, seja essa imagem representativa do espaço 2D ou 3D (BHATIA, 2008). Ainda segundo o autor supracitado, a partir da utilização desses simples pontos, os pixels, variadas aplicações podem surgir, tais como: aplicações médicas; interface gráfica de usuário (GUI); gráficos científicos e para a engenharia; simulação (direção, pilotagem); publica-

[1] TIC - Tecnologia da Informação e Comunicação

ção tipo desktop; apresentações gráficas; multimídia; educação e treinamento; arte no computador; CAD (Computer Aided Design) aplicado à arquitetura, design mecânico, design elétrico; entretenimento no computador (filmes, vídeo games); publicidade; etc.

Dentre todas essas possibilidades oriundas do campo de aplicações da Computação Gráfica, as que mais chamam atenção dos jovens no contexto atual são os games e os filmes. Conforme Moita (2006),

> os games constituem uma das consequências do avanço tecnológico e da convergência do computador para as telecomunicações, transformando-o em poderosa máquina de comunicação e informação. Assim, nas últimas décadas, crianças, em todo o mundo, fascinam-se com games e passam mais horas frente a telas de computador do que a maioria dos seus pais, avós e professores gostariam.

O fascínio dos jovens pelos produtos da Computação Gráfica poderia, talvez, ser usado como um fator motivador para o processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio.

A matemática por trás da Computação Gráfica é bastante diversificada não se limitando a uma área específica. Tem-se dentro da gama de possibilidades de aplicações da Computação Gráfica, a utilização de praticamente todos os conteúdos que fazem parte do currículo mínimo do Ensino Médio, tais como: lógica matemática, geometria plana e espacial, geometria analítica, matrizes, polinômios, sistemas de equações lineares, trigonometria, sistemas de coordenadas e até números complexos.

Assim, diante do contexto apresentado, nos indagamos sobre a possibilidade de que o estudo da Computação Gráfica dentro da sala de aula do Ensino Médio possa ser visto como uma prática pedagógica inovadora interdisciplinar, com vistas ao desenvolvimento de habilidades, competências e conhecimentos relacionados à Matemática e requeridas ao egresso da Educação Básica.

O presente trabalho, portanto, se constitui como uma investigação de conexões teórico-práticas aplicáveis entre a Computação Gráfica e os conteúdos da Geometria Analítica do Ensino Médio.

1.2 JUSTIFICATIVA

Ensinar envolve aspectos distintos, tais como: psicológicos, metodológicos, históricos, conceituais e filosóficos. Esses quando não são interpretados de maneira adequada, acabam interferindo no processo de ensino aprendizagem de forma negativa. Isso reflete a complexidade das propostas pedagógicas de ensino. Assim, para alcançar um bom resultado, se torna necessário desenvolver propostas e recursos contextualizados visando à realidade do meio social onde serão aplicados, dando coesão ao processo de ensino e, dessa forma, tornando possível aos discentes tomarem posse dos conhecimentos produzidos (LACANALLO, 2011).

É amplamente reconhecido que o uso da tecnologia computacional poderia oferecer aos alunos e professores várias formas de representar e explorar problemas matemáticos ou conceitos. Há também evidências de que diferentes ferramentas podem oferecer aos alunos diferentes oportunidades de pensar em problemas, a fim de representar, explorar e resolver esses problemas. Recentemente, diferentes programas de pesquisa têm analisado e documentado o papel desempenhado pelo uso de diversas ferramentas digitais no desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos (HOYLES; LAGRANGE, 2010).

O uso de software dinâmico oferece vantagens para a construção de modelos de situações ou problemas nos quais os componentes dos modelos podem ser deslocados no interior da representação para identificar e explorar relações matemáticas; enquanto o uso de calculadoras oferece vantagens para representar e lidar com problemas algebricamente. Em geral, os resultados da pesquisa indicam que é importante para os professores a incorporação, nos seus cenários de ensino, do uso sistemático de várias ferramentas computacionais para ajudar os alunos a desenvolver a compreensão matemática e resolução de problemas. Para isso, várias propostas curriculares recentes recomendam que os alunos utilizem ferramentas computacionais em suas atividades de aprendizagem.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Estabelecer conexões teórico-práticas aplicáveis entre a Computação Gráfica e os conteúdos da Geometria Analítica do Ensino Médio com vistas ao desenvolvimento das competências requeridas aos alunos.

1.3.2 Objetivos Específicos

a) Identificar na literatura contemporânea quais são as dificuldades recorrentes no processo de ensino-aprendizagem dos conteúdos relativos à Geometria Analítica do Ensino Médio;

b) Identificar na literatura contemporânea procedimentos correlatos de utilização de abordagens interdisciplinares entre áreas da Computação e a Geometria Analítica do Ensino Médio;

c) Identificar na literatura contemporânea a práxis educativa comum atualmente conduzida pelos docentes no ensino da Geometria Analítica do Ensino Médio;

d) Determinar os conteúdos dos Fundamentos da Computação Gráfica que podem ser trabalhados com uso apenas da Matemática Elementar;

e) Correlacionar os conteúdos relativos à Computação Gráfica e os conteúdos propostos no currículo mínimo da Geometria Analítica do Ensino Médio, esses últimos apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+);

f) Elaborar propostas de atividades teórico-práticas vinculadas às correlações estabelecidas anteriormente;

1.4 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Esta dissertação está organizada em mais seis capítulos. Os capítulos 2, 3 e 4 fazem parte da revisão de literatura que embasou a pesquisa. O capítulo 2 aborda, de maneira breve, os conceitos preliminares da Geometria Analítica, servindo como um ponto de partida para o entendimento contextual do propósito do estudo e apresenta, em seguida, a história da Geometria Analítica abordando algumas discussões relativas à área de Educação Matemática que abrangem os tipos de metodologias de ensino e o contexto de utilização das TICs.

O capítulo 3 descreve os principais conceitos relacionados à Computação Gráfica, além de tentar estabelecer resumidamente uma discussão sobre a relação da Computação Gráfica com a Geometria Analítica, e termina apresentando o software POV-Ray, que é componente essencial para a proposição das atividades. Já o capítulo 4 apresenta os trabalhos correlatos que foram encontrados e considerados relevantes para esta pesquisa.

O capítulo 5 explica o traçado metodológico utilizado na pesquisa explicitando os tipos de pesquisa escolhidos e os motivos de cada escolha. O capítulo 6 descreve os principais resultados do estudo proposto. Por fim, o capítulo 7 apresenta as considerações finais, dificuldades encontradas e recomendações de trabalhos futuros que podem ser realizados a partir desse trabalho.

2 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Tendo em vista que para a melhor compreensão da presente pesquisa, com destaque para as atividades propostas no capítulo 6, sejam necessários conhecimentos básicos de Geometria Analítica, neste capítulo serão apresentados alguns conceitos básicos sobre esse assunto. Além disso, serão tratados, de maneira breve, os principais conceitos relacionados à área da Geometria Analítica com o enfoque no aluno do Ensino Médio à luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). E ainda, apresentaremos um breve resumo histórico das origens da Geometria Analítica, a fim de situarmos melhor a pesquisa e compreendermos melhor esta área da matemática, bem como sua importância e relevância para o desenvolvimento da ciência.

2.1 PRELIMINARES DE GEOMETRIA ANALÍTICA

As definições e resultados apresentados a seguir foram baseados nas referências de Caroli, Callioli e Feitosa (1976), Leite (1996), Santos e Ferreira (2009), Bompiani (2005), Gattass (2013) e nos materiais disponibilizados pelo próprio programa PROFMAT por meio de seu portal. O foco da abordagem da sessão recai, então, nos principais conceitos relacionados à área da Geometria Analítica que deveriam ser discutidos com os alunos do Ensino Médio, conforme afirma MEC (2006):

> É desejável, também, que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado pelas suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria a corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física. [...] Uma introdução à geometria vetorial e às transformações geométricas no plano e no espaço – isometria e homotetia – é também mais uma oportunidade de trabalhar conceitos matemáticos sob os pontos de vista algébrico e geométrico.

Vale ressaltar que a abordagem vetorial para o ensino da Geometria Analítica não é comum na Educação Básica brasileira, embora seja considerada em alguns aspectos. Garcia (2012) corrobora com a afirmação de MEC (2006) indicando que:

> O ensino dos vetores, em geral, é desenvolvido nas aulas de Física, especificamente para se tratar de conceitos físicos. Velocidade e aceleração de um objeto e as forças que agem sobre ele são descritas por vetores. No entanto, vetor é um ente matemático, cuja definição envolve

conceitos da matemática: vetor é um representante de uma classe de equivalência de segmentos orientados que têm mesmo comprimento, direção e sentido. Esses segmentos podem ser representados por setas, para indicar que são orientados, mas é preciso ter cuidado para não definir vetor como uma seta.

2.1.1 Pontos e Vetores no Plano e no Espaço

Para fixarmos a definição de vetor, consideremos inicialmente a posição do vértice **p** de uma estrela de 5 pontas, mostrada na Figura 1a, ou de um vértice de um tetraedro, mostrado na Figura 1b. As posições de cada um desses pontos com relação a um Sistema de Eixos Cartesianos **xy** ou **xyz**, respectivamente, podem ser definidas por duas coordenadas, **x** e **y**, ou três, **x**, **y** e **z**, respectivamente. Esses valores representam tanto a posição de **p** quanto a distância, a orientação e o sentido que seriam necessários aplicar para levar um ponto que originalmente estivesse na origem para a posição do ponto **p**. Ou seja, o vetor **p** pode tanto ser entendido como uma posição quanto por um vetor.

Podemos entender *ponto* como sendo uma entidade geométrica e *vetor* como sendo uma entidade algébrica que pode estar representando um ponto ou outra entidade matemática. A representação de um vetor por suas coordenadas cartesianas é feita da forma ilustrada na Figura 1b, ou seja, as coordenadas são escritas numa coluna limitada com parênteses.

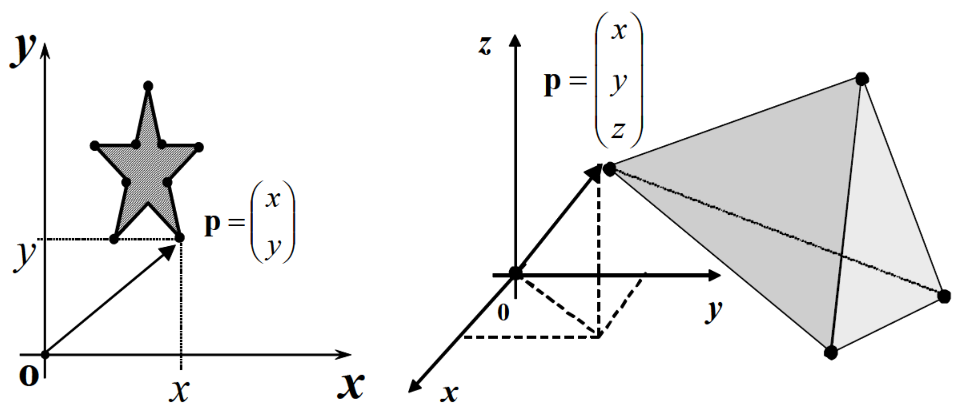


Figura 1 – Posição de um vértice **p** no plano $\mathbb{R}^2$ e no espaço $\mathbb{R}^3$
Fonte: (GATTASS, 2013)

O conjunto de todos os pontos do plano e de todos os pontos do espaço são denominados espaço $\mathbb{R}^2$ e espaço $\mathbb{R}^3$, respectivamente. O plano e o espaço podem ser definidos formalmente como sendo o conjunto de todos os pares ordenados $(\mathrm{x}, \mathrm{y})^{\mathrm{T}}$ ou ternos ordenados $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})^{\mathrm{T}}$ tais que x, y e z sejam números reais. Simbolicamente isso pode ser escrito como:

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{tal que x, y} \in \mathbb{R} \right\} \text{ ou } \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{tal que x, y, z} \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.1}$$

Se aplicarmos o Teorema de Pitágoras aos triângulos retângulos da Figura 1, podemos facilmente deduzir que o tamanho ou a magnitude de um vetor pode ser calculado por:

$$\|p\| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ ou } \|p\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{2.2}$$

Esse tamanho também é denominado “norma do vetor **p**”[1].

2.1.2 Soma, Produto por Escalar, Subtração e Distância

No estudo do ensino médio aprendemos que as duas operações básicas com vetores são a soma e a multiplicação por escalar. A Figura 2 ilustra a soma de dois vetores no plano, tanto do ponto de vista geométrico quanto do algébrico. Geometricamente, a soma de dois vetores é um terceiro vetor obtido a partir da origem do primeiro até a extremidade do segundo, quando este é colocado com a sua origem na extremidade do primeiro. O mesmo vetor resultante é obtido quando colocamos o primeiro na extremidade do segundo, como ilustra o paralelogramo da Figura 2 para o $\mathbb{R}^2$. Algebricamente, essa soma é simplesmente a soma das coordenadas de cada um:

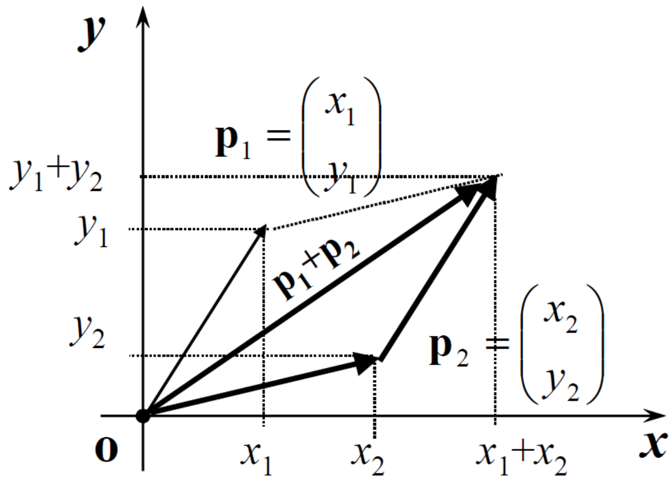


Figura 2 – Soma de dois vetores no $\mathbb{R}^2$
Fonte: (GATTASS, 2013)

Diversos exemplos motivam essa operação. Se estivermos tratando da geometria do movimento de um ponto, por exemplo, e cada vetor representar dois movimentos

[1] $\|\|$ o símbolo denota a norma de um vetor

consecutivos, a soma representaria o movimento combinado.

Tanto algebricamente quanto geometricamente, deve ficar claro que a soma é comutativa, isto é, a ordem dos vetores não altera o resultado, ou seja: $\mathrm{p1}+\mathrm{p2}=\mathrm{p2}+\mathrm{p1}$.

Dois vetores importantes a serem relembrados quanto à operação de soma são o zero (ou nulo) e o negativo (ou inverso com relação à soma). O zero é um vetor de coordenadas nulas que não altera nenhum outro quando somado a ele. Para cada vetor **p** existe outro de igual magnitude, mesma direção e sentido contrário que, somado ao primeiro, resulta no vetor zero. Esse vetor é também chamado de simétrico de **p**, ou **-p**.

O produto de um escalar por um vetor resulta em outro vetor cujas componentes são iguais às do vetor original multiplicadas pelo valor escalar, ou seja:

$$\mathrm{a.p}=\mathrm{a}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ax}\\ \mathrm{ay}\end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{a.p}=\mathrm{a}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\\ \mathrm{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{ax}\\ \mathrm{ay}\\ \mathrm{az}\end{pmatrix} \tag{2.3}$$

A Figura 3 apresenta uma interpretação geométrica do produto de um vetor por um escalar no $\mathbb{R}^2$. Note que, quando o escalar é maior do que 1, o vetor é aumentado. Quando o escalar é maior que 0 e menor que 1, o vetor é reduzido. Quando o escalar é negativo, o vetor muda de sentido. O elemento neutro da multiplicação é o escalar 1 e a multiplicação por 0 torna qualquer vetor nulo. A multiplicação de um vetor **p** por -1 produz um vetor negativo de **p**. Ou seja, -1**p** = –**p**.

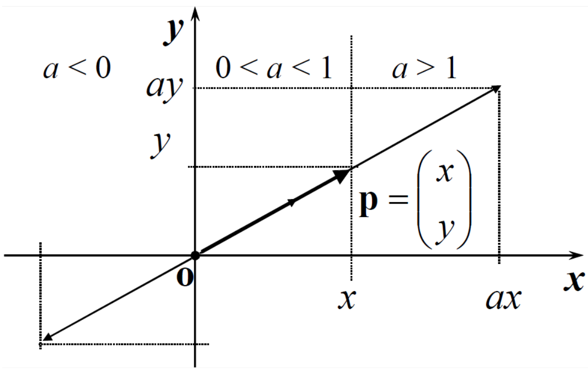


Figura 3 – Produto de um vetor por um escalar.
Fonte: (GATTASS, 2013)

Um caso particular importante é a multiplicação de um vetor por um escalar (o inverso da norma do próprio vetor) resultando num vetor de tamanho unitário. Vetores unitários são muito úteis para medirmos distâncias e ângulos. Para calcular o vetor unitário, simbolizado aqui por $\hat{}$, na direção e no sentido de qualquer vetor diferente de zero, basta multiplicá-lo por um escalar que seja o inverso do comprimento de seu tamanho, ou seja:

$$\widehat{p} = \frac{1}{\|p\|}p \tag{2.4}$$

A partir da soma de dois vetores e do produto de um vetor por um escalar podemos definir a **diferença entre dois vetores** como sendo a soma do primeiro mais o simétrico do segundo:

$$p_2 - p_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \text{ ou } p_2 - p_1 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Essa ordem inversa de p_1 e p_2 vem da interpretação geométrica ilustrada na Figura 4. O vetor diferença é o vetor que vai da extremidade do segundo vetor até a extremidade do primeiro.

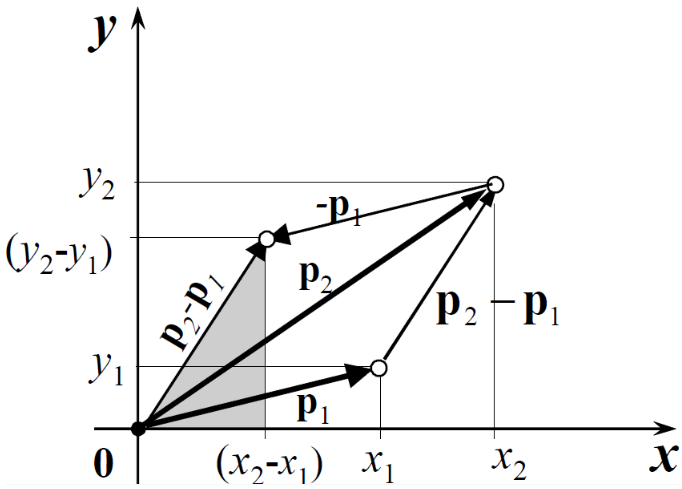


Figura 4 – Diferença entre dois vetores
Fonte: (GATTASS, 2013)

Uma consequência importante da interpretação geométrica da diferença entre dois vetores é a definição da distância entre os dois pontos representados por esses vetores. No sentido comum, a distância entre dois pontos no plano ou no espaço é o comprimento do segmento de reta que os une. Com essa interpretação geométrica, a distância passa a ser a magnitude do vetor diferença. Ou seja:

$$\mathrm{dist}(p_1, p_2) = \|p_2 - p_1\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{2.6}$$

Note que o radicando da fórmula 2.6 é a soma dos quadrados dos catetos do triângulo cinza da Figura 4 – ou seja, coincide com a noção de distância da Geometria Euclidiana.

Uma aplicação interessante do conceito de distância é a definição de lugar geométrico dos pontos $(x, y)^T$ ou $(x, y, z)^T$, que acabam representando curvas ou superfícies no plano ou no espaço.

2.1.3 Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores é uma operação entre eles que resulta num escalar. A definição geométrica do produto escalar de dois vetores p_1 e p_2 é dada pelo produto das normas multiplicado pelo cosseno do ângulo entre eles, ou seja:

$$p_1.p_2 = \|p_1\|\|p_2\|\cos\vartheta \tag{2.7}$$

O produto escalar é o produto interno padrão do espaço euclidiano, sendo que o produto interno é fundamental para o cálculo de operações comuns na Computação Gráfica, como o cálculo de ângulos, a projeção de um vetor na direção e sentido de outro, a projeção de um vetor numa direção perpendicular à de outro, a reflexão de um vetor em torno de outro e a distância de um ponto a um plano. Em todos esses cálculos, podemos simplificar o problema considerando que o vetor de referência é unitário. É isso que faremos a seguir. Quando, por exemplo, o vetor em que estamos projetando não for unitário, devemos normalizá-lo antes de fazer os cálculos ou adaptar as fórmulas deduzidas a seguir.

O cálculo do ângulo entre dois vetores unitários $\widehat{u}_1$ e $\widehat{u}_2$ pode ser deduzido diretamente da equação 2.8:

$$\vartheta = \arccos\left(\frac{\widehat{u}_1.\widehat{u}_2}{\|\widehat{u}_1\|.\|\widehat{u}_2\|}\right) = \arccos\left(\widehat{u}_1.\widehat{u}_2\right) \tag{2.8}$$

Essa fórmula fornece ainda uma interpretação geométrica sobre o alinhamento de dois vetores unitários. Se o produto escalar for igual a 1, o cosseno é igual a 1 e, consequentemente, o ângulo entre os vetores é igual a zero. Ou seja, estão na mesma direção e no mesmo sentido. Caso o produto interno seja zero, os vetores são ditos **ortogonais**.

A projeção de um vetor na direção de outro unitário é um vetor com a mesma direção que o segundo com norma igual à norma do primeiro vezes o cosseno do ângulo entre eles, como mostra a Figura 5. Essa expressão pode ser escrita através de:

$$p_n = (p.\widehat{n})\widehat{n} \tag{2.9}$$

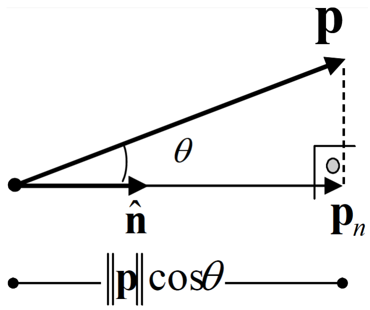


Figura 5 – Projeção sobre um vetor unitário
Fonte: (GATTASS, 2013)

2.1.4 Produto Vetorial

O produto vetorial é um produto somente definido no $\mathbb{R}^3$ e serve principalmente para calcularmos normais, áreas e orientações no espaço. Ele pode ser usado no $\mathbb{R}^2$ se imaginarmos esse espaço como um sub-espaço do $\mathbb{R}^3$ que satisfaça a equação $z = 0$.

A definição geométrica do produto vetorial está ilustrada na Figura 6. O produto vetorial é uma operação entre dois vetores p_1 e p_2 que resulta em um terceiro vetor $p = p_1 \times p_2$. O vetor resultante é perpendicular a ambos os vetores iniciais e tem como norma o produto das normas multiplicado pelo seno do ângulo entre eles.

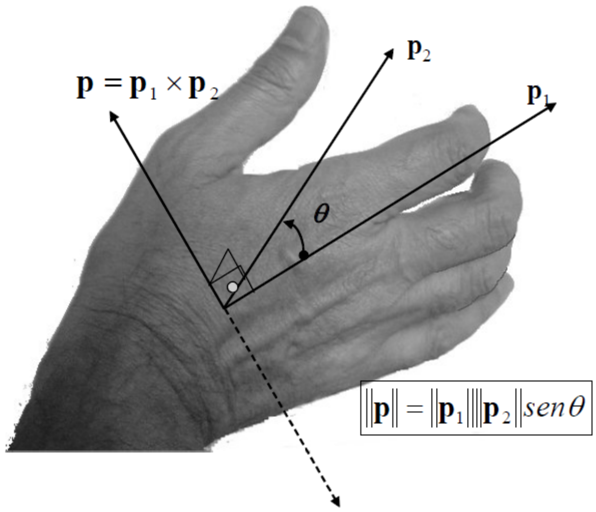


Figura 6 – Definição geométrica do produto vetorial
Fonte: (GATTASS, 2013)

Um ponto importante a considerar é a orientação que fica implícita nesse produto. O produto de p_1 com p_2 produz um vetor, p, que está na direção do polegar quando os demais dedos da mão direita se movimentam no sentido mostrado na figura. Note que o produto vetorial de p_2 com p_1 resulta em $-p$ (tracejado na figura). Aliás, esse também seria o resultado do produto vetorial de p_1 com p_2 se utilizássemos a mão esquerda ao invés da direita. Essa orientação, implícita na própria definição do produto, é fundamental para suas aplicações.

Algebricamente podemos escrever[2]:

$$\mathrm{p} = \mathrm{p}_1 \times \mathrm{p}_2 = (\mathrm{x}_1\mathrm{i} + \mathrm{y}_1\mathrm{j} + \mathrm{z}_1\mathrm{k}) \times (\mathrm{x}_2\mathrm{i} + \mathrm{y}_2\mathrm{j} + \mathrm{z}_2\mathrm{k}) \tag{2.10}$$

Uma forma mnemônica de lembrar deste produto é dada por:

$$\mathrm{p}_1 \times \mathrm{p}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{j} & \mathrm{k} \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_1 & \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{y}_2 & \mathrm{z}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{y}_1 & \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{y}_2 & \mathrm{z}_2 \end{vmatrix} \mathrm{i} - \begin{vmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{z}_1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{z}_2 \end{vmatrix} \mathrm{j} + \begin{vmatrix} \mathrm{x}_1 & \mathrm{y}_1 \\ \mathrm{x}_2 & \mathrm{y}_2 \end{vmatrix} \mathrm{k} \tag{2.11}$$

Conforme mencionado anteriormente, o produto vetorial tem diversas aplicações geométricas importantes. A Figura 7 mostra como ele pode ser usado para calcular a normal e a área de um triângulo. Ambos podem ser calculados através do produto vetorial de dois vetores que partem de um dos vértices. O vetor normal é o próprio vetor resultante do produto e a área é a metade da norma dele.

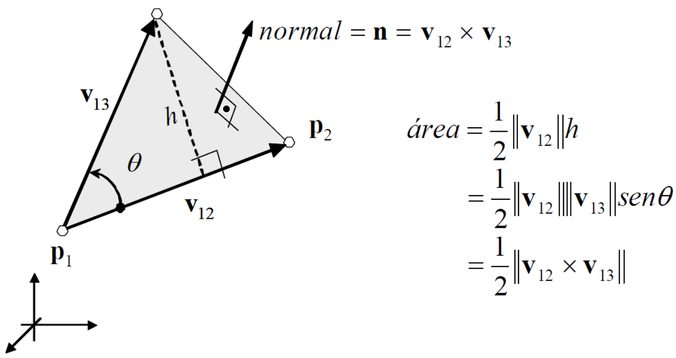


Figura 7 – Cálculo da área de um triângulo pelo produto vetorial
Fonte: (GATTASS, 2013)

2.1.5 Equações Paramétricas: reta

Um dos objetivos da Geometria Analítica é obter equações associadas a conjuntos de pontos, estabelecendo assim uma relação entre a Geometria e a Álgebra. Essa relação é, em muitos casos, pouco explorada no Ensino Médio e Fundamental, e o estudo da Geometria Analítica fica limitado a fórmulas e nomenclaturas.

Apresentaremos a seguir as equações que representam uma reta do plano. Baseado nas propriedades geométricas da reta, serão apresentados dois tipos de equação: paramétrica e cartesiana.

[2] i, j e k são os vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$ e correspondem, respectivamente, as triplas $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$

2.1.5.1 Reta

Dentro de uma abordagem algébrica, retas no plano ($\mathbb{R}^2$) ou no espaço ($\mathbb{R}^3$) podem ser representadas por equações paramétricas. Nesse tipo de equação as coordenadas dos pontos pertencentes a uma reta são dadas por expressões do primeiro grau em função de um parâmetro real. Ao variar o valor do parâmetro, encontramos distintos pontos da reta, ou seja, a cada ponto da reta está associado um único parâmetro.

Seja r a reta que passa pelos pontos A e B e seja P um ponto do plano ou do espaço, então, o ponto P pertence à reta r se, e somente se, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Isto é, $\mathrm{P} \in \mathrm{r}$ se, e somente se, existe um número $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Note que o número t é determinado de forma única pelo ponto P e é chamado **parâmetro** de P em r.

Assim, para atingir o ponto P na reta r, devemos ir até o ponto A e nos deslocarmos ao longo da reta por $\mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, como na Figura 8.

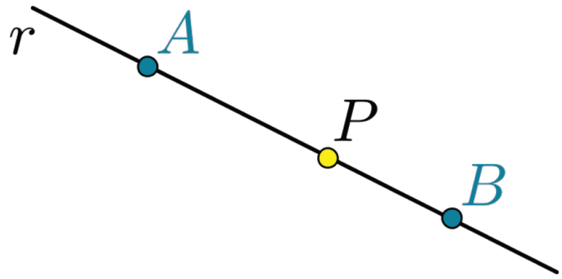


Figura 8 – Linhas resultantes da execução do algoritmo ingênuo para desenho de linhas
Fonte: (GATTASS, 2013)

Escrevemos, então, a equação que determina o ponto P pela variação do parâmetro t da seguinte forma:

$$\mathrm{r} : \mathrm{P} = \mathrm{A} + \mathrm{t}\overrightarrow{\mathrm{AB}}; \mathrm{t} \in \mathbb{R} \tag{2.12}$$

Essa equação é chamada equação paramétrica da reta r.

Para o caso da definição da reta no plano, se $\mathrm{A} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$, $\mathrm{B} = (\mathrm{a}', \mathrm{b}')$ e $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y})$ são as coordenadas dos pontos num sistema de coordenadas dado, então:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{r} &\iff (\mathrm{x}, \mathrm{y}) = (\mathrm{a}, \mathrm{b}) + \mathrm{t}(\mathrm{a}' - \mathrm{a}, \mathrm{b}' - \mathrm{b}) \text{ para algum } \mathrm{t} \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{t}(\mathrm{a}' - \mathrm{a}) \\ \mathrm{y} = \mathrm{b} + \mathrm{t}(\mathrm{b}' - \mathrm{b}) \end{cases} \quad \text{para algum } \mathrm{t} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

De forma análoga para o caso da definição da reta no espaço, se $\mathrm{A} = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$,

$\mathrm{B} = (\mathrm{a}', \mathrm{b}', \mathrm{c}')$ e $\mathrm{P} = (\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ são as coordenadas dos pontos num sistema de coordenadas dado, então:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} = (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) \in \mathrm{r} &\iff (\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = (\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}) + \mathrm{t}(\mathrm{a}'-\mathrm{a}, \mathrm{b}'-\mathrm{b}, \mathrm{c}'-\mathrm{c}) \text{ para algum } \mathrm{t} \in \mathbb{R} \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{t}(\mathrm{a}'-\mathrm{a}) \\ \mathrm{y} = \mathrm{b} + \mathrm{t}(\mathrm{b}'-\mathrm{b}) \\ \mathrm{z} = \mathrm{c} + \mathrm{t}(\mathrm{c}'-\mathrm{c}) \end{cases} \quad \text{para algum } \mathrm{t} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dizemos que as equações 2.15 e 2.16:

$$\mathrm{r} : \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{t}(\mathrm{a}'-\mathrm{a}) \\ \mathrm{y} = \mathrm{b} + \mathrm{t}(\mathrm{b}'-\mathrm{b}) \end{cases} ; \mathrm{t} \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

$$\mathrm{r} : \begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{a} + \mathrm{t}(\mathrm{a}'-\mathrm{a}) \\ \mathrm{y} = \mathrm{b} + \mathrm{t}(\mathrm{b}'-\mathrm{b}) \\ \mathrm{z} = \mathrm{c} + \mathrm{t}(\mathrm{c}'-\mathrm{c}) \end{cases} ; \mathrm{t} \in \mathbb{R} \tag{2.16}$$

são as **equações paramétricas** da reta r no plano e no espaço, respectivamente.

2.2 O ESTUDO DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

A Geometria Analítica possibilita o tratamento algébrico das propriedades e dos elementos geométricos. O aluno do ensino médio ao estudá-la tem a oportunidade de conhecer essa forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações (BRASIL, 2006).

2.2.1 Um pouco sobre a história da Geometria Analítica

De acordo com Struik (1954), as nossas primeiras concepções de número e forma datam de tempos tão remotos como os do começo da Idade da Pedra, o Paleolítico. Durante as centenas de milhares de anos, ou mais, desse período, os homens viviam em cavernas (Figura 9), em condições pouco diferentes das dos animais, e as suas principais energias eram orientadas para o processo elementar de recolher alimentos onde fosse possível encontrá-los. Eles faziam instrumentos para caçar e pescar, e desenvolviam linguagem para comunicarem-se uns com os outros.

Conforme exprime Guimarães (2010, p. 25):

> Nessa época, a necessidade de contar, de utilizar números era inexis-

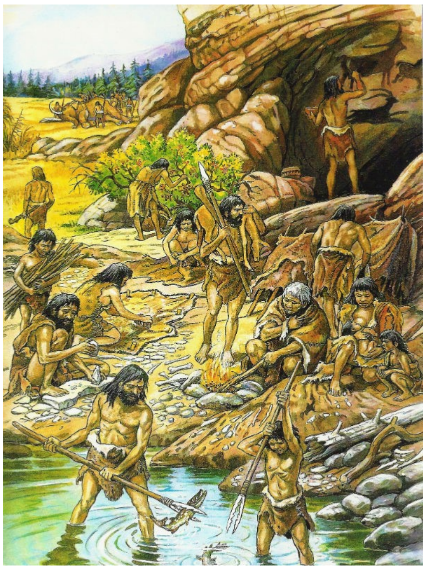


Figura 9 – Período Paleolítico
Fonte: (GOULART, 2011)

> tente, pois para nada no modo de vida do homem era preciso utilizar a contagem. Há mais de 10.000 anos, no Oriente Médio, o aumento da população e a escassez da comida levaram o homem a desenvolver formas mais elaboradas de atividades humana.

Pouco progresso foi feito no entendimento de valores numéricos e relações espaciais até a transição ocorrida da mera coleta de comida para a sua atual produção, da caça e pesca para a agricultura. Com essa mudança fundamental, uma revolução ocorreu, na qual a atitude passiva do homem em relação à natureza se tornou ativa. A humanidade entrou, então, na era Neolítica (STRUIK, 1954). Foi nessa era que as pessoas começaram a abandonar a vida nômade e agruparam-se em pequenas comunidades (Figura 10).

De acordo com Miorim (1998, p. 05):

> [...] desenvolveram-se a agricultura, a domesticação e criação de animais e a fabricação de novos instrumentos e armas. Isso fez com que já não existisse mais uma dependência total da natureza. As pinturas desse período não tentam reproduzir, com a maior perfeição possível, animais, objetos e pessoas, mas mostram representações esquemáticas, em que eram bastante utilizadas simetrias e congruências.

O homem do Neolítico revelou um agudo sentido para os padrões geométricos. A noção de plano e relações espaciais possivelmente foi formada nessa época a partir das atividades cotidianas. A ornamentação neolítica manifestava relações de congruência, simetria e semelhança. Registros do tempo e, relacionando com eles, conhecimentos dos movimentos do Sol, da Lua e das Estrelas atingiram um caráter científico com o desenvolvimento da agricultura. As constelações eram usadas como

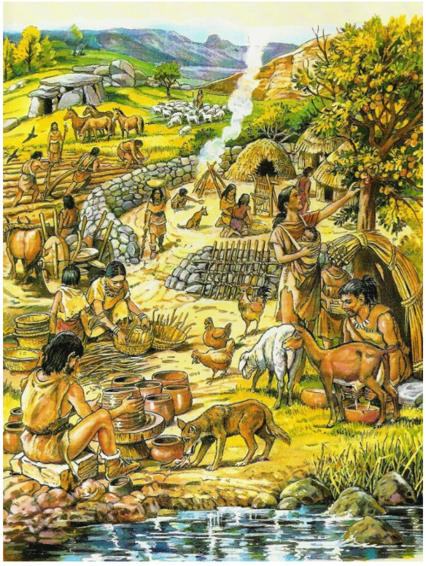


Figura 10 – Período Neolítico
Fonte: (GOULART, 2011)

guias para a navegação. Dessa astronomia primitiva resultaram alguns conhecimentos sobre esferas, direções angulares, círculos e figuras mais complicadas (STRUIK, 1954).

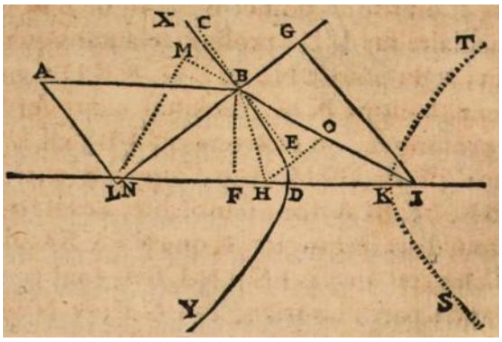
“Alguns pesquisadores acreditam que na Mesopotâmia, os problemas geométricos tenham sido utilizados como um meio de oferecer exemplos para aplicação de um determinado tipo de problema algébrico” (SOARES, 2013, p. 34).

Para alguns historiadores, os gregos utilizavam as “ordenadas” em relação a dois ou mais eixos no plano para o estudo da geometria e elaboravam mapas utilizando coordenadas para fixação de um ponto (SANTOS; LAVAL, 2012, p. 173).

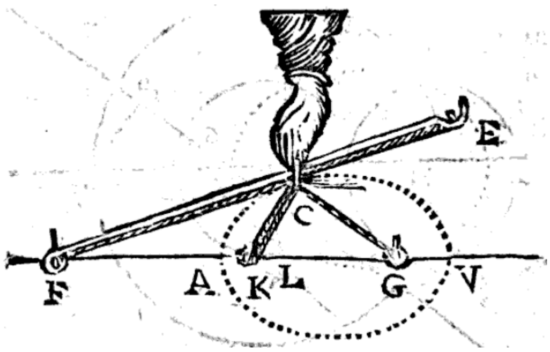
De fato, segundo Bompiani (2005, p. 66), os primeiros métodos da Geometria Analítica se devem a Menecmo (380 – 320 A.C.), que chega a desenvolver problemas de interseção de superfícies, aplicando técnicas que, mesmo não incluindo explicitamente o uso de coordenadas, levavam as coordenadas de forma implícita em seu tratamento conceitual. Algo parecido ocorreu com Apolonio de Perga (262 – 190 A.C.), que demonstrou diversos resultados relacionados a retas e circunferências empregando técnicas similares às de Menecmo. O matemático parisiense Nicole Oresme (1321 – 1382), conhecido como o bispo de Lisieux, produziu alguns trabalhos fazendo uso da longitude e latitude, equivalentes às atuais abscissa e ordenada.

Mais tarde, tem-se o século XVII que se constitui como de fundamental importância na história da matemática pelo surgimento de uma nova geometria, a partir dos trabalhos de Descartes e Fermat. Dá-se início, então, ao que veio se configurar como a Geometria Analítica (SOARES, 2013, p. 34).

De fato, conforme Struik (1954, p. 132-133), Descartes publicou seu livro intitulado “Géométrie” como parte de seu “Discours de la Méthode”, em 1637. O livro apresenta uma aplicação do seu método geral de unificação, neste caso a unificação da álgebra com a geometria. O mérito do livro, de acordo com o ponto de vista mais aceito, consiste principalmente na criação da assim chamada Geometria Analítica (Figura 12a-12b).



(a)



(b)

Figura 11 – A Geometria Analítica de Descartes
(a) A representação da hipérbole no cálculo de dioptria. Fonte: (DESCARTES, 1668, p. 202); (b) Método de construção de uma elipse. Fonte: (DESCARTES, 1705, p. 85)

A utilização de um sistema de coordenadas foi fundamental na invenção da Geometria Analítica, porém, Descartes não empregava necessariamente um sistema de eixos ortogonais. O sistema era escolhido de maneira conveniente, dependendo do problema (STRUIK, 1954).

Num trabalho sobre tangentes e quadraturas, concluído antes de 1637, Fermat definiu analiticamente outras curvas. Enquanto Descartes partia de um lugar geométrico e encontrava sua equação, Fermat, contrariamente, partia de uma equação e estudava o lugar correspondente (SOARES, 2013, p. 34).

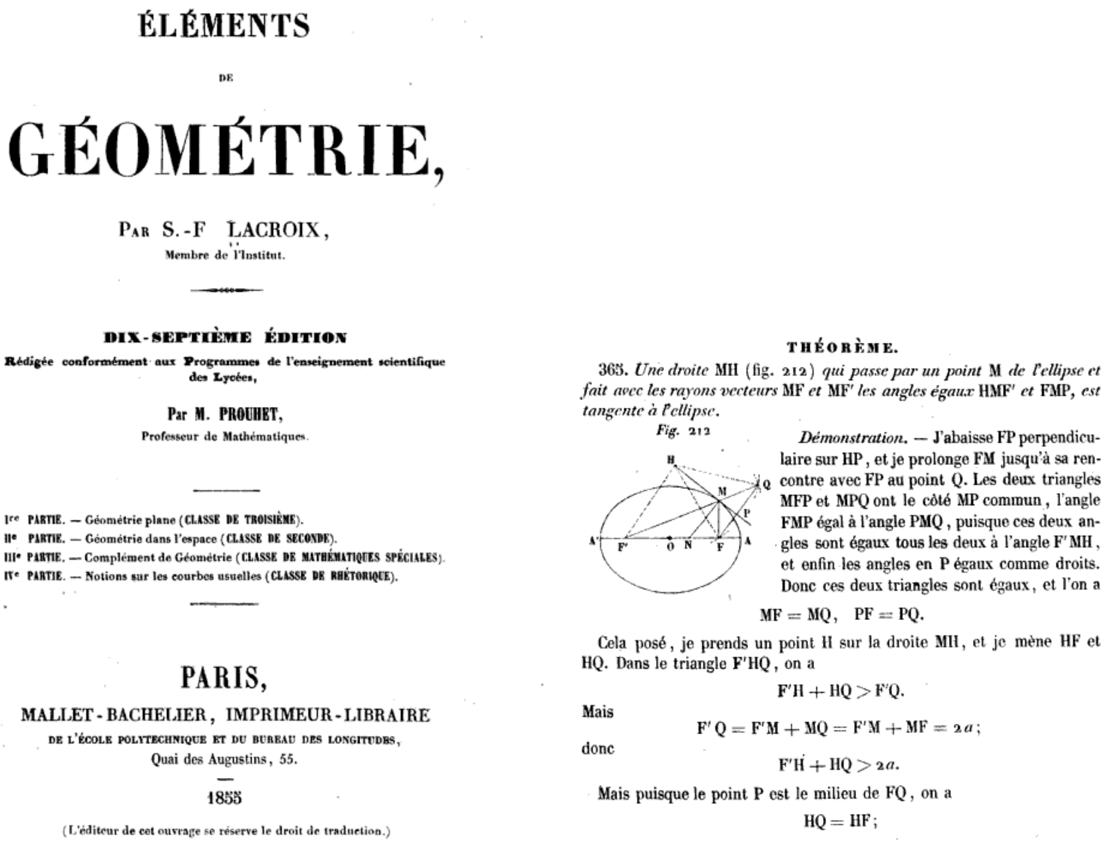
Jan De Witt, por sua vez, escreveu *"Elementa Curvarum Linearum"*, onde a primeira parte trazia diversas definições cinemáticas e planimétricas das seções cônicas, num tratamento mais sintético, e a segunda parte abordava a Geometria Analítica fazendo o uso de coordenadas de uma forma sistemática. Por esse fato, sua obra passou a ser considerada o primeiro livro de Geometria Analítica (GROOTENDORST et al., 2010).

Já o Cálculo, apoiado pela Geometria Analítica, foi o maior instrumento matemático, poderoso e eficiente, revelado no século XVII. (SANTOS; LAVAL, 2012)

E finalmente, no século XIX tem-se a consolidação da Geometria Analítica por meio do trabalho do então professor da Ècole Polytechnique, Gaspard Monge. É interessante ressaltar que o efeito produzido pelo seu trabalho fez com que, na mesma época, a Geometria Analítica se tornasse uma disciplina, conquistando um lugar nas escolas (SOARES, 2013).

Lacroix, aluno e posteriormente colega de Monge, juntamente com ele, deu um “toque final” à Geometria Analítica, deixando-a próxima das notações nos moldes atuais. Na verdade, foi Lacroix que propôs o termo Geometria Analítica em seu *“Traité Encyclopédique de Calcul différentiel et integral”*, em 1797 (MEHL, s.d.).

No Brasil, a influência do modelo francês no sistema educacional foi determinante (GARNICA; GOMES; ANDRADE, 2012). Segundo Silva (2011a, p. 234), os docentes de matemática da Academia Real Militar do Rio de Janeiro realizaram vários embates por causa dos “compêndios” a serem recomendados na instituição. Eles desejavam um “sistema” único de orientação e isso, na prática, significava guiar o ensino das disciplinas básicas, como aritmética, álgebra, geometria (incluindo a Geometria Analítica) e o cálculo diferencial por um único autor. A partir de 1834, os livros adotados eram: a Trigonometria (plana) de Legendre; a Geometria; os Complementos de Geometria e Geometria Descritiva; a Trigonometria esférica; o Cálculo Diferencial e Integral; a Aritmética e a Álgebra, todos de Lacroix (Figura 4). Isso demonstra um longo reinado e soberania dos livros do autor na academia.



ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE,

PAR S.-F LACROIX,

Membre de l'Institut.

DIX-SEPTIÈME ÉDITION

Rédigée conformément aux Programmes de l'enseignement scientifique des Lycées,

Par M. PROUHET,

Professeur de Mathématiques.

Ire PARTIE. — Géométrie plane (CLASSE DE TROISIÈME).

IIe PARTIE. — Géométrie dans l'espace (CLASSE DE SECONDE).

IIIe PARTIE. — Complément de Géométrie (CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES).

IVe PARTIE. — Notions sur les courbes usuelles (CLASSE DE RHÉTORIQUE).

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Augustins, 55.

1855

(L'éditeur de cet ouvrage se réserve le droit de traduction.)

THÉORÈME.

365. *Une droite* MH (fig. 212) *qui passe par un point* M *de l'ellipse et fait avec les rayons vecteurs* MF *et* MF' *les angles égaux* HMF' *et* FMP, *est tangente à l'ellipse.*

Fig. 212

Démonstration. — J'abaisse FP perpendiculaire sur HP, et je prolonge FM jusqu'à sa rencontre avec FP au point Q. Les deux triangles MFP et MPQ ont le côté MP commun, l'angle FMP égal à l'angle PMQ, puisque ces deux angles sont égaux tous les deux à l'angle F'MH, et enfin les angles en P égaux comme droits. Donc ces deux triangles sont égaux, et l'on a

$$MF = MQ, \quad PF = PQ.$$

Cela posé, je prends un point H sur la droite MH, et je mène HF et HQ. Dans le triangle F'HQ, on a

$$F'H + HQ > F'Q.$$

Mais

$$F'Q = F'M + MQ = F'M + MF = 2a;$$

donc

$$F'H + HQ > 2a.$$

Mais puisque le point P est le milieu de FQ, on a

$$HQ = HF;$$

(a) (b)

Figura 12 – Livro de Geometría Analítica de Lacroix
(a) Folha de Rosto do livro Elementos de Geometria de Lacroix que foi utilizado na Academia Real Militar no Brasil; (b) Trecho da página 158 do livro de Lacroix mostrando a abordagem de um teorema e sua respectiva demonstração.
Fonte: (LACROIX; PROUHET, 1855)

Até os dias de hoje, a Geometria Analítica vem sendo parte integrante dos conteúdos a serem trabalhados na Educação Básica. Além disso, os conceitos trabalhados na Educação Básica são aprofundados nos componentes curriculares dos cursos de graduação das ciências exatas, tais como Engenharia, Ciências da Computação, Arquitetura, Matemática, Física, etc. Seu estudo é relevante, pois é uma ferramenta importante para o Cálculo Diferencial e Integral e é uma das principais referências num primeiro curso de Álgebra Linear (CASTRO, 2013).

2.2.2 O Ensino da Matemática e as Metodologias Tradicionalistas

Historicamente falando, o ensino da matemática se remete a estratégias, às quais devem ser dadas a devida importância no que diz respeito à compreensão dos educandos nos conteúdos matemáticos, pois se pode despertar o interesse dos alunos para o aprendizado quando o docente se projeta para a aplicação de conteúdos contextualizados e com ênfase em situações práticas do cotidiano dos discentes (GUIMARÃES, 2010).

O ensino da matemática possui características distintas em seu processo de aprendizagem quando comparada com outras áreas do conhecimento, conforme abaixo:

> O ensino de matemática é sempre baseado em ensinamentos anteriores, ou seja, ele é sequencial e dificilmente um estudante aprende a dividir se não tiver aprendido a somar, subtrair e multiplicar. Mais que isso, não se pode pular etapas neste processo de aprendizagem. Acrescenta-se aí o fato da aprendizagem ser baseada em raciocínio crítico e lógico (LOPES; VIANA; LOPES, 2005, p. 18).

No quesito ensino da matemática, uma das metodologias a serem ressaltadas, utilizadas por professores tradicionalistas e que acaba atingindo diretamente o processo de aprendizagem do aluno, acontece quando o professor considera apenas os conteúdos como sendo relevantes, e esse tipo de educador, segundo Wachilisk (2007, p. 19), “defende, ainda, que o aluno, ao prestar atenção em sua exposição, anotar tudo, repetir diversas vezes os exercícios apresentados e estudar isso tudo, adquire o conhecimento matemático transmitido”.

Ainda no que diz respeito às metodologias tradicionalistas, que vêm sendo desenvolvidas no ensino da matemática ao longo dos anos, conforme também relata Wachilisk (2007, p. 19):

> Nesse modelo de ensino tradicional, que se sustenta muitas vezes pela tradição milenar da ciência matemática, da “transmissão” de conhecimentos, temos verificado que ou o aluno avança na sua aprendizagem, ou acaba sendo excluído do sistema escolar com o fracasso do ensino da Matemática.

No dia-a-dia da prática docente, o profissional licenciado deve dar importância acima de tudo ao processo de ensino-aprendizagem, valorizando o conhecimento dos alunos e conduzindo os mesmos a solução de problemas. Segundo Wachilisk (2007, p. 20), "há também uma forte preocupação por parte desse professor em valorizar o aspecto sociocultural e realizar um bom planejamento das situações didáticas, com muita atenção voltada à ação e à reflexão".

2.2.3 TICs no Ensino da disciplina de Matemática

As mudanças que têm ocorrido ao longo dos anos, no que diz respeito à educação, são reflexos da constante evolução pela qual o mundo tem passado gradativamente como se pode observar, pois, praticamente tudo o que fazemos hoje tem o auxílio das tecnologias, tecnologias estas bem presentes no meio educacional e que provavelmente firmarão parceria por tempo indeterminado. Segundo Munhoz (2011, p. 191), "a educação passará, neste século, por transformações que são difíceis de imaginar, em face da revolução tecnológica contínua e progressiva que ocorre no mundo atual".

Tecnologia é a palavra-chave, é a metodologia desenvolvida e utilizada pelo homem para facilitar os mais distintos trabalhos, e que hoje ocupa um importante lugar perante à educação. Além das tecnologias tradicionais voltadas para o ensino, às quais estamos acostumados, hoje temos importantes novas tecnologias que quando bem utilizadas na escola, tendo a intervenção do docente como mediador, se tornam capazes de proporcionar uma melhora no processo de aprendizagem.

A importância do educador no processo de mediação do conhecimento com o uso de tecnologias voltadas para o ensino deve ser ressaltada e levada em consideração, haja vista o importante papel que o professor exerce em sala de aula e, portanto, não se deve deixar de lado a preparação do professor de ontem, de hoje e do amanhã, para que os mesmos possam ser capazes de atuarem de acordo com as propostas das TICs na educação, de fato,

> Quando aproveitamos esses mecanismos que exploram a comunicação, as aulas, além de serem mais estimulantes, tornam o aprendizado significativo. É claro que para haver o uso correto das TICs, das mídias, é necessário capacitar o educador, mas cada vez mais se cobra do professor a ampliação das suas habilidades didáticas e metodológicas em consonância com os novos saberes da sociedade contemporânea (MUNHOZ, 2011, p. 196).

As dificuldades ou resistências que ainda são encontradas quanto à utilização de tecnologias no processo de ensino aprendizagem como metodologia inovadora acontecem por vários motivos. Segundo Rolkouski (2011, p. 17):

> Os que são indiferentes aguardam pacientemente o desenrolar dos acontecimentos para aderirem ou não à nova tecnologia. [...] Já os céticos cercam-se de argumentos os mais variados para desacreditar

> do novo. [...] Já os otimistas acabam por acreditar a resolução de todos os problemas da educação à introdução dos computadores. No entanto, os argumentos apresentados, em geral, são ingênuos e carecem de fundamentos.

Talvez um dos maiores questionamentos, ou temor por parte dos "pessimistas", quanto ao uso de computadores com a finalidade de auxiliar o processo de ensino aprendizagem ainda não tenha ficado bem esclarecido. A principal ideia de TICs na educação não é substituir o professor pelo computador, como muitos ainda acreditam ser o que vai acontecer, um pensamento que segundo Rolkouski (2011, p. 17) pode ser combatido na medida em que seja observado que não há a substituição de uma tecnologia por outra; elas coexistem. Observa-se, por exemplo, o caso dos noticiários de televisão que coexistem com os noticiários na rádio, ou seja, não haverá substituição do professor pelo computador, mas uma mudança de postura do professor num ambiente com uma nova tecnologia.

E mesmo com tantos resultados positivos já comprovados por meio de pesquisas sobre Informática e Educação, e também com a maior acessibilidade que temos hoje aos computadores e, mesmo que esses resultados comprovem que o uso de computadores pode ser benéfico para o processo de ensino aprendizagem, as negativas encontradas não serão totalmente superadas enquanto não houver uma melhor preparação do docente.

> Mesmo com grande apelo da sociedade e a crescente oferta de computadores nas escolas, o número de professores que utilizam a informática na rede pública ou privada de ensino ainda é incipiente em nosso país. Um dos maiores motivos é o descompasso entre a introdução da informática na educação e a formação do professor (ROLKOUSKI, 2011, p. 18).

A falta de segurança ou de preparo dos professores levantam muitos questionamentos. Nos damos conta que para haver o sucesso das tecnologias como ferramentas de apoio voltadas para o ensino, muitos empasses precisam ser solucionados, sendo, o principal deles, tornar o aluno e o professor os principais beneficiários das tecnologias aplicadas à educação, eliminando assim os seguintes questionamentos, indagados por (FOLLADOR, 2007, p. 36):

> Aos poucos, percebemos uma mobilização dos governos e dos dirigentes de redes particulares no sentido de suprir as escolas com computadores. Por outro lado, a maioria de nós, professores, não se sente preparada para usa-los. Será que existe um primeiro passo? Os computadores devem chegar primeiro ou os professores devem preparar-se para depois a escola adquirir computadores?

Muito além dos questionamentos como os mencionados anteriormente, o que se deve compreender é que a informática já está presente na educação, tal fato já é uma realidade, e o uso deste recurso vem garantindo um melhor desempenho por parte dos alunos nas disciplinas que tem como característica altos índices de rejeição e/ou reprovação, tais como Matemática.

Já existem inúmeras ferramentas para apoio no processo de ensino-aprendizagem deste tipo de disciplina, para o caso da Matemática, temos o Cabri-Géomètre,

> Criado na França, [...] é um software que foi desenvolvido para trabalhar com conceitos de Matemática com maior peso para os conceitos de geometria. Porém, com o Cabri, é possível propor atividades relacionadas à geometria espacial, à trigonometria, à geometria descritiva, ao desenho geométrico e à álgebra. Além disso, é possível trabalhar com conceitos de física (ótica geométrica) e educação artística (FOLLADOR, 2007, p. 55).

A ferramenta Cabri, como é mais conhecida, é apenas uma das muitas outras também voltadas para auxiliar no ensino da matemática. Munhoz (2011, p. 179) afirma que a introdução da informática no processo de ensino da Matemática provém das transformações ocorridas na sociedade pela difusão da comunicação de massa que se tornou a Internet. Hoje, o aluno domina muitos dos princípios básicos e a escola assume como desafio presente avançar nos procedimentos metodológicos com uso da informática como tema auxiliador no ensino-aprendizagem da Matemática.

Mediante tantas considerações quanto ao uso da informática voltada para o auxílio do ensino da disciplina de matemática, é de grande relevância ter o entendimento correto de como tal ferramenta deve ser utilizada e mantida e, o que representa a informática na educação matemática. Nesse contexto, Munhoz (2011, p. 179) afirma que:

> O papel da informática na educação matemática depende do projeto político-pedagógico que a escola sustenta, do planejamento inovador da utilização das tecnologias por parte do educador, da sua criatividade e dos softwares disponibilizados para o aprendizado.

Apesar da informática ter se tornado tão presente no cotidiano da sociedade moderna, e ter assumido um papel tão importante no quesito educação, os questionamentos quanto ao uso de tais tecnologias ainda são bem evidenciados em pesquisas na área, principalmente quando se fala na associação de TICs e educação, em especial quando é cogitada a hipótese de utilização das mesmas no ensino das ciências exatas, como a matemática, por exemplo, conforme expressado por Kawasaki (2008, p. 40-41):

> Com a chegada dos computadores nas escolas, as questões passam a ser: Como posso utilizar o computador para ensinar. . . ? No caso específico do ensino da matemática: Como ensinar fração utilizando o computador? [...] partindo da expectativa sobre "respostas", poderíamos reformulá-las da seguinte maneira: Que software/programas existem para ensinar um conteúdo específico? Ou como incorporar um determinado software no ensino de um conteúdo específico?

Talvez o que tenha caído no esquecimento de uns, e não tenha chegado ao conhecimento de outros, seja um dos motivos pelo qual o computador foi criado, tal como a forma como foi utilizado durante tanto tempo, ou seja, o uso do computador sempre esteve fortemente ligado a fins matemáticos, o que torna possível a utilização de computadores e softwares no auxílio da disciplina de matemática, conforme relata Kawasaki (2008, p. 42):

> Em seus primórdios, por um longo período, o computador tal como foi concebido, era utilizado para realizar (complexos) cálculos numéricos. Podemos afirmar que desde então, principalmente nas três últimas décadas, a evolução do computador, de seus usos e do desenvolvimento de software para variados fins têm sido rápida e profunda. No caso do software matemático, temos disponível hoje, das simples calculadoras aos, extremamente sofisticados, software de geometria dinâmica.

Então por que não reconhecer que, se utilizado para fins educacionais, logo estará se permitindo a evolução no ensino da matemática juntamente com a evolução das tecnologias? Pois, o que já evidenciamos no contexto apresentado é que o uso das TICs na educação é uma realidade, e que a utilização das mesmas tem representado resultados positivos quanto ao ensino da matemática, Kawasaki (2008, p. 43) corrobora com essas afirmações, dizendo que:

> É recorrente na literatura de pesquisa que uma das principais vantagens, ao incorporar as tecnologias computacionais nos processos de ensinar/aprender matemática, é a possibilidade de visualizar e manipular as ideias matemáticas (objetos virtuais matemáticos). Tal possibilidade decorre do fato de alguns softwares (ou aplicativos) matemáticos serem capazes de transformar situações algébrico-simbólicas em situações espaço-geométricas.

2.2.4 O Ensino Tradicional da Geometria Analítica

O grau de complexidade exigido pelas novas atividades que surgem cotidianamente em todas as áreas laborais só tem crescido, isso inclui o próprio ato de estudar. “Estudar é, realmente, um trabalho difícil. Exige de quem o faz uma postura crítica, sistemática. Exige uma disciplina intelectual que não se ganha a não ser praticando” (FREIRE, 2004, p. 09-12).

A Matemática Pura, conforme Bassanezi (2002), é uma ciência essencialmente formal, tratando de entes ideais, abstratos ou interpretados, existentes apenas na mente humana – constrói o próprio objeto de estudo embora boa parte das ideias sejam originadas de abstrações de situações empíricas (naturais ou sociais).

De fato, com a sua evolução durante a história da humanidade, o nível de abstração da matemática cresceu enquanto a simplicidade do entendimento dos conceitos diminuiu. Contudo, não é possível deixar de creditar à Matemática o estilo de vida que as sociedades civilizadas possuem hoje, pois sem essa área, é provável que as mesmas ainda estivessem vivendo como no período pré-dinástico, onde a matemática era rudimentar e a escrita recém estava sendo desenvolvida (GASPAR; MAURO, 2004).

Conforme Santos e Souza (s.d.), na área educacional existem contradições causadas pelos movimentos dinâmicos das vidas ali existentes, suas relações e os processos pedagógicos. Contradições que causam algumas inquietações que permeiam as reflexões pedagógicas. Uma delas refere-se ao ensino da Matemática, que na maioria das vezes, é marcado por dificuldades e rejeições.

De fato, quando alguém se depara com a Matemática Pura em toda sua extensão não é possível deixar de notar a vasta cadeia de teorias, teoremas, proposições, corolários, leis, lemas, axiomas e provas que a compõe e permeiam todas as suas áreas, algumas mais próximas do cotidiano das pessoas, outras com aplicabilidade prática desconhecida até o momento.

Como já citado anteriormente, o problema reside no fato de que vários docentes ao saírem da graduação e irem para as salas de aula, saem sem a devida preparação para levar a Matemática a um nível de entendimento adequado ao aluno da Educação Básica, ao sentirem-se ameaçados se limitam a aplicar apenas a metodologia tradicional de ensino.

Entra-se, então, na zona de “perigo” colocado anteriormente por Bassanezi, de que o estudo da Matemática venha a se tornar um amontoado de detalhes tão complexos quanto pouco significativos fora do campo da matemática, mesmo que tais áreas sejam, até certo ponto, aplicáveis em outras ciências, nesse sentido, o aluno que deveria ser o foco de todo o processo, torna-se refém do despreparo.

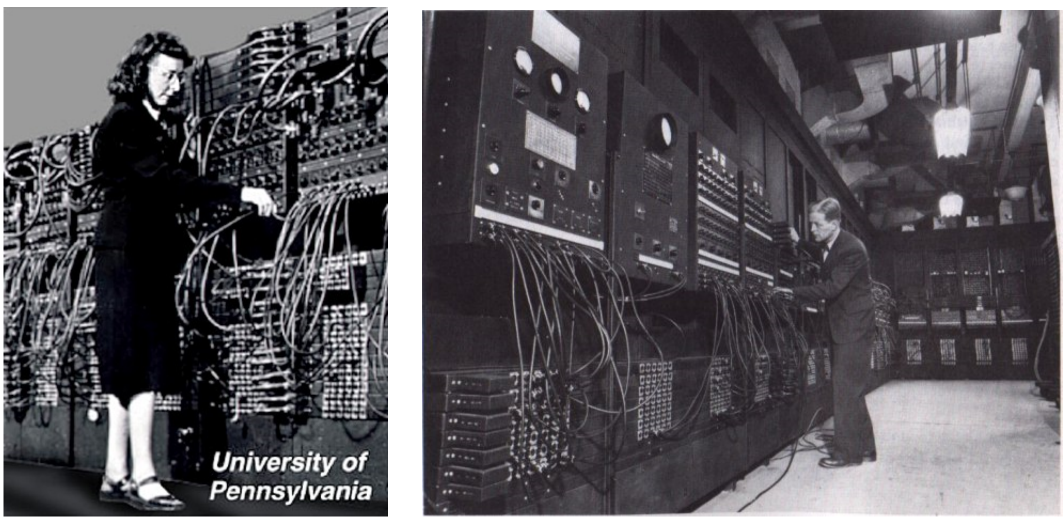
3 COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Neste capítulo serão apresentados brevemente os conceitos que permeiam a área de Computação Gráfica, o contexto histórico da mesma, a relação que a área possui com as interfaces de interação homem-máquina, bem como os dispositivos físicos que são utilizados. Serão também apresentados alguns exemplos das possíveis aplicações, a discussão da relação entre a área e o campo de estudo da Geometria Analítica e, por fim, introduziremos, de forma breve, o software do tipo ray-tracer denominado **POV-Ray**.

3.1 DEFINIÇÃO E APLICAÇÕES

O avanço da computação não se deu por meio apenas do aumento da capacidade de processamento e de armazenamento de dados em memória, se assim o fosse, estaríamos utilizando apenas uma grande e rápida máquina de calcular, ao invés da máquina interativa que nos permite não somente armazenar dados e fazer cálculos, mas interagir com ela e com outros seres humanos por meio dela.

Conforme Kirner e Siscoutto (2007, p. 4), as primeiras interfaces computacionais, usadas nas décadas de 40 e 50 (Figura 13a-13b), eram baseadas em chaves e lâmpadas, que permitiam uma comunicação com o computador baseada em linguagem de máquina.



(a) (b)

Figura 13 – Exemplo de interfaces computacionais da geração 0 (zero), antes do surgimento das interfaces gráficas
Fonte: (KIRNER; SISCOUTTO, 2007)

Na década de 60, surgiram as consoles com vídeo, dando inicio às interfaces gráficas rudimentares. Com a utilização de microprocessadores, nas décadas de 70 e 80, os microcomputadores se popularizaram, usando interface baseada em comando, como o DOS (Figura 14).

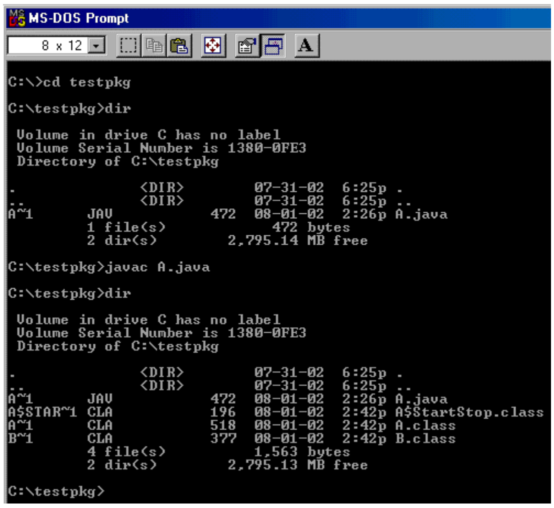


Figura 14 – Exemplo de interfaces computacionais de 1ª geração, baseadas em console de vídeo

A evolução dessa interface resultou no Windows, que, explorando técnicas de multimídia, persiste até hoje (Figura 15). Apesar de interessante e de ter bom potencial de uso, a interface Windows fica restrita à limitação da tela do monitor e ao uso de representações como menus e ícones.

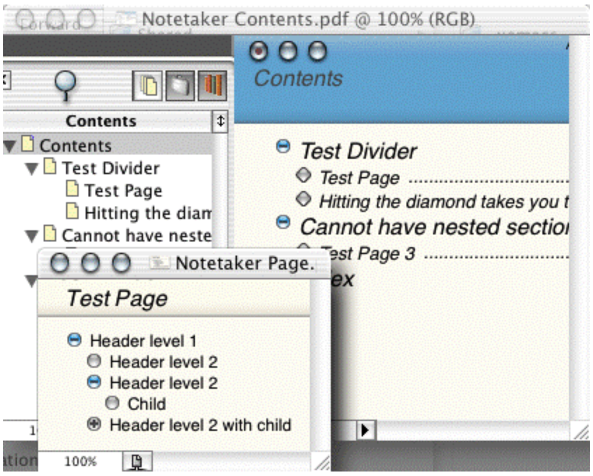


Figura 15 – Exemplo de interfaces computacionais de 2ª geração, baseadas em janelas

De fato, se não fossem as interfaces, físicas e lógicas, de interação com o computador e a evolução destas, talvez a humanidade jamais teria entrado na Era da Informação, já que por décadas as pessoas tiveram que se ajustar às máquinas. O uso destas, então, era limitado apenas a poucas pessoas.

Segundo Schneiderman e Plaisant (2004), “no contexto de interface homem-máquina, interação é a maneira com que o usuário se comunica com a aplicação, podendo esta comunicação ocorrer através de dispositivos ou de forma simbólica”. Dessa forma, podemos afirmar que o grande número de pesquisas que ocorreram e que ainda estão ocorrendo nesta área possibilitaram, de fato, que alcançássemos o patamar de utilização de computadores que temos hoje.

Kelner e Teichrieb (2007, p. 54) afirmam que:

> Nas aplicações que exploram o espaço bidimensional (2D) as técnicas de HCI já estão consolidadas e incluem as comumente encontradas nas interfaces do tipo WIMP – Windows, Icons, Menus and Pointing Device. Através desse tipo de interação os usuários normalmente podem gerenciar os sistemas operacionais, armazenar e gerenciar textos, apresentações, bitmaps, áudios, vídeos, entre outros. A interação via dispositivo de apontamento, ou simplesmente mouse, é bastante explorada na maioria das interfaces projetadas para desktops 2D.

No contexto apresentado podemos observar que a partir do surgimento das interfaces de 1ª geração, a interação visual do homem com o computador se tornou crucial, muitos não conseguem conceber a ideia de computador sem o mesmo estar vinculado a um feedback visual. Isso, de fato, só foi possível graças ao surgimento das pesquisas relacionadas ao que viria ser chamado de Computação Gráfica.

> Computação gráfica fornece métodos para gerar imagens usando um computador. A palavra “imagem” deve ser entendida num sentido mais abstrato aqui. Uma imagem pode representar uma cena realista do mundo real, mas gráficos como histogramas ou gráficos de pizza, bem como a interface gráfica do usuário de uma ferramenta de software também são considerados como imagens (KLAWONN, 2008).

Conforme Shklyar (s.d.), o termo “Computação Gráfica” foi cunhado em 1960 por William Fetter, um designer gráfico da Boing. Ele estava tentando inventar um novo processo, a fim de maximizar a eficiência do layout interior dos cockpits de aviões da Boeing. Seu produto final foi uma visão ortográfica da forma humana gerada no computador (Figura 16). Fetter inventou o termo “computação gráfica” para descrever a sua criação, a partir de uma cadeia de eventos que acabaria por revolucionar o mundo do entretenimento, publicidade e meios de comunicação.

Conforme Gattass (2013), a Computação Gráfica tem acompanhado a evolução dos computadores e também teve um começo restrito e pouco natural para hoje se tornar presente em praticamente todas as nossas atividades. Se observarmos a difusão dos computadores vemos que a Computação Gráfica tem tido um papel decisivo nela. As interfaces gráficas na forma de janelas, botões, menus e dispositivos de seleção, por exemplo, foram muito importantes para a popularização dos computadores pessoais da

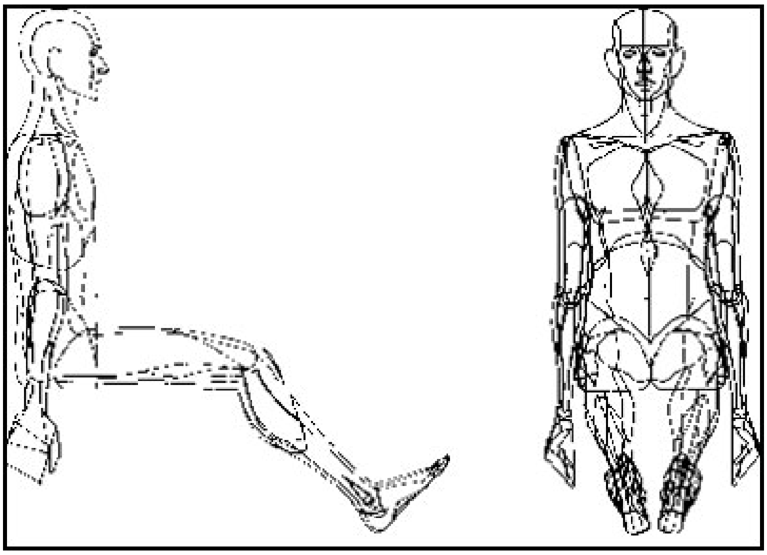


Figura 16 – Computação Gráfica em 1960
Fonte: (SHKLYAR, s.d.)

década de 1980. Atualmente, as câmeras digitais acopladas a computadores portáteis de mão e a telefones móveis ainda estão impulsionando novos usos da informática no nosso dia a dia.

De acordo com Gomes e Velho (2003), a Computação Gráfica pode ser dividida em quatro grandes áreas: síntese de imagens (rendering), processamento de imagens, análise de imagens (visão computacional) e modelagem geométrica. Essas áreas foram categorizadas em função da entrada e saída dos seus algoritmos como ilustra a Figura 17.

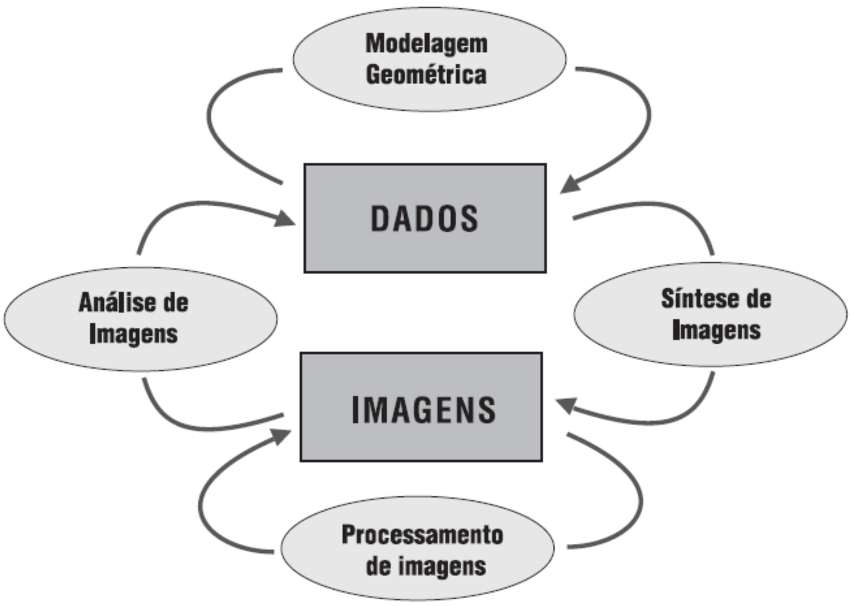


Figura 17 – Divisão clássica das áreas da Computação Gráfica
Fonte: (GOMES; VELHO, 2003).

3.1.1 Síntese de imagens

Os algoritmos de síntese de imagens (*rendering*) produzem imagens digitais a partir de dados e modelos computacionais de objetos, luzes e câmera. De certa forma, são as máquinas fotográficas do mundo virtual, pois é como se tirassem fotos dos objetos que estão lá. A Figura 18 mostra, por exemplo, uma imagem de um escritório renderizado[1] com a utilização do software POV-Ray (GATTASS, 2013).

Figura 18 – “Office”
Fonte: (PIQUERES, 2004).

Segundo Gattass (2013), os algoritmos de síntese de imagens são também fundamentais para sistemas de Realidade Virtual. A Figura 19 ilustra um desses sistemas onde o modelo de uma plataforma marítima está sendo examinado com o auxílio de óculos que permitem que cada um dos olhos receba uma imagem correspondente a sua posição, reproduzindo o efeito de estereoscopia e criando uma sensação de imersão no mundo virtual.

3.1.2 Processamento de imagens

> A área de Processamento de Imagens em geral abrange operações que são realizadas sobre imagens e que resultam em imagens. [...] Os programas de arquitetura, design e simulação gráfica, tais como as utilizadas em filmes com animação por computador abrangem as áreas

[1] É o processo pelo qual pode-se obter o produto final de um processamento digital qualquer.

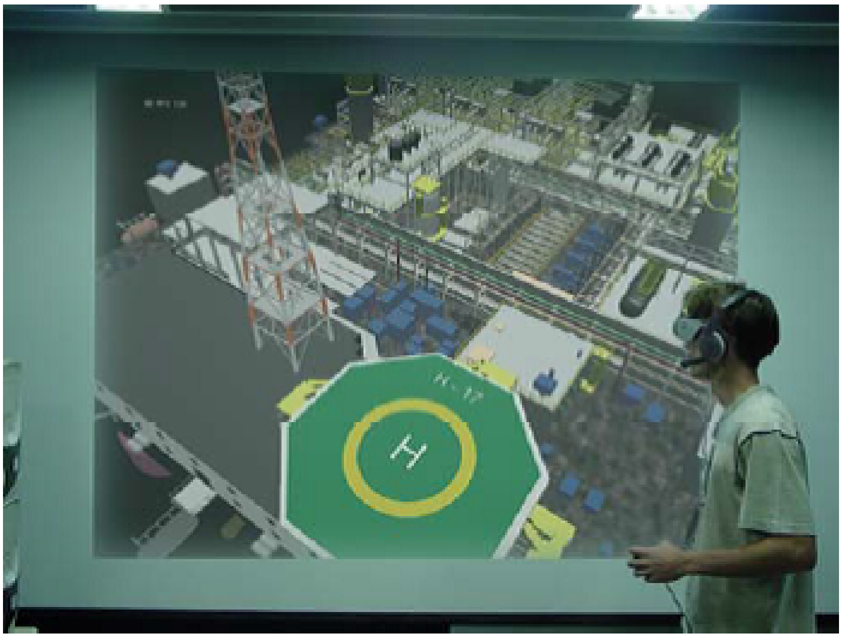


Figura 19 – Síntese de imagens
Fonte: (GATTASS, 2013).

de Modelagem e Visualização. Programas comerciais que representam muito bem esta área são o AutoCad e o Studio 3D, ambos da AutoDesk, e o Corel Draw da Corel (SCURI, 2002).

Os algoritmos de processamento de imagens modificam uma imagem para melhorar sua qualidade, eliminando ruídos e realçando características que facilitem o seu entendimento. Esses algoritmos não mudam a natureza dos dados, ou seja, eles processam imagens de entrada e geram imagens de saída. A Figura 20 ilustra um tipo de processamento de imagem denominado filtragem, na esquerda podemos ver a imagem original e à direita a imagem com o filtro aplicado. (Gattass, 2013)

Figura 20 – Filtragem de imagem
Fonte: (RITTNER, 2011)

3.1.3 Análise de Imagens

A área de Análise de Imagens abrange a área de Visão Computacional e visa processar imagens visando obter informações sobre objetos presentes nela. Ou seja, interpretam o que está na imagem extraindo dela informações não puramente visuais. A Figura 21 ilustra, por exemplo, um algoritmo de OCR (optical character recognition) capaz de “ler” o número de uma placa de automóvel a partir de uma imagem dela (GATTASS, 2013).

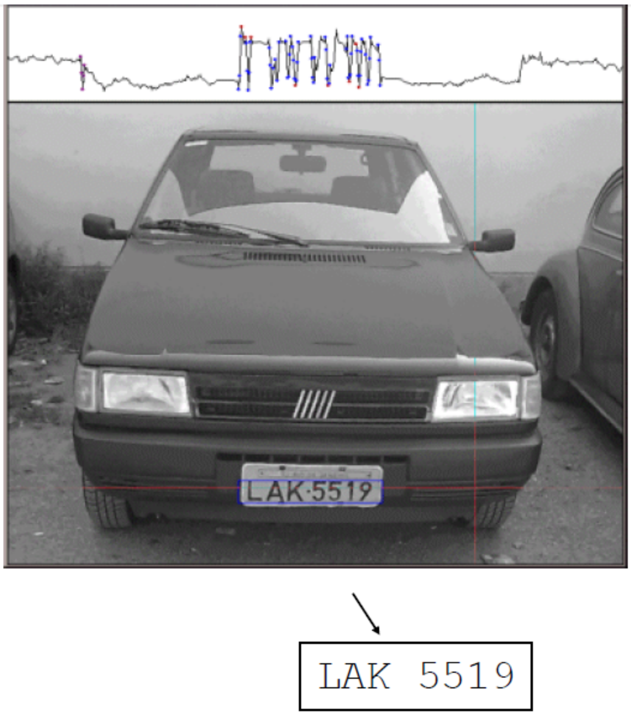


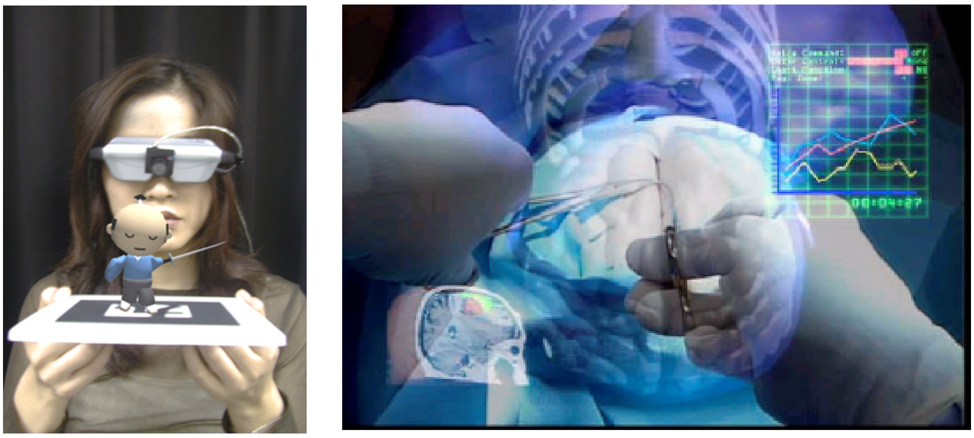
Figura 21 – Análise de Imagem para o reconhecimento de placas de automóveis
Fonte: (GATTASS, 2013).

3.1.4 Realidade Virtual e Aumentada

As aplicações mais recentes da Computação Gráfica não se encaixam em apenas uma das classes de algoritmos apresentada acima: síntese, processamento e visão. Os sistemas de realidade aumentada que misturam elementos virtuais em imagens reais são os exemplos mais marcantes desta nova classe de aplicações da Computação Gráfica.

Segundo Kirner e Siscoutto (2007), a Realidade Virtual só ganhou força na década de 90, quando o avanço tecnológico propiciou condições para a execução da computação gráfica interativa em tempo real. E esse mesmo avanço tecnológico propiciou o surgimento da Realidade Aumentada (RA), conhecida como interface de 4ª geração.

A Realidade Aumentada, na última década, vem passando por um processo de crescimento vertiginoso com o auxílio das novas tecnologias que permitem a sobreposição de imagens virtuais geradas por computador sobre cenas do mundo real com grande fidelidade e desempenho e com potencial para muitas aplicações em pesquisa industrial e acadêmica (Figura 22a-22b).



(a) (b)

Figura 22 – Exemplos de aplicações que utilizam as interfaces computacionais de 4ª geração, baseadas em Realidade Aumentada
Fonte: (KIRNER; SISCOUTTO, 2007).

3.1.5 Áreas de Aplicação da Computação Gráfica

Conforme Klawonn (2008), Interfaces Gráficas de Usuário (GUI) podem ser consideradas como aplicações da Computação Gráfica (Figuras 23a-23c), apesar de não desempenharem mais um papel tão importante na área. Hoje existem ferramentas padronizadas para a programação e implementação de interfaces gráficas de usuário, além disso, a ênfase principal das interfaces de usuário é a construção de interfaces de computador amigáveis ao ser humano e não à geração de gráficos complexos.

(a) (b) (c)

Figura 23 – Exemplos de GUI's (Graphical User Interfaces)
(a) Área de Trabalho (Desktop) de um Sistema Operacional; (b) Desktops para dispositivos móveis; (c) Tela de aplicativo para SmartTV.

Na área de publicidade e em certas áreas de âmbito artístico, como o cinema, por exemplo, por vezes, as peças e obras são projetadas usando apenas o computador ou fotos que servem de base e são modificadas com o uso de técnicas de computação gráfica, como mostra a Figura 24 (COVALESKI, 2009).

Figura 24 – Computação Gráfica aplicada ao Cinema

Grandes quantidades de dados são coletados oriundos das empresas, indústrias, economia e ciência. Além da adequação das técnicas de análise de dados, são necessários também métodos para visualização de dados multi-dimensionais (Figura 25). Tais técnicas de visualização chegam muito mais longe do que quaisquer representações simples, tais como os gráficos, que podem ser gerados por planilhas eletrônicas. Visualizações de dados de duas ou três dimensões, representações específicas dos problemas ou animações que mostram aspectos dinâmicos, como o fluxo de corrente ou a mudança de fenômenos meteorológicos pertencem a esta classe de aplicações de computação gráfica (KALBACH, 2009).

Além da construção e representação de gráficos mais abstratos, a geração de imagens realistas e sequências de imagens, não necessariamente do mundo real, são o principal campo de aplicação da computação gráfica, nos dias de hoje, como pôde ser visto na Figura 18.

Outras áreas, que constituíam a força motriz nos primeiros dias da era da computação gráfica, são: CAD (Computer-Aided Design) e CAM (Computer-Aided Manufacturing). Atualmente, não só os produtos industriais, como carros (Figura 26), são projetados no computador, mas também edifícios, jardins ou ambientes artificiais para jogos de computador. Muitas vezes, os objetos reais existentes têm que ser modelados e combinados com objetos hipotéticos, por exemplo, quando um arquiteto quer visualizar como uma possível extensão de uma casa velha irá ficar após a construção. O mesmo se aplica aos simuladores de voo ou direção, onde as paisagens e cidades

Figura 25 – Virtualidade imersiva e interativa baseada em cloud computing
Sistema Multiprojeção para Múltiplas Visões de Dados Coordenadas para suporte a Análise de Grandes Bases de Dados Multidimensionais
Fonte: (XPTA, s.d.).

existentes precisam ser modeladas no computador.

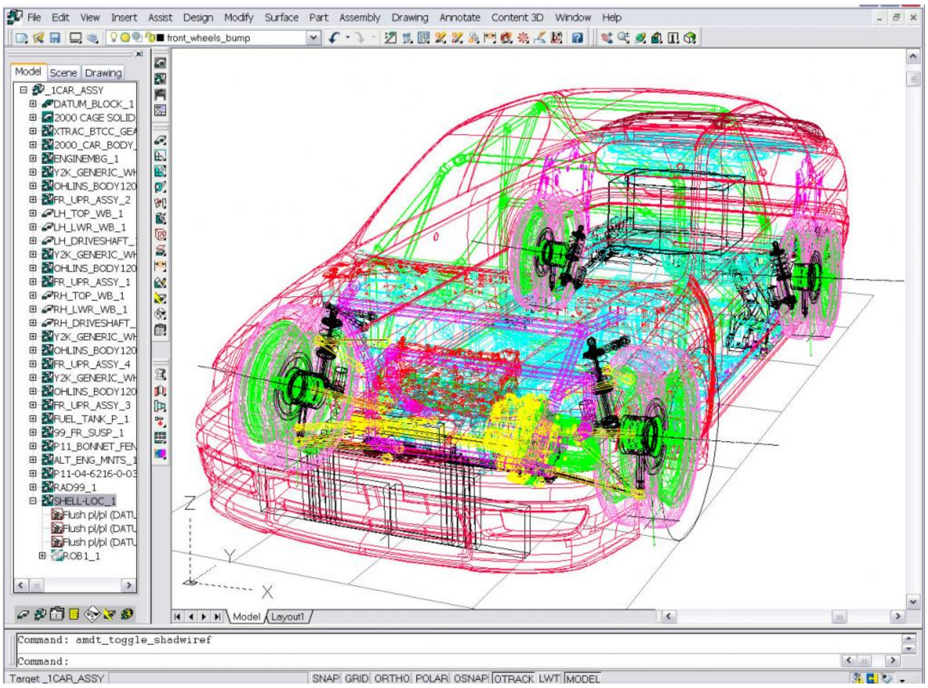
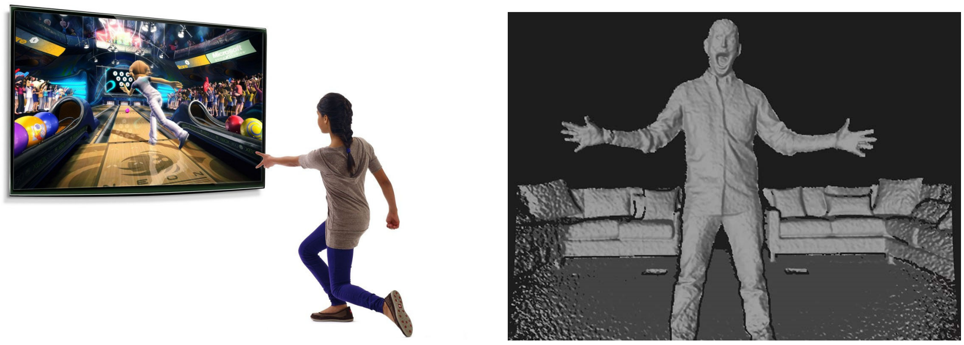


Figura 26 – Projeto de um Carro com Computer Aided Design (CAD)

Assim, não são somente as possibilidades de projetar, modelar e visualizar objetos que desempenham papéis importantes na área de computação gráfica, mas também a geração de modelos realistas e representações de objetos com base em dados medidos ou capturados em tempo assíncrono ou tempo real (Figura 27).



(a) (b)

Figura 27 – Exemplo de modelagem dinâmica em jogos a partir da captura de dados de movimento em tempo real.
(a) Jogo que usa modelagem dinâmica a partir de dados externos em tempo real; (b) Mapa de profundidade do Kinect 2.0 criada a partir de uma nuvem de pontos.

Informática médica é outro campo de aplicação muito importante da computação gráfica onde as medições estão disponíveis sob a forma de imagens de raios-X ou dados de tomografia computadorizada e testes de ultrasom. Tais dados permitem uma visualização em 3D do interior do corpo humano (Figura 28) (LAMY et al., 2005).

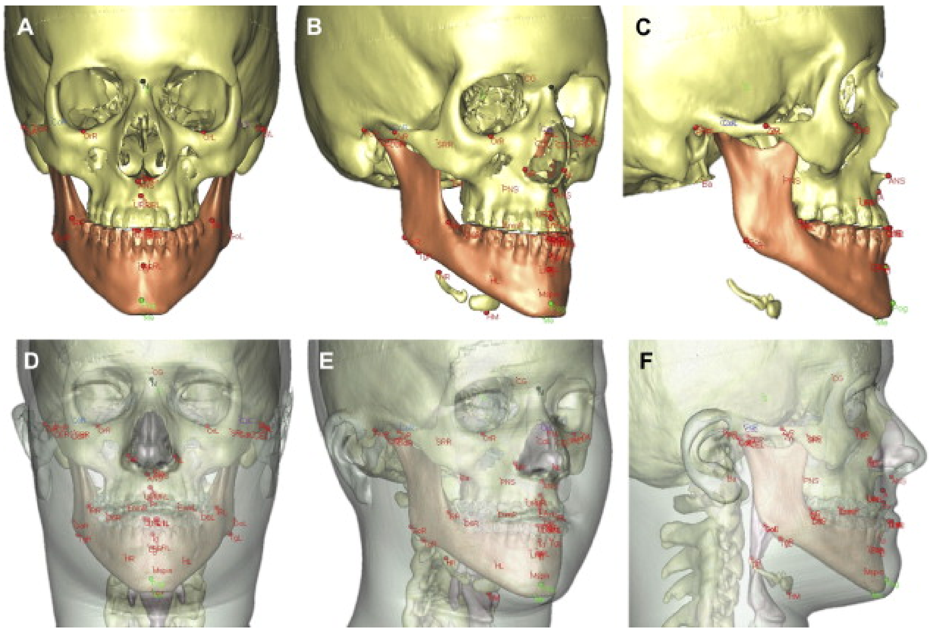


Figura 28 – Interface para Análise Automática de Imagens Médicas.

Outros campos importantes de aplicação da computação gráfica são, como já comentado anteriormente, a realidade virtual, em que o usuário deve ser capaz de se mover e agir de forma mais ou menos livre num mundo virtual tridimensional; e a realidade aumentada, onde o mundo real é enriquecido com informações adicionais sob a forma de textos ou objetos virtuais.

3.2 PRINCÍPIOS BÁSICOS DOS GRÁFICOS BIDIMENSIONAIS E TRIDIMENSIONAIS

Esta seção apresenta de forma breve os princípios que norteiam as tarefas, cálculos e algoritmos vinculados à Computação Gráfica 2D e 3D. Foram utilizadas as obras de Klawonn (2008) e Hughes e Foley (2013) como referências para as seguintes subsessões.

3.2.1 Princípios Básicos dos Gráficos Bidimensionais

Quase todos os dispositivos de saída para gráficos, tais como monitores de computador ou impressoras são orientadas à pixel[2]. Portanto, é fundamental distinguir entre a representação de imagens sobre esses dispositivos e o modelo da própria imagem que geralmente não é orientada à pixel, mas definida como gráficos vetoriais escaláveis (SVG – Scalable Vector Graphics), nesse caso, valores numéricos reais são usados para as coordenadas.

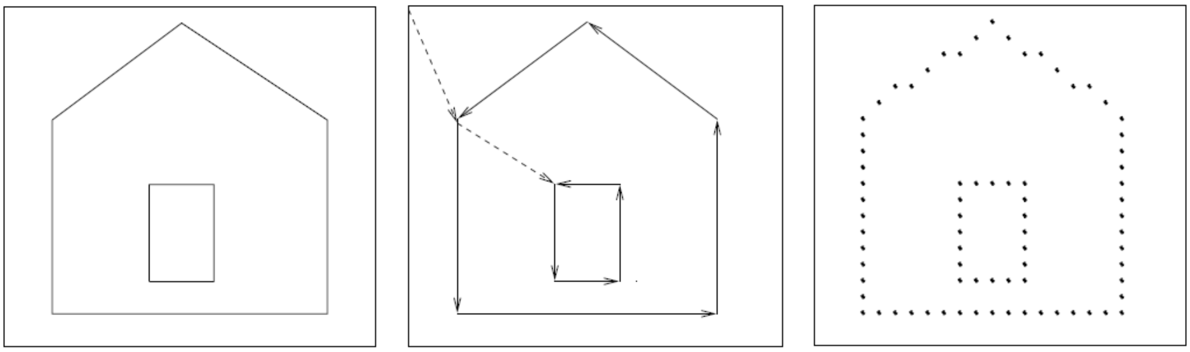
Antes de um objeto poder ser mostrado num monitor de computador ou numa impressora, é necessário um modelo que descreva a geometria desse objeto, a menos que o objeto seja uma imagem. Modelagem de objetos geométricos geralmente é feita no âmbito de gráficos vetoriais ou orientados a vetores. Um objeto mais complexo é modelado como uma combinação de objetos elementares, tais como linhas, retângulos, círculos, elipses ou arcos. Cada um desses objetos elementares pode ser definido com o uso de algumas coordenadas, descrevendo a localização do objeto, além de alguns parâmetros, tal como o raio de um círculo.

Uma descrição muito simples da casa na Figura 29a em termos de vetores é mostrada na Figura 29b. A casa, então, pode ser definida como uma sequência de pontos ou vetores. Também deve-se especificar a sequência de pontos adjacentes que devem ser ligados por uma linha ou não. Nesse caso, as linhas pontilhadas na Figura 29b referem-se a pontos na sequência que não devem ser ligados por linhas.

A descrição de objetos orientados a gráficos vetoriais não é adequada para representação direta em dispositivos puramente orientados à pixel, tais como monitores LCD ou impressoras. De um ponto de vista teórico, seria possível exibir gráficos vetoriais diretamente em monitores CRT manipulando diretamente os raios catódicos ao longo das linhas definidas pela sequencia de pontos e ligando e desligando esses raios. Entretanto, destaca-se a inviabilidade técnica dessa solução, visto que a mesma não se aplica, por exemplo, a monitores LCD ou mesmo a impressoras.

Os monitores de computador, impressoras e também vários formatos de arquivos

[2] É a unidade básica de cor programável em uma imagem gerada por computador.



(a) (b) (c)

Figura 29 – Gráfico orientado à vetores *versus* Gráfico orientado à pixels
(a) Imagem original; (b) gráfico orientado à vetores; (c) gráfico orientado à pixels.

para o armazenamento de imagens tais como bitmaps ou JPEG são baseados em raster[3] ou em gráficos orientados a raster. Gráficos do tipo raster utilizam uma matriz de pixels de tamanho fixo. Uma cor pode ser atribuída a cada pixel do raster. No caso mais simples, considerando uma imagem do tipo preto-e-branco, um pixel pode assumir um dos dois valores: preto ou branco.

A fim de que se possa exibir gráficos orientados a vetores em forma de gráficos raster, todas as formas geométricas devem ser convertidas em pixels. Esse procedimento é chamado de rasterização/digitalização ou *scan conversion*. Entretanto, isso pode levar a altos esforços computacionais, por exemplo, um monitor padrão tem mais de um milhão de pixels e para cada um desses pixels, deve ser decidido qual a cor que deve ser atribuída. Além disso, efeitos indesejáveis tal como serrilhamento (Figura 35) podem ocorrer sob a forma de bordas irregulares.

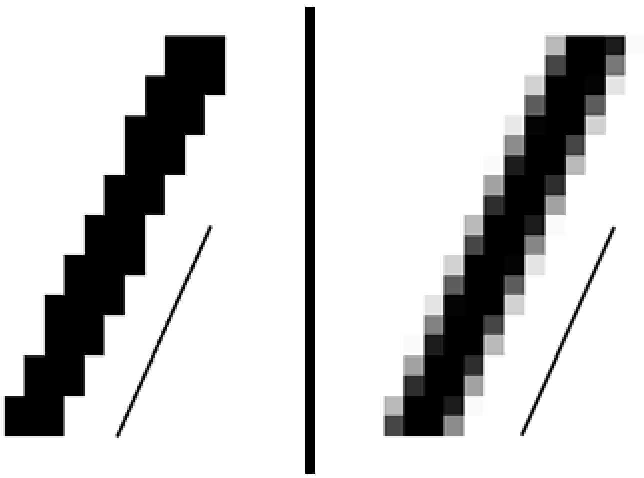
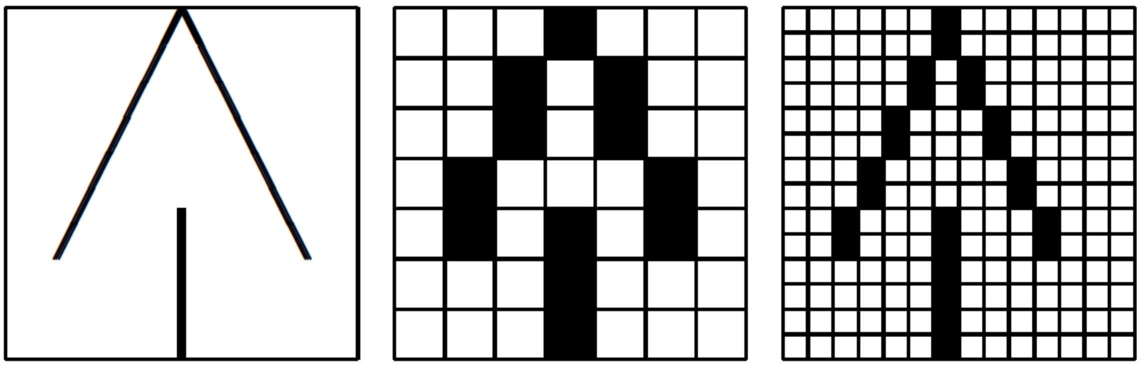


Figura 30 – Aliasing Effect *versus* Antialising

3 São imagens digitais criadas ou capturadas (por exemplo, pelo escaneamento de uma foto) como um conjunto de amostras de um espaço dado. Um raster é um grid de coordenadas x e y no espaço de tela.

O termo aliasing effect (efeito de serrilhamento) é originário do campo de processamento de sinais e refere-se aos artefatos indesejados que podem aparecer, quando uma taxa de amostragem discreta é usada para medir um sinal contínuo. Uma imagem na escala de cinza pode ser vista como um sinal bidimensional. Nesse sentido, uma imagem colorida com base nas três cores: vermelho, verde e azul não é nada mais do que a representação de três sinais bidimensionais, um sinal para cada cor.

Mesmo que uma imagem seja exibida em termos de gráficos orientados a raster, existem vantagens na modelagem e armazenamento desta no formato orientado a vetores. Gráficos do tipo raster estão vinculados a resoluções específicas. Uma vez que a resolução é fixada, a informação completa contida na imagem orientada a vetor não pode mais ser recuperada. Isso acarreta em sérias desvantagens, visto que quando a imagem é exibida em um dispositivo com uma resolução diferente ou quando a imagem precisa ser ampliada ou reduzida, não há informação suficiente para a sua fiel representação. A Figura 31a mostra a ponta de uma flecha e sua representação na forma de gráficos do tipo raster para duas resoluções diferentes. Se apenas a imagem de pixels mais grossos é armazenada (Figura 31b), é impossível reconstruir a imagem de pixels com o ajuste mais fino (Figura 31c), já que não existem informações adicionais.



(a) (b) (c)

Figura 31 – Ponta de flecha desenhada como raster em duas resoluções diferentes. (a) Imagem original; (b) Resolução menor; (c) Resolução maior.

3.2.2 Princípios Básicos dos Gráficos Tridimensionais

Em relação às representações tridimensionais de objetos que podem ser efetuadas na tela de um computador, antes que qualquer coisa possa ser desenhada, um mundo virtual tridimensional de objetos deve ser definido e armazenado no computador. O mesmo princípio aplica-se a mundos virtuais em duas dimensões. Nesse caso, estamos falando de objetos geométricos, como retângulos, círculos ou polígonos que devem ser especificados antes que possam ser desenhados.

O mundo virtual tridimensional pode conter muito mais do que o que irá ser apresentado num dado momento na tela do computador. Um mundo virtual pode consistir de um único prédio ou até mesmo uma cidade inteira, ou talvez uma paisagem bem maior, tal como um planeta inteiro, mas o espectador verá apenas uma pequena parte deste mundo virtual. É claro que o espectador pode se movimentar no mundo virtual e explorá-lo, mas nos exemplos acima, ele nunca vai ver todo o mundo virtual numa única imagem, assim como acontece no universo tridimensional real.

Para que ocorra a representação final de um determinado objeto tridimensional na tela do computador, o primeiro passo consiste em modelar o objeto. A descrição de um objeto tridimensional deve conter não somente informações sobre sua geometria, mas também as propriedades da sua superfície, por exemplo: a cor do objeto; tipo de brilho da superfície; etc. Existem duas abordagens diferentes para modelar a geometria dos objetos.

Em muitas aplicações de computação gráfica, os objetos não têm contrapartidas existentes na realidade. Esse é o caso de mundos de fantasia em jogos de computador, modelos de carros-conceito ou projetos de construções arquitetônicas que podem ou não ser construídas no futuro. Nesses casos, o designer ou programador do mundo virtual necessita de métodos para a construção e modelagem dos objetos virtuais tridimensionais. Mesmo objetos existentes devem ser modelados, nesse caso, tais técnicas de construção e modelagem podem ser necessárias.

Para prédios ou mobília existentes algumas medidas principais como a altura ou a largura podem estar disponíveis. Entretanto, tais informações nem de longe são suficientes para gerar uma representação realista dos objetos. Os objetos podem, por exemplo, ter cantos arredondados. Em alguns casos, as medições detalhadas da estrutura geométrica de objetos podem estar disponíveis.

O primeiro passo na computação gráfica é, por conseguinte, a criação de um modelo digital do mundo virtual, seja manualmente por um designer ou por um programador, ou automaticamente a partir de dados oriundos de medições, como nuvens de pontos. Para representar uma parte específica deste mundo virtual, a posição do espectador e direção da visão no mundo virtual também devem ser definidos. Isso inclui seu campo de visão, o ângulo de visão e a distância que o expectador pode enxergar. Dessa forma, uma região de corte tridimensional é definida de modo que somente os objetos dentro da região precisam ser considerados para renderização.

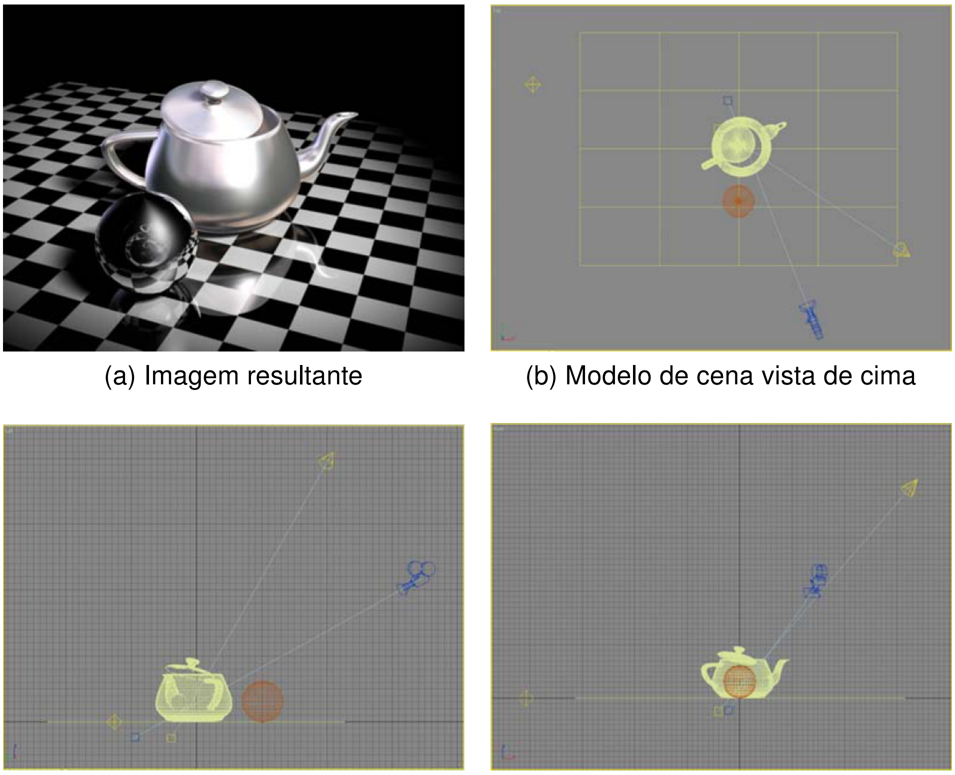
Uma vez que se tenha definido tudo isso, teremos objetos tridimensionais renderizados na tela, entretanto, tudo aparecerá preto, já que nenhuma luz foi adicionada ao mundo virtual. As fontes de luz, os seus locais, bem como as suas características devem ser definidas também. As características das luzes são, por exemplo, a cor da luz ou se a luz brilha em uma única direção como um refletor.

Somente com essas informações é possível calcular a quantidade de luz que um determinado objeto recebe, ou se esse objeto está na sombra ou exposto diretamente à luz brilhante.

Além disso, tem-se que determinar quais objetos são visíveis e quais estão escondidos dentro da região de corte. Isso se constitui como outro problema. E, então, ao fim do processo principal de construção de uma cena tridimensional os efeitos especiais que podem ser necessários na cena são adicionados, tais como: névoa, fumaça ou reflexos.

3.3 A GEOMETRIA ANALÍTICA E SUAS RELAÇÃO COM A COMPUTAÇÃO GRÁFICA

Conforme Gattass (2013), na Computação Gráfica os objetos possuem, além dos atributos de cor e textura, uma forma geométrica, uma posição e, possivelmente, um movimento. Considere, por exemplo, uma cena simples como a mostrada na Figura 32. Além da descrição das luzes e da câmera, precisamos descrever geometricamente o bule e a bola.



(a) Imagem resultante

(b) Modelo de cena vista de cima

(c) Modelo de cena vista de frente

(d) Modelo de cena vista de lado

Figura 32 – Síntese de uma cena simples.

Na descrição dessa cena para Sistemas Gráficos como o OpenGL[4], é natural termos a forma dos objetos, como o bule, definida por uma malha de triângulos ou quadriláteros que compõe sua fronteira. Essa forma de representar matematicamente um objeto pela sua superfície externa é dita representação de fronteira (*boundary representation*) e é muito comum na Computação Gráfica porque normalmente as imagens que enxergamos são reflexões de luzes nessas superfícies. As placas gráficas atuais são baseadas no algoritmo de ZBuffer[5], que projeta cada um dos triângulos das malhas que aproximam essas superfícies e altera os valores dos pixels interceptados (GATTASS, 2013).

Outro problema comum da Computação Gráfica está ilustrado na Figura 33. Um dos passos básicos do algoritmo de Traçado de Raios é o cálculo da interseção do raio com os objetos da cena. Após determinar o ponto de interseção com o objeto mais próximo, o algoritmo prossegue com o cálculo da cor daquele ponto, que envolve a medição de ângulos entre as fontes de luz e a normal à superfície. Essas e outras operações geométricas são baseadas na Álgebra Linear, na Geometria Analítica e no Cálculo Vetorial (GATTASS, 2013).

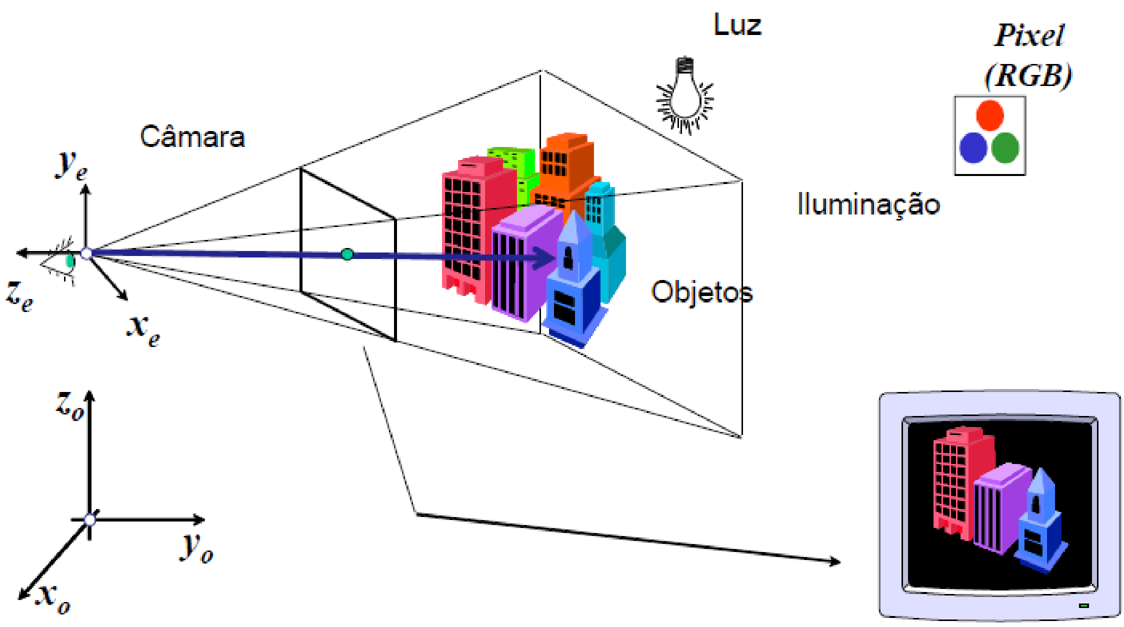


Figura 33 – O Algoritmo de Traçado de Raios

As relações da Geometria Analítica com a Computação Gráfica são muito amplas, um detalhamento das conexões à luz dos PCN's será apresentado no capítulo

4 OpenGL é uma interface de software para dispositivos de hardware. É também uma biblioteca gráfica de modelagem e exibição tridimensional, bastante rápida e portável para vários sistemas operacionais.

5 É um algoritmo para determinação de uma superfície visível por meio de um buffer de profundidade, é considerado um dos métodos mais simples e, com certeza, o mais amplamente utilizado para essa tarefa.

que aborda os resultados deste trabalho. A seguir apresentaremos algumas utilizações da Geometria Analítica nos processos da Computação Gráfica.

3.3.1 Rasterização

Os gráficos vetoriais são apenas números manipulados pelo computador. Para visualizar os gráficos vetoriais, esses devem ser desenhados numa matriz de pixels. Essa conversão é chamada de *rasterização* e é relativamente simples quando comparada com a tarefa inversa denominada *vetorização*. A tarefa de rasterização é necessária para todos os dispositivos de saída, tais como monitores, projetores, impressoras, plotters, etc. Eficiência computacional é, portanto, um objetivo importante nesta tarefa (HUGHES; FOLEY, 2013).

3.3.1.1 Reta

Seguiremos nesta subsessão a abordagem dada por Klawonn (2008) para o desenho de uma linha que liga os pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) numa matriz de pixels. Embora possa parecer uma tarefa muito simples, quando abordada de forma ingênua, pode levar a algoritmos ineficientes ou mesmo resultados inaceitáveis.

Para exemplificar, por razões de simplicidade, vamos assumir que os dois pontos a serem ligados por uma linha sempre caem dentro da matriz de pixels considerada. Isso significa que suas coordenadas são dadas por valores inteiros. E sem perda de generalidade, vamos presumir que o primeiro ponto nunca estará localizado à direita do segundo ponto. Isso significa que $x_0 \leq x_1$.

Uma abordagem ingênua para o desenho de uma linha numa matriz de pixels pode ser executada como segue:

- incrementalmente "andamos" através das coordenadas x partindo de x_0 e terminando em x_1, a cada coordenada x calculamos o valor y correspondente.
- se o valor y não for um valor inteiro, então este deve ser arredondado para o valor inteiro mais próximo, a fim de desenhar o pixel mais próximo na matriz de pixels com os valores de x e y arredondados.

Podemos descrever essa estratégia em pseudocódigo, como mostrado abaixo:

```
void drawLine(int x0, int y0, int x1, int y1)
{
    int x;
    double dy = y1 - y0;
    double dx = x1 - x0;
    double m = dy/dx;
    double y = y0;
    for (x = x0; x <= x1; x++){
        drawPixel(x, round(y));
        y = y + m; //or: y = y0 + m*(x - x0);
    }
}
```

Pseudocódigo para um algoritmo ingênuo de desenho de linha em uma matriz de pixels.

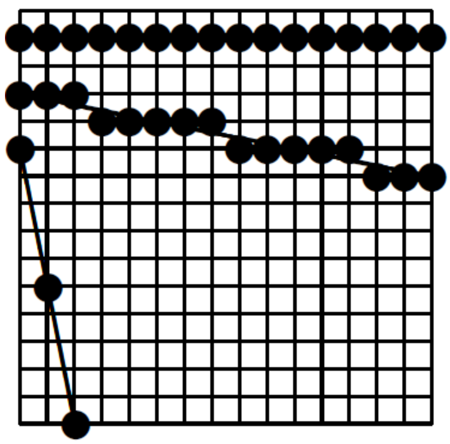


Figura 34 – Linhas resultantes da execução do algoritmo ingênuo para desenho de linhas

Em primeiro lugar, deve-se notar que esse algoritmo irá falhar no caso do desenho de uma linha vertical, onde $x_0 = x_1$, o que conduz a uma divisão por zero quando a inclinação m da linha é calculada. É claro que, esse caso especial pode facilmente ser tratado separadamente. Entretanto, mesmo que o algoritmo não tenha mais problemas com divisão por zero ainda falhará ao desenhar linhas aceitáveis, como pode ser visto na Figura 34.

A linha horizontal superior está adequada em termos de gráficos do tipo raster, assim como a linha abaixo com uma inclinação ligeiramente negativa, porém, a linha na parte inferior esquerda com a inclinação altamente negativa não é desenhada corretamente, mesmo em termos da discretização, necessária para gráficos do tipo raster.

Um número grande de pixels necessários para a correta representação da linha na matriz de pixels está faltando. O problema é causado pelo fato de que o valor de incremento considerado para os valores de x é 01 (um), mas devido à grande inclinação absoluta da linha, os valores y correspondentes alteram-se por mais do que um. Isso leva às lacunas na representação da linha, uma vez que os incrementos, ou saltos, entre os valores de y são maiores do que um. O mesmo efeito ocorrerá em todas as linhas, com um declive absoluto maior do que um. Quanto maior o declive da linha, maiores serão os intervalos na representação dos pixels. Esse e outros problemas podem ser causados quando da utilização de algoritmos ingênuos.

Como já foi dito, desenhar uma linha numa matriz de pixels é uma tarefa árdua e dentro da computação gráfica tal tarefa tem de ser executada diversas vezes até mesmo para uma única imagem. Portanto, algoritmos eficientes de desenho de linha são necessários para acelerar o desenho de imagens.

Com esse intuito em mente é que vários pesquisadores constroem algoritmos mais eficientes para a realização das tarefas comumente realizadas dentro da Computação Gráfica. Um dos algoritmos mais conhecidos para a reduzir o esforço computacional para se desenhar uma reta, bem como reduzir erros de arredondamento e operações com ponto flutuante, e que se estende para outros tipos de curvas planas, é o famoso algoritmo de Bresenham.

O algoritmo ingênuo, também conhecido como algoritmo incremental básico, apresenta vários inconvenientes, tanto quanto a precisão, como no referente ao tipo de aritmética empregada, o que é muito importante para o desempenho do processo de rasterização. Com efeito, uma operação entre operandos inteiros é mais rápida do que a correspondente operação entre operandos em ponto flutuante. O algoritmo de Bresenham realiza a rasterização de segmentos de reta empregando apenas operações de aritmética de inteiros e, portanto, permite um maior desempenho. Salienta-se que o algoritmo baseia-se no critério do ponto médio, por isso, o mesmo também é conhecido como algoritmo do ponto médio. Mostramos abaixo um pseudo-código para o algoritmo de Bresenham para desenho de linha (LOPES, 2004).

```
void plotLine(int x0, int y0, int x1, int y1)
{
        int dx = abs(x1-x0), sx = x0<x1 ? 1 : -1;
        int dy = -abs(y1-y0), sy = y0<y1 ? 1 : -1;
        int err = dx+dy, e2; /* error value e_xy */
        for(;;){ /* loop */
                setPixel(x0,y0);
                if (x0==x1 && y0==y1)
                        break;
                e2 = 2*err;
                if (e2 >= dy){
                        err += dy; x0 += sx;
                } /* e_xy+e_x > 0 */
                if (e2 <= dx) {
                        err += dx; y0 += sy;
                } /* e_xy+e_y < 0 */
        }
}
```

Um exemplo simples do algoritmo de Bresenham para o desenho de uma linha.

3.4 ALGORITMO DE RAY-TRACING E O POV-RAY

Ray-tracing ou Traçado de raios é um método para gerar imagens digitais ao simular o caminho da luz que passa através dos pixels da imagem de saída, simulando a forma como os fótons viajam pelo espaço no mundo real. Essa técnica poderosa é capaz de gerar imagens com um elevado grau de foto-realismo, embora venha a requerer um esforço computacional muito intenso. Com essa característica em mente, ray-tracing é majoritariamente utilizado para renderizar imagens quando a renderização off-line é possível e está disponível, como acontece nas indústrias de TV ou do cinema. Desacreditado pelos seus tempos altíssimos de renderização, o método de ray-tracing não era sequer considerado para aplicações de renderização em tempo real até recentemente (MUUSS, 1995; PARKER et al., 2005; DIETRICH; SLUSALLEK, 2007).

O POV-Ray (Persistence of Vision Raytracer) é um programa de ray-tracing de código aberto (open source) que surgiu como um hobby de David Buck em seus trabalhos com ray-tracing (BUCK, 2001 apud CABECINHAS, 2010). Com uma vasta biblioteca de objetos, cores, texturas e muitos efeitos especiais e de renderização disponíveis, o software POV-Ray é um dos ray-tracers mais utilizados em todo o mundo, e possui uma comunidade muito grande onde os usuários podem buscar ajuda. O IDE

[6] incluído na sua distribuição tem muitos recursos, além de uma boa documentação que ajuda qualquer pessoa a utilizar os benefícios do software (CABECINHAS, 2010).

A Linguagem de Descrição de Cena do POV-Ray (SDL) é uma linguagem que permite que um programador descreva o mundo de uma forma eficiente e legível. SDL é uma linguagem muito básica com suporte para alguns mecanismos de abstração (por exemplo, macros e funções). É principalmente uma linguagem declarativa, o que significa que a maior parte dos objetos são definidos de uma só vez na execução do programa e não são modificados posteriormente. Embora declarativa, a linguagem SDL do POV-Ray tem algumas facilidades para a iteração e variáveis dinâmicas, por exemplo, para a colocação de colunas de um edifício numa linha ou círculo de forma programática, ao invés de definir manualmente cada coluna necessária, altera-se a quantidade de colunas (CABECINHAS, 2010).

Cada cena no POV-Ray precisa de uma câmera e, pelo menos, uma fonte de luz. Depois da colocação desses dois objetos na cena, o programador pode usar quaisquer primitivas que estão disponíveis no POV-Ray ou em qualquer biblioteca importada para o software. Vários objetos finitos primitivos e objetos infinitos estão disponíveis fora do ambiente, por conta de serem mais complexos, por exemplo, iso-superfícies e objetos combinados. Apesar do poder conferido ao programador pela SDL, a maioria dos modelos complexos (por exemplo, personagens realistas ou complexos objetos feitos pelo homem) numa cena, geralmente, são modelados usando ferramentas de alto nível fora do ambiente do POV-Ray e e depois são exportados desses outros ambientes para um formato que o POV-Ray possa usar (CABECINHAS, 2010).

```
//______________________________________________________________________
#version 3.7;
global_settings{ assumed_gamma 1.0 }
#default{ finish{ ambient 0.5 diffuse 0.9 }}
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"
#include "glass.inc"
#include "metals.inc"
#include "golds.inc"
#include "stones.inc"
#include "woods.inc"
#include "shapes.inc"
#include "shapes2.inc"
#include "functions.inc"
#include "math.inc"
#include "transforms.inc"

#declare textura_madeira_escura = Rosewood
#declare textura_madeira_clara = Sandalwood

plane{<0,0,1>,0.5 hollow
  texture{ pigment{ bozo turbulence 1
    color_map { [0.00 rgb <0.25, 0.35, 1.0>*0.7]
```

[6] Interative Development Environment

```
                [0.50 rgb <0.25, 0.35, 1.0>*0.7]
                [0.70 rgb <1,1,1>]
                [0.85 rgb <0.25,0.25,0.25>]
                [1.0 rgb <0.5,0.5,0.5>]}
    scale<1,1,2.5>*2.5  translate< 0,0,0>
         }
  finish {ambient 1 diffuse 0.5} }
       scale 10000}

#declare Camera_1 = camera {angle 14
       sky z
       right    -x*image_width/image_height
       location  <20.0,-20.0, 12.0 >
       look_at   <0.0 , 0 , 1.2> }
camera{Camera_1}

light_source{<2500,-3500, 2500> color White}

plane{ <0,0,1>, 0
       texture{ pigment{ checker color rgb<1,1,1> color rgb<0.6,0.5,0.7>}
  finish { phong 0.1}
       }
     }

cylinder { <0,0,0>,<0,0,1>,0.1
    texture{ textura_madeira_escura }
    scale <1,1,1> rotate<0,0,0> translate<0,0,0>
  }

cylinder { <0,0,0>,<0,0,1>,0.1
    texture{ textura_madeira_escura }
    scale <1,1,1> rotate<0,0,0> translate<1,0,0>
  }

cylinder { <0,0,0>,<0,0,1>,0.1
    texture{ textura_madeira_escura }
    scale <1,1,1> rotate<0,0,0> translate<1,1,0>
  }

cylinder { <0,0,0>,<0,0,1>,0.1
    texture{ textura_madeira_escura }
    scale <1,1,1> rotate<0,0,0> translate<0,1,0>
  }

box { <0.00, 0.00, 0.00>,< 1.3, 1.3, 0.10>
      texture{ textura_madeira_clara }
      scale<1,1,1>  rotate<0,0,0>  translate<-0.15,-0.15,1>
    }


box { <0.00, 0.00, 0.00>,< 0.15, 0.1, 1.5>
      texture{ textura_madeira_escura }
      scale<1,1,1>  rotate<0,0,0>  translate<-0.15,1,1>
    }

box { <0.00, 0.00, 0.00>,< 0.15, 0.1, 1.5>
      texture{ textura_madeira_clara }
      scale<1,1,1>  rotate<0,0,0>  translate<0.20,1,1>
    }
```

```
box { <0.00, 0.00, 0.00>,< 0.15, 0.1, 1.5>
      texture{ textura_madeira_clara }
      scale<1,1,1>  rotate<0,0,0>  translate<0.55,1,1>
    }

box { <0.00, 0.00, 0.00>,< 0.15, 0.1, 1.5>
      texture{ textura_madeira_escura }
      scale<1,1,1>  rotate<0,0,0>  translate<0.9,1,1>
    }

box { <0.00, 0.00, 0.00>,< 1.3, 0.1, 0.1>
      texture{ textura_madeira_escura }
      scale<1,1,1>  rotate<0,0,0>  translate<-0.2,1,2.5>
    }
```

Exemplos de código do POV-Ray

Figura 35 – “Cadeira” produzida por meio do código acima no POV-Ray

Fonte: o próprio autor.

POV-Ray é um ray-tracer muito bom com uma comunidade muito solícita construída em torno dele. Ele é capaz de gerar renderizações foto-realistas de alta qualidade com pequenos scripts devido aos objetos de alta qualidade e grande biblioteca de texturas. A linguagem em si é declarativa, embora possua algum suporte para programação imperativa que está presente sob a forma de macros. É relativamente fácil para alguém com alguma experiência em programação começar a modelar objetos parametrizados programaticamente (CABECINHAS, 2010).

Vale ressaltar que esta sessão não pretendeu ser um tutorial de POV-Ray ou de SDL, apenas mostrar, de forma breve, a capacidade dessas duas ferramentas. Para tutoriais, documentação, e materiais de referência indicamos o próprio site do POV-Ray (http://www.povray.org/).

4 TRABALHOS CORRELATOS

Neste capítulo são descritos os principais trabalhos relacionados ao tema desta pesquisa. Ao final, um discussão é realizada com vistas a evidenciar a contribuição desta dissertação ao tema pesquisado.

4.1 COMPUTER GRAPHICS AS AN AID TO TEACHING GEOMETRIC TRANSFORMATIONS

Neste trabalho McAdams e DeKock (1976) apresentam um relato de experiência referente a uma pesquisa desenvolvida na Universidade de Missouri-Rolla, nos Estados Unidos da América, em 1976.

Eles iniciam o relato abordando os problemas da época relacionados ao que deveria ser ensinado na matemática do ensino médio, de um modo geral, e na geometria no ensino médio, em particular. Colocam que o ensino de transformações geométricas era importante, visto que as transformações são um fator de unificação em álgebra e geometria. E relatam sobre os problemas que estavam relacionados aos métodos de ensino que por vezes não possibilitavam ao estudante um nível de compreensão satisfatório, seja por falta de maturidade do mesmo ou pelo nível de abstração daquilo que estava sendo ensinado.

São apresentados, então, um conjunto de atividades que foram trabalhadas com os estudantes envolvendo oito transformações geométricas: identidade; rotação de 90^o para a esquerda sobre a origem; rotação de 180^o; rotação de 270^o; reflexo no eixo-x; reflexo no eixo-y; a reflexão na linha x = y; e reflexo na linha x = -y.

Segundo os autores, tal abordagem teria a vantagem adicional de reforçar as habilidades de multiplicação de matrizes e plotagem no plano cartesiano. No entanto, foi notado que no processo de se fazer todas as atividades de multiplicação e plotagem, os alunos, por vezes, podiam perder de vista o que eles deveriam estar aprendendo. Mesmo assim, a fim de observar o que acontece com uma figura sob uma transformação, um aluno seria obrigado a:

1. plotar os pontos para a figura original;
2. calcular os novos pontos por meio de multiplicação de matrizes;
3. traçar o novo conjunto de pontos.

Como todo o processo de multiplicação de matrizes é muito demorado, foi pensado pelos autores a utilização de um software adequado à aula de geometria sobre o assunto em questão: rotações e reflexões. O software foi desenvolvido na própria universidade. A programação foi feita na linguagem BASIC num minicomputador de 16 bits chamado "Data General NOVA 840" com um terminal gráfico "Tektronix 4010" e uma impressora "Centronics 100". O software foi projetado para ser usado por estudantes do ensino médio por meio da escola de aplicação da pós-graduação.

A metodologia de aplicação proposta consistia na aplicação de materiais escritos juntamente com o software em quatro níveis e, após seções de estudos e atividades com o software, os estudantes respondiam um questionário de 10 perguntas geradas aleatoriamente por meio de um banco de itens e caso não atingissem a nota de corte de 80%, eram convidados a revisar o material e repetir o processo, até que pudessem passar para o próximo nível.

O estudo indicou que, embora o software e o método não tenham sido testados numa sala de aula regular, os mesmos se mostraram eficazes para apresentar o tema de transformações geométricas e algumas impressões dadas pelos estudantes foram:

- "foi uma boa maneira de aprender";
- "aprendi duas vezes mais rápido";
- "foi bom conhecer sobre rotações e reflexões";
- "aprendi a combinar transformações";
- "foi difícil obter um resultado perfeito";
- "não gostei de ter de refazer todo o questionário depois de não acertar apenas uma pergunta";
- "foi divertido pelo fato de possibilitar fazer as próprias figuras".

4.2 3D COMPUTER GRAPHICS AND ANALYTIC GEOMETRY IN MATHEMATICS EDUCATION IN GRAMMAR SCHOOLS

Nesta pesquisa, Filler e Rieper (2004) discutem propostas para a utilização do potencial da computação gráfica na educação matemática. Eles começam com uma análise dos objetivos e dos problemas relacionados ao ensino de geometria analítica. Descrevem a utilização da Computação Gráfica 3D e o uso do software POV-Ray. E por fim, apresentam os resultados das experiências de aplicação de conceitos de computação gráfica nas aulas de geometria analítica feitas com alunos do ensino médio, da faixa etária de 18 anos.

Os autores, durante o decorrer do trabalho, comentam que a geometria analítica é uma disciplina obrigatória na Alemanha, porém o ensino desse assunto nem de longe é satisfatório, já que os alunos passam a maior parte das aulas de geometria analítica calculando pontos de interseção entre retas, distâncias e ângulos entre retas e planos de uma maneira muito formal, com repetição de algoritmos e sem a formação de nenhuma imagem geométrica vinculada. Como consequência, a maioria dos professores e didáticos da matemática na Alemanha consideram a geometria analítica um tema problemático e pouco atraente dentre os vários temas abordados no ensino de matemática.

Para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de geometria analítica, os autores julgaram pertinente a inclusão de atividades que utilizassem de alguma maneira aspectos visuais e experimentação para o trabalho com uma maior variedade de objetos geométricos, além do conteúdo padrão já lecionado nas escolas. Dessa forma, a inclusão da computação gráfica 3D nas aulas de geometria analítica poderia ajudar a alcançar os objetivos de aprendizagem.

É relatado, então, a experiência feita com a aplicação do software POV-Ray - um programa de computador que requer a descrição de objetos geométricos por suas coordenadas e que permite a produção de gráficos foto-realistas e animações usando parâmetros dependentes do tempo. Um exemplo de cena simples elaborada no POV-Ray pode ser vista na Figura 36.

```
#include "colors.inc" #include "textures.inc"
background {White}
camera { location <0,8,-20>
         angle 12  look_at <0,-0.5,0> }
light_source { < -30,30,0 > color White }
sphere { <-0.3,-0.5,1.5>  0.5
         texture {pigment {color Blue} } }
cone { <1.2,-1,0.5>, 0.5, <1.2,1,0.5>, 0
         texture {pigment {color Red} } }
torus {0.9, 0.15  translate <-0.6,-0.85,-0.6>
         texture {pigment {color Green} } }
cylinder { <0,-1.1,0>, <0,-1,0>, 2   texture { DMFWood6 } }
cylinder { <0,-10,0>, <0,-1,0>, 0.2  texture { Aluminum } }
```

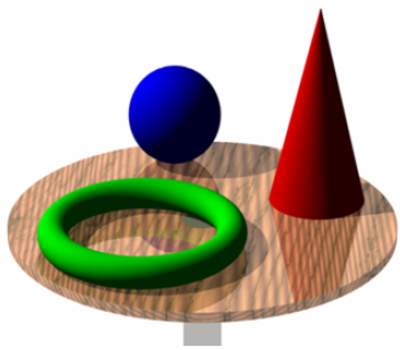


Figura 36 – Cena simples construída com o POV-Ray
Fonte: (FILLER; RIEPER, 2004).

O exemplo acima parece ser simples a primeira vista, porém a tarefa de posicionar as fontes de iluminação, câmera e objetos na cena da forma correta é considerada complexa para iniciantes, pois esses não possuem ainda a percepção de como os objetos se localizam no espaço. Ressalta-se ainda que os autores levaram em conta que o objetivo devia ser concentrado na modelagem dos objetos geométricos, no trabalho com as coordenadas no espaço e nas equações que representam os objetos e não em sutilezas de software, sendo assim foram desenvolvidos modelos pré-definidos com câmeras, fontes de luz, texturas e a possibilidade de visualização do eixo de coordenadas para uma melhor orientação.

Concluiu-se que boa parte dos alunos sentiram-se motivados e desafiados com as atividades que envolviam o POV-Ray. Cenas de vários níveis de complexidade foram construídas pelos alunos, refletindo os talentos matemáticos e artísticos de alguns. Foi notado que a maioria dos alunos construíram as cenas com base nos objetos e/ou situações existentes no mundo real, por exemplo, movimento planetário, bonecos de neve, etc. Apesar de alguns estudantes, especialmente do sexo feminino, não gostarem nem de matemática e nem do trabalho com computadores, o projeto acabou por ser muito divertido e agradável para todos. Foi constatado que os estudantes ganharam a confiança em sua capacidade de aprender com uso de softwares, bem como melhoraram a sua visualização para interpretação de problemas geométricos. Por último, e não menos importante, eles conseguiram compreender a importância da matemática por trás da computação gráfica 3D, que, por sua vez, faz parte da vida deles.

4.3 CREATING COMPUTER GRAPHICS AND ANIMATIONS BASED ON PARAMETRIC EQUATIONS OF LINES AND CURVES – PROPOSALS FOR MATHEMATICS EDUCATION AT UPPER SECONDARY LEVEL

Filler (2004), em seu artigo, apresenta a proposta de uso do software POV-Ray com alunos do ensino médio na Alemanha para a criação de gráficos e animações de linhas, círculos, espirais, trajetória de parábolas, cicloides, dentre outras curvas, descrevendo ainda essas com o uso de equações paramétricas.

O autor coloca que a criação de visualizações computacionais, especialmente animações, pode ajudar os alunos a compreender objetos geométricos, que são descritos por equações paramétricas, como conjuntos de pontos, bem como descobrir as relações funcionais e aspectos dinâmicos desses objetos. Além disso, em geral, nas aulas de geometria analítica, os alunos adquirem apenas uma percepção rudimentar de objetos geométricos como constituintes de conjuntos de pontos. Em sua maioria, os estudantes, não reconhecem as relações funcionais entre os valores dos parâmetros e pontos associados. O reconhecimento deste tipo de relação requer a compreensão da dependência de localização dos pontos no espaço para com os parâmetros.

A abordagem mais trivial, conforme o artigo, para que os alunos consigam correlacionar pontos no espaço ou no plano com equações paramétricas, sem dúvida nenhuma, passa pelo estudo da reta que é apresentada por meio da equação do tipo $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0 + \overrightarrow{\mathrm{t}}$. A interpretação do parâmetro como o tempo estabelece relações com a descrição do movimento em física e torna possível a criação de animações de computador (vídeos), utilizando-se de software adequado.

Na Figura 37 pode-se ver a trajetória da parábola determinada pelo movimento de uma esfera azul, isso realça a percepção dos alunos de que as linhas ou retas podem ser vistas e consideradas como conjuntos de pontos, o tempo pode ser utilizado como parâmetro para descrição de objetos geométricos e analiticamente todos esses objetos estão vinculados a vetores.

```
#declare x0 = <-2.5,0,0>;
#declare v0 = <5,5,0>;
#declare g = <0,-10,0>;
sphere { x0 + v0*clock + g/2*clock*clock  0.25}
```

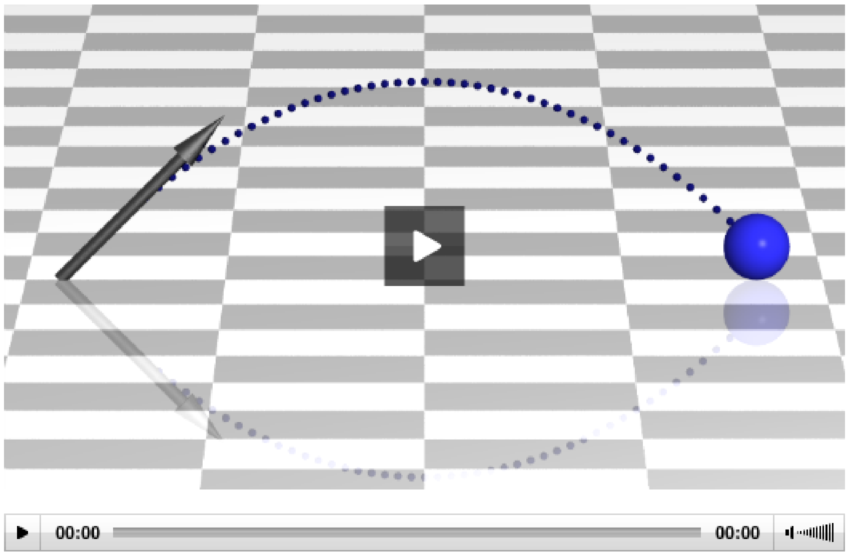


Figura 37 – A trajetória parábola
Fonte: (FILLER, 2004).

Na Figura 38, equações paramétricas relacionam-se com curvas, como por exemplo, a cicloide.

O estudo realizou um experimento de ensino, com estudantes, que durou 3 semanas. Os alunos do 3º ano do ensino médio numa escola alemã aprenderam sobre os conceitos da computação gráfica e sobre a criação de animações usando o POV-Ray.

Como resultado foi mostrado no artigo que é possível a construção de curvas interessantes e complexas, bem como animações dessas por meio de equações paramétricas correlacionando os conhecimentos, para tal prática, com os conhecimentos relacionados ao currículo da disciplina de geometria analítica do ensino médio. Ressaltou-se, no entanto, que o tempo necessário para a experiência não deve ser subestimado, pois mesmo para construções geométricas aparentemente simples, como

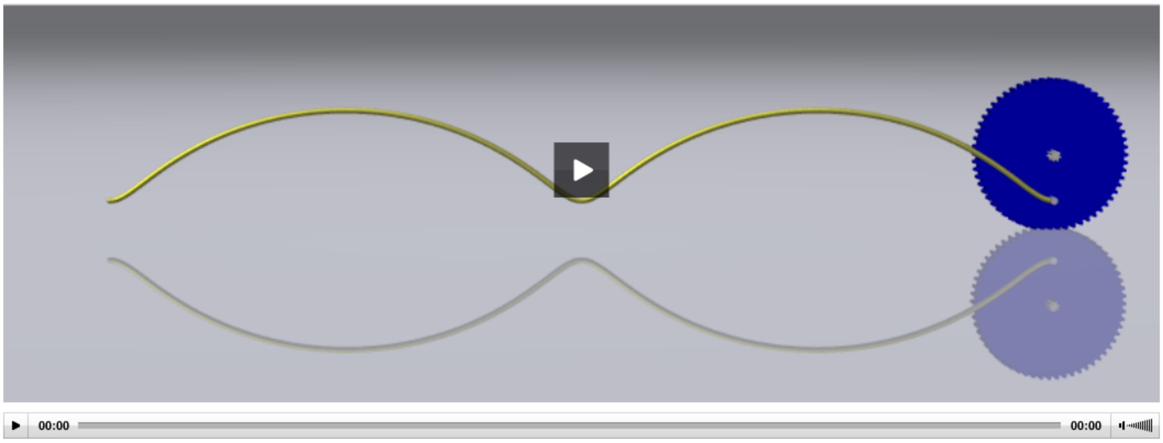


Figura 38 – Animação da formação de uma cicloide
Fonte: (FILLER, 2004).

por exemplo, círculos, espirais ou hélices, muitos estudantes necessitaram de bastante tempo.

Embora tenha havido o fato de vários estudantes levarem tempo a mais para a conclusão de determinadas atividades, estes, ao encontrarem-se motivados com a experimentação, estavam dispostos a gastar uma quantidade relativamente grande de seu tempo livre em tais atividades. Especialmente as atividades relacionadas à criação de animações e de vídeos. Em geral, a experiência foi feita com o uso do POV-Ray que é (por causa de sua qualidade gráfica foto-realista) muito motivador, mesmo para os alunos sem interesses especiais para com a matemática.

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ressalta-se que não foram encontrados mais trabalhos diretamente correlacionados, além dos que estão sendo expostos, nem foram encontradas Revisões Sistemáticas de Literatura sobre o tema pesquisado, neste caso, a Aplicação da Computação Gráfica ao Ensino de Geometria Analítica.

Numa análise breve dos trabalhos correlatos elencados anteriormente, observamos que o foco de todos os experimentos foi o de tornar a metodologia de trabalho do conteúdo de geometria analítica mais motivadora aos estudantes. Como os trabalhos seguem distantes em uma linha cronológica, com contextos bem distintos, não é possível comparar os softwares utilizados nos seus casos.

A obviedade da motivação dos estudantes relatada nos três trabalhos deve-se ao fato já conhecido e comprovado de que o uso de TIC's em sala de aula da maneira correta contribui para o aprendizado do aluno.

Enfim, podemos considerar os experimentos efetuados como realmente relevantes, de maneira que tais relatos contribuam para que novas práticas pedagógicas inovadoras surjam e sejam realizadas.

Por último, salientamos a contribuição, de forma complementar, deste trabalho dentro do escopo de aplicações da computação gráfica no ensino de geometria analítica, visto que não houve relatos de estudos voltados a trabalhos analíticos do currículo proposto para a geometria analítica e nem a correlação teórico-prática destes conteúdos com as práticas possíveis em laboratório e com o uso de TIC's.

5 METODOLOGIA

Existem várias classificações para as pesquisas e tais classificações dependem da visão de diferentes autores. Elas podem ser classificadas quanto à natureza, quanto aos objetivos, quanto à abordagem e quanto aos procedimentos. A classificação das pesquisas e os tipos de pesquisa também podem variar dependendo da visão de cada área do conhecimento (JUNG, 2004; GARCES, 2010).

Tendo o exposto acima como base, afirmamos que este trabalho se baseou nos seguintes tipos de pesquisa: pesquisa aplicada (quanto à natureza); descritiva e exploratória (quanto aos objetivos); qualitativa (quanto à abordagem); e bibliográfica (quanto aos procedimentos).

Para Jung (2004), uma pesquisa aplicada utiliza conhecimentos básicos, tecnologias existentes, conhecimentos tecnológicos e, como objeto, busca um novo produto ou processo. Garces (2010) completa afirmando que uma pesquisa aplicada: objetiva a aplicação dos conhecimentos básicos; pode ou não ser reservada; produz produtos, processos e patentes; gera novas tecnologias e conhecimentos resultantes do processo de pesquisa.

A primeira etapa do processo de desenvolvimento deste trabalho consistiu da revisão de literatura, dessa forma, obtivemos o "estado da arte" das áreas envolvidas, onde adquirimos todas as informações teóricas necessárias para atingir o objetivo deste trabalho, caracterizando-se assim a pesquisa como bibliográfica, que segundo Cervo e Bervian (2007, p. 60), consiste:

> em procurar explicar um problema a partir de referências teóricas publicadas em artigos, livros, dissertações e testes. Pode ser realizada independentemente ou como parte da pesquisa descritiva ou experimental. Buscando-se em ambos os casos, conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado sobre determinado assunto, tema ou problema.

A revisão de literatura foi executada buscando informações em livros, artigos científicos, dissertações, teses de doutorado e sites técnicos especializados de diversos países e línguas.

Gil (1991) afirma que uma pesquisa descritiva tem como objetivo a descrição da característica de fenômeno para estabelecimento de relações entre variáveis. Triviños (1987) corrobora afirmando que o estudo descritivo exige do pesquisador uma delimitação precisa de técnicas, métodos, modelos e teorias.

O enfoque descritivo desta pesquisa tornou-se explícito quando da apresentação das correlações entre a Computação Gráfica e a Geometria Analítica por meio de mapas conceituais, bem como da apresentação das propostas de atividades teórico-práticas que foram adaptadas a partir do Projeto NRICH, da Universidade de Cambridge.

Pelo fato de haver pouco conhecimento sobre o tema estudado neste trabalho, neste caso a utilização de Computação Gráfica no processo de ensino-aprendizagem da Matemática do Ensino Médio, esta pesquisa se enquadrou como exploratória, que segundo Garces (2010, p. 08), trata-se de abordagem adotada para:

> familiarizar-se com o fenômeno, obter uma nova percepção a seu respeito, ou a busca de maiores informações sobre este. Possui um planejamento flexível, e é indicada quando se tem pouco conhecimento do assunto. Tem a finalidade de formular problemas e hipóteses para estudos posteriores. Vem preencher lacunas existentes na área do conhecimento que é objeto de pesquisa.

A pesquisa também teve caráter qualitativo, pois de acordo com Minayo (1994), as pesquisas qualitativas surgem diante da impossibilidade de investigar e compreender, por meio de dados puramente estatísticos, fenômenos voltados para a percepção, intuição e a subjetividade, o que esteve sempre, de certa maneira, intrinsecamente relacionado ao objeto de estudo desta pesquisa.

Após a realização da revisão de literatura foram realizadas as tarefas referentes ao cumprimento de cada um dos objetivos específicos relacionados no início do trabalho para que fosse possível o alcance do objetivo geral.

6 DESENVOLVIMENTO DO TRABALHO

Neste capítulo apresentaremos os principais resultados do estudo proposto, neste caso, o do estabelecimento das principais conexões teórico-práticas aplicáveis entre a Computação Gráfica e os conteúdos da Matemática do Ensino Médio, suas limitações e possibilidades, com vistas ao desenvolvimento das competências requeridas aos alunos.

6.1 METODOLOGIA DO USO DO POV–RAY PARA O ENSINO GEOMETRIA ANALÍTICA NO ENSINO MÉDIO

O corpo de estudo da geometria analítica começa a ser introduzido aos alunos nas séries anteriores do ensino fundamental e médio, no entanto, é no terceiro ano do ensino médio que a geometria analítica é apresentada como corpo de conhecimento matemático necessitando de um profundo resgate, por parte do aluno, dos conceitos e habilidades já desenvolvidas.

Tradicionalmente, ao introduzir os conteúdos da geometria analítica, o professor de matemática dispende muito esforço no trabalho de conceituação axiomática que contribui muito pouco para a práxis educativa dentro da sala de aula. Nesse sentido, propomos a utilização de duas teorias como guias para uma didática focada no processo de ensino-aprendizagem da geometria analítica: a **Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel** e a **Teoria dos Níveis de Raciocínio Geométrico de Van Hiele**.

> A teoria da aprendizagem de Ausubel propõe que os conhecimentos prévios dos alunos sejam valorizados, para que possam construir estruturas mentais utilizando, como meio, mapas conceituais que permitem descobrir e redescobrir outros conhecimentos, caracterizando, assim, uma aprendizagem prazerosa e eficaz. [...] A aprendizagem é muito mais significativa à medida que o novo conteúdo é incorporado às estruturas de conhecimento de um aluno e adquire significado para ele a partir da relação com seu conhecimento prévio. Do contrário, ela se torna mecânica ou repetitiva, uma vez que se produziu menos essa incorporação e atribuição de significado, e o novo conteúdo passa a ser armazenado isoladamente ou por meio de associações arbitrárias na estrutura cognitiva (PELIZZARI et al., 2002).

Ainda, quando o conteúdo escolar a ser aprendido não consegue ligar-se a algo já conhecido, ocorre o que Ausubel chama de aprendizagem mecânica, ou seja, quando as novas informações são aprendidas sem interagir com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Assim, a pessoa decora fórmulas, leis, mas esquece após a avaliação (PELIZZARI et al., 2002).

Para haver aprendizagem significativa são necessárias duas condições: o aluno precisa ter uma disposição para aprender: se o indivíduo quiser memorizar o conteúdo arbitrária e literalmente, então a aprendizagem será mecânica; e o conteúdo escolar a ser aprendido tem que ser potencialmente significativo, ou seja, ele tem que ser lógica e psicologicamente significativo: o significado lógico depende somente da natureza do conteúdo, e o significado psicológico é uma experiência que cada indivíduo tem. Cada aprendiz faz uma filtragem dos conteúdos que têm significado ou não para si próprio (PELIZZARI et al., 2002). Assim, podemos sintetizar três pressupostos que são defendidos por Ausubel para que ocorra a aprendizagem significativa:

1. Ativação de conhecimentos prévios;
2. Potencialidade do material;
3. Motivação do aprendiz.

Já a Teoria de Van Hiele, segundo Alves e Sampaio (2010), se constitui como uma teoria do processo de ensino-aprendizagem de geometria, tal teoria foi elaborada pelo casal holandês van Hiele, em 1957, com base nas dissertações de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, na Holanda. A teoria se encaixa dentro da didática da matemática e, de forma mais específica, na didática da geometria. O casal van Hiele criou uma metodologia de aprendizagem da matemática que se aplica em geometria, com base nas seguintes premissas:

1. Existem vários níveis de desenvolvimento no raciocínio dos alunos de geometria;
2. Os alunos só podem realmente entender os novos conceitos se tiverem atingido um nível adequado de raciocínio matemático;
3. O item anterior implica que, se os alunos não tiverem alcançado o nível adequado, haveria a necessidade de esperar os mesmos alcançarem;
4. Pode ajudar os alunos à adquirirem um maior nível de raciocínio através de uma educação adequada.

Nesse modelo de ensino e aprendizagem da geometria são considerados cinco níveis de raciocínio geométrico, embora os níveis quatro e cinco sejam considerados apenas em nível universitário e subsequentes. Esses níveis de raciocínio dão orientações para a construção de sequências didáticas, de forma que os alunos progridam dos níveis que requerem um menor nível de abstração aos que requerem um raciocínio matemático mais avançado. As instruções de ensino, então, devem estar em consonância com os estados de desenvolvimento dos alunos porque, do contrário, estes não irão aprender adequadamente. O avanço nestes níveis, e, portanto, na aprendizagem da geometria vai unindo a aquisição da linguagem geométrica de cada nível com a aprendizagem significativa dos conceitos próprios de cada nível (ALVES; SAMPAIO, 2010).

Van Hiele enuncia os seguintes níveis de raciocínio em matemática: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Esses níveis de raciocínio, conforme os Quadros 1 e 2, aparecem de forma progressiva no decorrer do currículo escolar, vão progredindo da intuição para abstração e generalização, que são as duas características fundamentais do pensamento matemático avançado e cada nível superior requer um raciocínio mais complexo do que o anterior (ALVES; SAMPAIO, 2010).

NÍVEL 01 – VISUALIZAÇÃO	**NÍVEL 02 – ANÁLISE**
Os alunos conseguem nomear e reconhecer formas/objetos geométricos por sua aparência, mas não conseguem identificar especificamente as propriedades destas formas/objetos geométricos. Embora possam ser capazes de reconhecer algumas características, os alunos não conseguem usá-las para o processo de reconhecimento e classificação. Sugestões de pontos focais para o processo de ensino-aprendizagem neste nível: • Ordenação, identificação e descrição de formas/objetos geométricos; • Manipulação de modelos físicos; • Vistas de tamanhos e orientações diferentes da mesma forma/objeto geométrico para distinguir características que podem ser ou não relevantes; • Construção, desenho, criação, montagem e desmontagem de formas/objetos geométricos.	Os alunos começam a identificar as propriedades de formas/objetos geométricos e aprendem a usar vocabulário apropriado relacionado com as propriedades, mas não fazem ainda conexões entre diferentes formas/objetos geométricos e suas propriedades. As características irrelevantes, tais como o tamanho ou orientação, tornam-se menos importantes, já que os alunos são capazes de se focar em todas as formas /objetos geométricos da mesma categoria. Eles são capazes de pensar sobre quais propriedades categorizam um retângulo, por exemplo. Os estudantes neste nível são capazes de conversar sobre a relação entre as formas/objetos geométricos e as suas propriedades. Sugestões de pontos focais para o processo de ensino-aprendizagem neste nível: • Evolução da simples identificação para análise de propriedades, ao utilizar modelos virtuais ou concretos para definir, medir, observar e alterar propriedades; • Utilização de modelos e/ou tecnologias para focar em definições de propriedades, construção de listas de propriedades, e discussões de condições suficientes para se definir uma forma/objeto geométrico; • Resolução de problemas, incluindo as atividades em que as propriedades de formas/objetos geométricos são componentes importantes; • Classificação utilizando as propriedades de formas/objetos geométricos.

NÍVEL 03 – DEDUÇÃO INFORMAL
Os alunos são capazes de reconhecer as relações entre as propriedades de formas/objetos geométricos ou tipos de formas/objetos geométricos e são capazes de seguir argumentos lógicos que utilizam tais propriedades. Sugestões de pontos focais para o processo de ensino-aprendizagem neste nível: • Realização de resolução de problemas, incluindo as tarefas em que as propriedades de formas/objetos geométricos são componentes importantes; • Utilização de modelos e listas de propriedades e discussão de qual grupo de propriedades constitui uma condição necessária e suficiente para uma forma/objeto geométrico específico; • Utilização de linguagem informal e dedutiva (“todos”, “alguns”, “nenhum”, “se – então”, “e se”, etc.); • Investigação de certos relacionamentos entre os polígonos para estabelecer se o inverso também é válido (por exemplo: “Se um quadrilátero é um retângulo, ele deve ter quatro ângulos retos; Se um quadrilátero tem quatro ângulos retos, deve também ser um retângulo”); • Utilização de modelos e desenhos (incluindo software de geometria dinâmica) como ferramentas para procurar generalizações e contraexemplos; • Construção e teste de hipóteses; • Utilização de propriedades para definir uma forma/objeto geométrico ou determinar se uma forma/objeto geométrico particular está incluído num dado conjunto.

Tabela 1 – Níveis de Van Hiele usados na Educação Básica

Os alunos, geralmente, não atingem os níveis 4 e 5 (mostrados no Quadro 2) até o término do ensino médio ou mesmo da faculdade, mas os professores devem estar cientes da existência desses níveis, no entanto:

NÍVEL 4 – DEDUÇÃO	NÍVEL 5 – RIGOR
Os alunos conseguem, ao invés de apenas ficar identificando as características das formas/objetos geométricos, ir mais além e são capazes de construir provas usando postulados ou axiomas e definições. Em geral, a geometria analítica do ensino médio não deveria ser ensinada neste nível.	Este é o nível mais alto de raciocínio na hierarquia Van Hiele. Os estudantes neste nível conseguem trabalhar em diferentes sistemas geométricos ou axiomáticos. É mais provável que este nível seja efetivamente cobrado em um curso de nível universitário.

Tabela 2 – Níveis de Van Hiele usados no Ensino Superior

Consideramos o foco geométrico da Teoria de Van Hiele de forma mais genérica estendendo as aplicações da geometria para a geometria analítica, visto que esta se utiliza de conhecimentos adquiridos por meio do estudo da geometria plana e espacial.

Como visto, a utilização da Teoria de Van Hiele tem implicações nas estratégias de ensino, assim ressalta-se a necessidade da geometria analítica ensinada no ensino médio ser informal. Além disso, as atividades informais a serem utilizadas devem possuir caráter exploratório e fazer com que os alunos "coloquem a mão na massa" a fim de proporcionar a estes a oportunidade de investigar, construir e desconstruir, criar e fazer desenhos, e observar as formas/objetos geométricos no mundo em torno deles.

Enfim, no contexto de ensino da geometria analítica podemos assumir que os alunos encontram-se ao menos no nível 2 (análise) e já experimentaram e assimilaram os conteúdos de geometria plana e espacial, sendo assim, nos concentraremos, a partir deste ponto, em duas tarefas: a apresentação da correlação entre os conteúdos da Computação Gráfica e a Geometria Analítica; e a elaboração de propostas de atividades práticas para serem realizadas com o apoio do software POV-Ray.

6.2 GEOMETRIA ANALÍTICA *versus* COMPUTAÇÃO GRÁFICA: UMA CORRELAÇÃO DE CONTEÚDOS

O objetivo desta sessão é tentar estabelecer a correlação entre os conteúdos da Geometria Analítica abordada no ensino médio e o seu uso da Computação Gráfica, para tanto, inicialmente devemos listar os conteúdos que podem e/ou deveriam ser abordados.

A Geometria analítica, de acordo com os PCN's (BRASIL, 2006) tratam de representações no plano cartesiano e equações, intersecção e posições relativas de figuras, e tem como principais objetivos:

a) Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos;

b) Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características;

c) Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa;

d) Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

No entanto, como pode ser percebido, os PCN's foram desenvolvidos com o objetivo de serem norteadores pedagógicos que visam auxiliar a prática docente. Eles tratam da organização curricular de cada ciclo escolar, bem como a maneira como estes temas podem ser abordados junto aos alunos. Os PCN's não foram concebidos para serem um documento que impõe o que deve ser ensinado, mas sim um modelo a ser seguido, podendo ser adaptado à realidade escolar vivenciada. Isto é, nele estão dispostas as metas que o aluno deve alcançar, mas a forma e a intensidade com que cada conteúdo deve ser abordado deve ser definido levando em consideração a realidade escolar.

Observando algumas diretrizes curriculares fornecidas na Internet por Secretarias Estaduais de Educação de alguns Estados brasileiros, e realizando análises no sentido de verificar o detalhamento dos conteúdos, optamos por utilizar o documento intitulado *Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática*, publicado pela Secretaria de Estado da Educação do Paraná (PARANÁ, 2008).

Segundo tais diretrizes, para o Ensino Fundamental e Médio, o Conteúdo Estruturante das Geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos:

a) geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos; distâncias entre pontos, retas e circunferências; equações da reta, do plano e da circunferência; cálculos de área de figuras geométricas no plano e estudo de posições;

b) geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões; pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera;

c) geometria analítica: noções de geometria analítica utilizando o sistema cartesiano; articulação entre geometria e álgebra; entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas; estudo das funções, das equações e das desigualdades da geometria analítica (retas, círculos, cônicas, superfícies); coordenadas cartesianas e coordenadas polares;

d) noções básicas de geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de geometria dos fractais (floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski); geometria hiperbólica (postulado de Lobachevsky - partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos) e elíptica (postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto à medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: polos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento).

Não discutiremos aqui o item *d)* apresentado acima. Para os fins dessa pesquisa apenas utilizaremos os três primeiros. Nesse sentido, apresentamos os mapas conceituais, que correlacionam os conteúdos da Geometria Analítica com a Computação Gráfica.

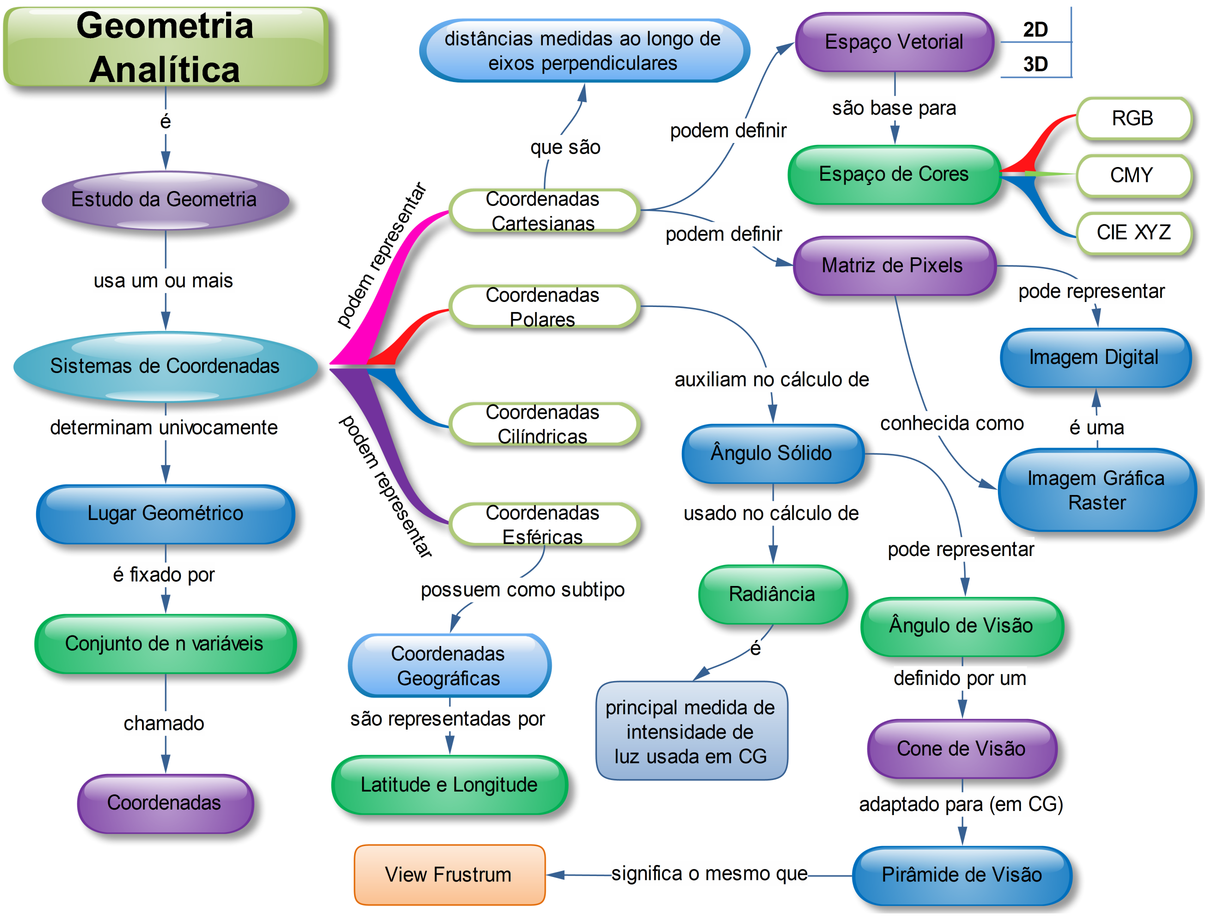


Figura 39 – Mapa conceitual dos Fundamentos da Geometria Analítica e Aplicações na Computação Gráfica

. Fonte: o próprio Autor.

O mapa conceitual apresentado na Figura 39 mostra as relações das bases conceituais da Geometria Analítica com algumas bases conceituais relevantes da Computação Gráfica, tais como: espaço de cores; matriz de pixels/raster; radiância; view frustrum e coordenadas, dentre outras. Dentro da Computação Gráfica, esses conceitos são utilizados amplamente, pois permitem, por exemplo, que imagens possam ser desenhadas na tela de um computador; um objeto virtual possa ser modelado e visualizado em alta resolução com efeitos especiais; ou mesmo um filme possa ser produzido. Enfim, são conceitos essenciais e básicos da área de CG.

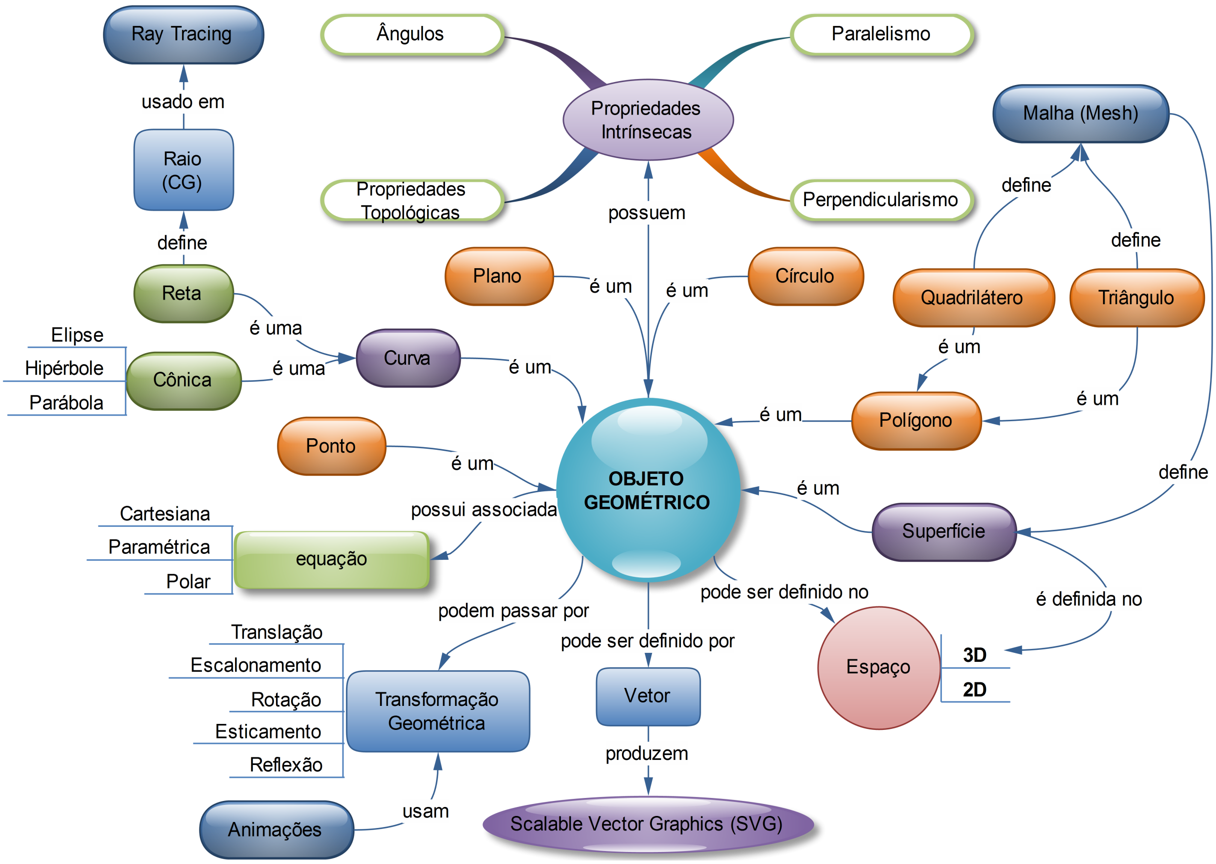


Figura 40 – Mapa conceitual dos Objetos Geométricos, suas Propriedades e Aplicações na Computação Gráfica
. Fonte: o próprio Autor.

Já no mapa conceitual apresentado na Figura 40, são mostradas as relações existentes entre os objetos geométricos, suas relações e propriedades e suas outras formas de representação, tais como a representação algébrica por meio de equações ou vetores. Quanto às relações com a área de Computação Gráfica, no mapa conceitual, são destacados elementos que denotam finalidades da área de CG (Animações e Scalable Vector Graphics (SVG)), assim como objetos complexos (Raio para Ray-Tracing e Meshes).

6.3 PROPOSTAS DE ATIVIDADES TEÓRICO-PRÁTICAS APLICÁVEIS ENTRE A COMPUTAÇÃO GRÁFICA E OS CONTEÚDOS DA GEOMETRIA ANALÍTICA

O currículo de matemática escolar pode ser utilizado como um forte indicador do que os alunos têm a oportunidade de aprender e, efetivamente, o que eles aprendem. Em um currículo adequado, as ideias matemáticas se correlacionam e são construídas em conjunto, de modo que a compreensão e o conhecimento dos alunos sobre os assuntos sejam aprofundados e a capacidade deles de aplicar a matemática possa ser expandida.

A construção e o desenho de objetos em perspectiva, por exemplo, dão a oportunidade aos alunos de utilizarem retas e ângulos, a mesma atividade de desenho realizada em uma superfície esférica toma um caminho muito mais instigante oferecendo oportunidades aos alunos para pensar e raciocinar espacialmente.

Com o crescente uso da Computação Gráfica no dia-a-dia da nossa sociedade, os alunos podem ter a oportunidade de utilizar ferramentas de visualização, modelagem geométrica ou geometria dinâmica para a resolução de problemas utilizando PCs ou mesmo smartphones. A visualização de um edifício representado numa planta arquitetônica e a forma de uma seção transversal formada pelo fatiamento de um cone ou outro objeto geométrico por um plano de corte são exemplos de atividades que podem ser conduzidas com a utilização de softwares capazes de manipular representações tridimensionais.

A fim de que a tecnologia torne-se parte essencial dentro da sala de aula, ferramentas tecnológicas devem ser selecionadas e utilizadas, de maneira que sejam compatíveis com os objetivos do processo de ensino-aprendizagem. A decisões de incorporação também colocam em cima do docente uma carga maior de responsabilidade, pois o mesmo deve estar preparado para usar as ferramentas e apoiar os alunos em seu uso.

As conexões matemáticas são difíceis de desenvolver e perpassam pela seleção adequada de um problema a ser abordado. Isso é especialmente importante, porque para os alunos não é, em geral, fácil a construção de conexões, a menos que eles estejam trabalhando com problemas ou situações que tenham o potencial para sugerir tais ligações. Nesse sentido, os docentes necessitam tomar iniciativas especiais para encontrar e/ou construir tais problemas quando os materiais instrucionais não os fornecem.

Tendo como base as Teorias de Ausubel e Van Hiele podemos começar a formular as sequências didáticas a serem elaboradas para o trabalho dentro da sala de aula com os alunos, assim, devemos atender primordialmente os pressupostos de Ausubel e em seguida estabelecer as sequências didáticas considerando as premissas da teoria de Van Hiele. Além disso, considerando a viabilidade comprovada, por várias pesquisas nas últimas três décadas, da utilização das TIC's na educação matemática iremos utilizar na formulação de todas as sequências didáticas a serem apresentadas o software POV-Ray, pois consideramos que o mesmo, intrinsecamente, pode potencializar o conteúdo a ser trabalhado e auxiliar na motivação dos alunos.

De fato, o software POV-Ray possui algumas características que o tornam um boa ferramenta para ser utilizada dentro do processo de aprendizagem significativa: interface amigável; curva de aprendizagem curta tornando a ferramenta facilmente acessível a alunos e professores; documentação (tutoriais e exemplos) farta na Internet;

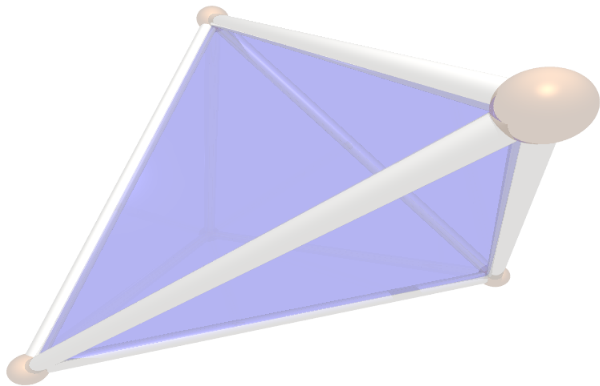
a linguagem SDL é muito simples de usar, mesmo para quem não tem experiência com linguagens de programação; flexibilidade; possibilita a construção virtual ampla de objetos concretos através da manipulação de dados ou de objetos abstratos que podem ser representações de ideias e da criatividade dos alunos; possibilita a cooperação mútua favorecendo a interatividade entre alunos com maiores e menores dificuldades de aprendizagem.

Dessa forma, as atividades propostas, que terão como foco os conteúdos da geometria analítica, permitirão aos alunos a visualização das relações estabelecidas nos mapas conceituais apresentados anteriormente. Cada atividade apresentará uma problemática que será dada juntamente com a imagem-solução. Todas as atividades apresentadas são adaptações de atividades da base pública de problemas disponibilizada pelo ***Projeto NRICH*** da ***Universidade de Cambridge***. O ***Projeto NRICH*** objetiva enriquecer as experiências dos estudantes para com a matemática e os materiais podem ser baixados gratuitamente no site <http://nrich.maths.org/secondary-upper>.

Para fins de organização, os códigos-solução para cada atividade foram alocados nos apêndices e as configurações de cena já estão pré-definidas num arquivo que deverá ser repassado ao aluno pelo professor, de forma que o aluno não tenha a atenção desviada do problema a ser resolvido.

ATIVIDADE 01	
Nome da Atividade:	Construindo um Tetraedro
Descrição da Atividade: Crie um tetraedro, no POV-Ray, utilizando para tanto os seguintes objetos geométricos: cilindros, esferas e triângulos. Após a criação do tetraedro calcule o volume e a área de sua superfície, bem como o valor do comprimento de cada aresta. Pergunta-se ainda: quantos tetraedros diferentes podem ser construídos utilizando arestas com os mesmos comprimentos achados anteriormente? Explique ainda como você chegou a essa conclusão? **Observação:** os vértices do tetraedro deverão estar alocados nos pontos A=(1,1,1), B=(-1,1,-1), C=(1,-1,-1) e D=(-1,-1,1).	

Resultado esperado:



Pressupostos de Ausubel – Conhecimentos Prévios Ativados
Trabalho sistemático, generalização, raciocínio matemático e espacial, visualização espacial, triângulos, distâncias no espaço, propriedades de tetraedros.
Nível da Atividade (Van Hiele)
(   ) 1 - visualização (X) 2 - análise (   ) 3 - dedução informal/classificação

Ao considerarmos a necessidade de construção de um tetraedro na vida real, em geral, não encontraremos pontos ou linhas como definidos axiomaticamente na teoria. Embora tal situação pareça um pouco restritiva, na verdade, podemos verificar que isso é exatamente o que ocorreria na vida real, ou seja, com materiais com espessura finita (arame, palha, madeira) para representar os segmentos de reta e bolas de gude para representar os pontos. No computador, os segmentos de reta podem ser representados por cilindros e as bolas de gude, por esferas. O aluno deve perceber esses detalhes, e caso o professor observe a não ausência de percepção do aluno nesse sentido, então deve ocorrer uma intervenção.

ATIVIDADE 02	
Nome da Atividade:	Descobrindo as cores

Descrição da Atividade:

No sistema RGB, cada cor é definida pela quantidade de vermelho (Red em inglês), verde (Green em inglês) e azul (Blue em inglês) que a compõem. Por conveniência, a maioria dos arquivos digitais, bem softwares de edição de imagens usam números inteiros entre 0 e 255 para especificar estas quantidades. O número 0 indica ausência de intensidade e o número 255 indica intensidade máxima.

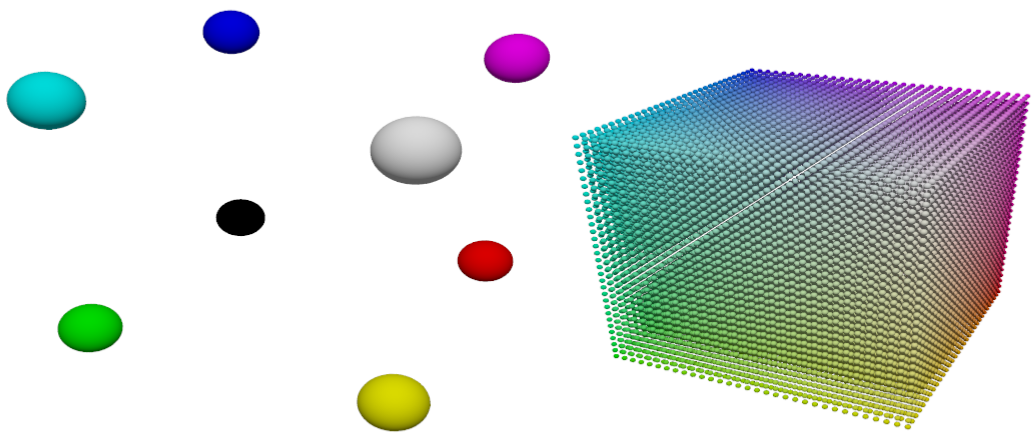
Neste contexto, cada cor no sistema RGB é identificado por uma tripla ordenada $(\mathrm{R}, \mathrm{G}, \mathrm{B})$ de números inteiros, com $0 \leq \mathrm{R} \leq 255$, $0 \leq \mathrm{G} \leq 255$ e $0 \leq \mathrm{B} \leq 255$. Sendo assim, podemos associar cada cor do sistema RGB com pontos com coordenadas inteiras de um cubo com aresta de tamanho 255. Analogamente podemos proporcionalizar o cubo para que tenha arestas de tamanho 1 e as cores variem de 0 à 1, ao invés de 0 à 255.

Ressalta-se ainda que um cubo de cores como o descrito acima representa um espaço vetorial 3D onde cada cor é associada à um vetor no espaço.

Observando o texto acima, crie no POV-Ray um **cubo de cores** que represente as cores primárias. Cada cor deverá estar associada a uma esfera centrada no ponto correspondente a cor, além disso a esfera deverá adotar a cor correspondente a sua localização. Tente ainda fazer no POV-Ray com que a quantidade de cores alocadas seja alterada dinamicamente por meio de variáveis que alterem a densidade de esferas do cubo.

Como desafio, tente rotacionar, de forma animada, o cubo considerando os 3 eixos x, y e z.

Resultado esperado:



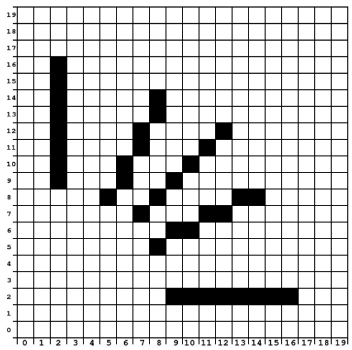
Pressupostos de Ausubel – Conhecimentos Prévios Ativados
Coordenadas 3D. Tentativa e erro. Generalização. Visualização espacial.
Nível da Atividade (Van Hiele)
(   ) 1 - visualização (   ) 2 - análise (X) 3 - dedução informal/classificação

O aluno pode não lembrar-se, porém o assunto de cores primárias e secundárias, bem como os princípios da formação de cores, são ensinados ainda na educação primária para as crianças. Os fundamentos ensinados neste período são os mesmos aplicados nos computadores, embora as representações sejam diferentes. De mistura de tintas guache passamos para a combinação de vetores num espaço vetorial tridimensional, o aluno deve perceber esse aumento da complexidade e entender o porquê disso acontecer. Outro link que pode ser feito em relação a este assunto é relativo à combinação de ondas de diferentes comprimentos, do espectro da luz visível, assunto este que, em geral, é discutido durante a abordagem de ótica na disciplina de física.

ATIVIDADE 03

Nome da Atividade:	Linhas de abelha (Beelines)

Descrição da Atividade:
Beelines, em inglês, significa “tomar o caminho mais curto ou linha reta entre dois pontos”.



Imagine que queremos desenhar linhas em papel quadriculado, conforme a figura acima.
Responda:

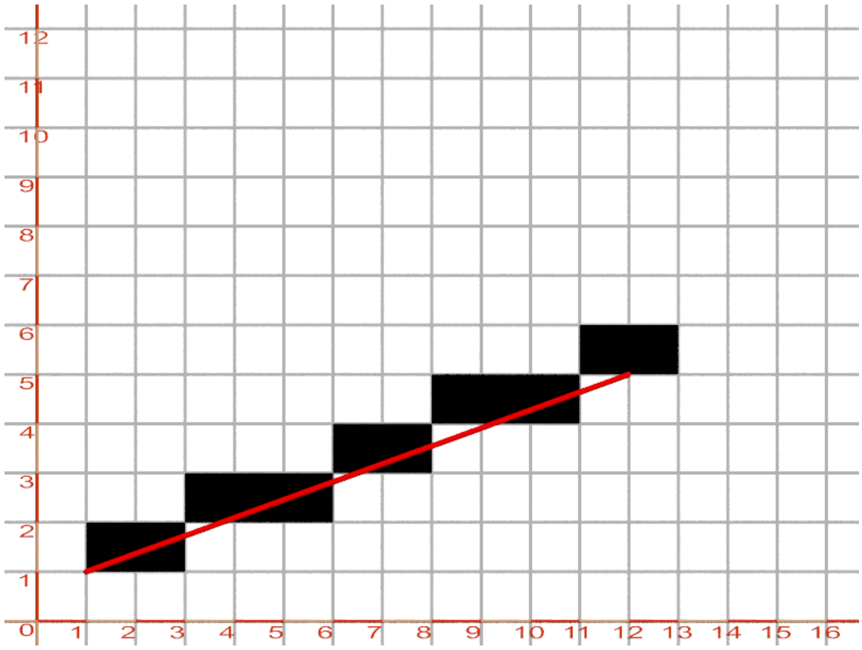
- Se fosse desenhada uma linha que une a origem (0,0) até o ponto (19,16), quantos quadrados seriam atravessados? Como saber a resposta sem desenhar?

- Você conseguiria calcular quantos quadrados seriam atravessados por uma linha, se fossem dadas as coordenadas dos dois pontos que formam essa linha?

Observação: O cálculo do número de quadrados que uma linha reta atravessa em um papel quadriculado é importante, por exemplo, para a construção de algoritmos de desenho de linhas retas em um computador, onde cada quadrado é representado por um pixel. Um dos algoritmos mais conhecidos para a realização desta tarefa é o **Algoritmo de Bresenham** para o desenho de linha.

Após ter lido sobre o algoritmo de Bresenham, implemente no POV-Ray o algoritmo para o primeiro octeto ($x_0 < x_1$ e $0 \leq m \leq 1$). Utilize como base o arquivo *“papel_quadriculado.pov”* que será dado pelo professor.

Resultado esperado:
Para os pontos (1,1) e (12,6) a reta ideal (em vermelho) e a reta discretizada são representadas como na figura abaixo:



Pressupostos de Ausubel – Conhecimentos Prévios Ativados
Coordenadas. Prova de conjecturas com auxílio de computador. Raciocínio matemático. Reflexões. Simetrias. Manipulação de expressões algébricas. Generalização. Funções Lineares. Vetores. Retas no plano.
Nível da Atividade (Van Hiele)
(   ) 1 - visualização (X) 2 - análise (   ) 3 - dedução informal/classificação

A atividade 03 apresentada, embora possa parecer um pouco distante da geometria analítica, na verdade, força o aluno a usar a geometria analítica constantemente durante a preparação e construção do código-solução. Além disso, a atividade ajuda o estudante a familiarizar-se com a natureza do espaço discreto em que a computação gráfica ocorre.

7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Fazer com que a educação matemática possa atingir padrões elevados exige que tenhamos objetivos claros, além de participação ativa de vários atores da educação (professores, administradores, políticos, professores de ensino superior, desenvolvedores de currículo, pesquisadores, famílias, estudantes e membros da comunidade). Além disso, a utilização de documentos padronizados (parâmetros curriculares), bem como ferramentas validadas pedagogicamente (material didático, sequências didáticas/atividades, etc.) são pontos importantes a serem considerados sempre para a práxis educativa.

Consideramos, diante do estudo apresentado, que objetivo geral de estabelecimento das principais conexões teórico-práticas aplicáveis entre a Computação Gráfica e os conteúdos da Geometria Analítica do Ensino Médio com vistas ao desenvolvimento das competências requeridas aos alunos foi alcançado a contento, já que todos os objetivos específicos foram alcançados.

Contudo recomendamos que, quanto às atividades propostas, o professor deva estar preparado para interessantes surpresas, neste caso: a variedade das possíveis soluções que podem ser fornecidas pelos alunos para a mesma atividade; a demonstração de capacidade criativa dos alunos; bem como a demonstração de entusiasmo e engajamento dos mesmos nas atividades. Esses elementos devem ser percebidos e valorizados, pois um ambiente como esse pode levar a produção de discussões e trocas de ideias.

Além disso, consideramos que, para ensinar um assunto de geometria analítica, é essencial ao docente a compreensão da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e da Teoria dos Níveis de Raciocínio Geométrico de Van Hiele, pois um erro de estratégia na preparação de uma sequência didática para o processo de ensino-aprendizagem pode acarretar em traumas e dificuldades para aprendizagem dos alunos.

Um exemplo que pode ser dado é o que segue:

Um professor pode perguntar aos alunos: "considerando que eu seja um objeto geométrico e eu tenha quatro lados e todos os meus ângulos internos sejam ângulos retos, então o que eu sou?".

Para responder a esta pergunta, o aluno deve estar no nível 2 (análise) no modelo de raciocínio geométrico de Van Hiele. Se os alunos na sala de aula estiverem ainda no nível 1 (visualização), onde reconhecem a forma/objeto geométrico por sua aparência, eles não serão capazes de responder a pergunta. Esse tipo de situação acaba por causar desinteresse nos alunos e o processo de ensino-aprendizagem fica prejudicado, já que um dos pressupostos da Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel é a *motivação*.

Em relação às dificuldades encontradas no decorrer do estudo, consideramos que o principal entrave encontrado está relacionado à carência de estudos similares, o que dificultou o estabelecimento de uma metodologia precisa para ser seguida no decorrer do trabalho.

Quanto aos trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos em seguimento a essa pesquisa, temos:

- Verificação, por meio da análise com especialistas e comunidade acadêmica da área, da aplicabilidade das atividades elaboradas considerando a realidade da educação brasileira;

- Validação pedagógica das atividades propostas em uma sala de aula real com alunos de escolas públicas;

- Incrementação da quantidade de atividades propostas ao realizar mais adaptações de problemas disponibilizados pelo Projeto NRICH, da Universidade de Cambridge e de outros repositórios didáticos reconhecidos internacionalmente.

REFERÊNCIAS

ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F. O modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van hiele e possíveis contribuições da geometria dinâmica. In: *Revista de Sistemas de Informação da FSMA*. FSMA, 2010. p. 69–76. ISBN 1983-5604. Disponível em: <http://www.fsma.edu.br/si/edicao5/FSMA_SI_2010_1_Principal_2.pdf>.

BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática : uma nova estratégia*. Contexto, 2002. ISBN 9788572442077. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=4VDcgy296cMC>.

BHATIA, P. K. *Computer Graphics*. India: I. K. International, 2008. 383 p.

BOMPIANI, E. *Geometria Analitica*. Universidad Nac. del Litoral, 2005. ISBN 9789875084339. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=jLHB0fdw67AC>.

BRASIL. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2014.

BUCK, D. Pov-ray documentation: The early history of povray. 2001. Disponível em: <http://www.povray.org/documentation/view/3.6.2/7/>.

CABECINHAS, F. A. *A High-Level Pedagogical 3D Modeling Language and Framework*. Dissertação (Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Informática e de Computadores) — Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa (Portugal), Maio 2010.

CAROLI, A. de; CALLIOLI, C.; FEITOSA, M. *Matrizes vetores geometria analítica*. Nobel, 1976. ISBN 9788521304067. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=gZA7-HIFZvUC>.

ENMORALES YURI; RAMIREZ, A. (Ed.). *Caminhos e percursos da Geometria Analítica: estudo histórico e epistemológico*. Santo Domingo, República Dominicana: [s.n.], 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/4068/1/CastroCaminhosCemacyc2013.pdf>.

CASTRO, M. H. G. O brasil tem jeito? In: ____. Rio de Janeiro: Zahar, 2007. cap. O Desafio da qualidade, p. 35–72. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/portais/Portals/18/arquivos/DesafioDaQualidade_cr.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2014.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A. *Metodologia Científica*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. (6).

CORREIA, E. S. As mídias no contexto escolar. s.d. Disponível em: <http://meuartigo.brasilescola.com/educacao/as-midias-no-contexto-escolar.htm>. Acesso em: 10 jul. 2014.

COVALESKI, R. *Cinema, publicidade, interfaces*. ROGERIO COVALESKI, 2009. ISBN 9788562788000. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=tlmS3Xx23D4C>.

DESCARTES, R. *Discours de la méthode: pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences*. [s.n.], 1668. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=patDAAAAcAAJ>.

DESCARTES, R. *La géométrie divisée en III livres*. Vve Barbin, 1705. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=3BAOAAAAQAAJ>.

Massive model visualization using realtime ray tracing. 10 p.

FERREIRA, E. Desafios e perspectivas do ensino de ciências e matemática. *Jornal da Ciência*, julho 2013. Disponível em: <http://jornaldaciencia.org.br/Detalhe.php?id=88393>. Acesso em: 08 jun. 2014.

FILLER, A. Creating computer graphics and animations based on parametric equations of lines and curves – proposals for mathematics education at upper secondary level. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, v. 6, n. 1, fev 2004. ISSN 1933-2823. Disponível em: <https://php.radford.edu/~ejmt>.

FILLER, A.; RIEPER, F. 3d computer graphics and analytic geometry in mathematics education in grammar schools. In: *Proceedings of the International Conference The Future of Mathematics Education*. Pod Tezniami, Ciechocinek, Poland: [s.n.], 2004. ISBN 83-919465-4-1. Disponível em: <http://math.unipa.it/~grim/21_project/CiechFillerRieper.pdf>.

FOLLADOR, D. *Tópicos especiais no ensino de matemática: tecnologias e tratamento da informação*. Curitiba: Ibpex, 2007.

FREIRE, P. Ação cultural para a liberdade e outros escritos. *Revista Espaço Acadêmico*, Rio de Janeiro, n. 33, fevereiro 2004. ISSN 1519.6186.

GARCES, S. B. B. Classificação e tipos de pesquisas. abril 2010. Disponível em: <www.redepoc.com/jovensinovadores/ClassificacaoeTiposdePesquisas.doc>. Acesso em: 08 jun. 2014.

GARCIA, V. C. V. Formação de professores de matemática e mudanças curriculares na escola. In: *A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens / organizadoras*. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012. p. 11–23. ISBN 978-85-386-0158-6. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/livros/livro1-matematica_escola.pdf>.

GARNICA, A. V. M.; GOMES, M. L. M.; ANDRADE, M. M. As memórias de lacroix: a instrução pública na frança revolucionária, em geral, e o ensino de matemática, em particular. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, scielo, v. 26, p. 1227 – 1260, 12 2012. ISSN 0103-636X. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000400007&nrm=iso>.

Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf>.

GATTASS, M. *Lecture notes in Computer Graphics*. [s.n.], 2013. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~mgattass/LivroCG>.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas, 1991. (3).

GOMES, J.; VELHO, L. Série de Computação e Matemática. *Fundamentos da Computação Gráfica*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~scuri/download/fid.pdf>.

GOULART, M. *3 fases da pré-história*. 2011. Disponível em: <http://www.historiadigital.org/curiosidades/3-fases-da-pre-historia-que-mudaram-a-sociedade>.

GROOTENDORST, A. et al. *Jan de Witt's Elementa Curvarum Linearum: Liber Secundus*. Springer, 2010. (Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences). ISBN 9780857291424. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=6W1h-sHLGIkC>.

GUIMARÃES, K. P. *Desafios e perspectivas para o ensino da matemática*. Editora Ibpex, 2010. ISBN 9788578387020. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=hSAFzq-t8PAC>.

HOYLES, C.; LAGRANGE, J.-B. *Mathematics education and technology-Rethinking the terrain*. New York: Springer, 2010. (New ICMI Study Series, v. 13). The 17th ICMI Study. International Commission on Mathematical Instruction. ISBN 978-1-4419-0146-0.

HUGHES, J.; FOLEY, J. *Computer Graphics: Principles and Practice*. Addison-Wesley, 2013. (The systems programming series). ISBN 9780321399526. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=OVpsAQAAQBAJ>.

JUNG, C. F. *Metodologia Cientifica: Ênfase em pesquisa tecnológica*. [S.l.: s.n.], 2004. (4).

KALBACH, J. *Design de Navegação Web: Otimizando a Experiência do Usuário*. [s.n.], 2009. ISBN 9788577805310. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MkD7AwAAQBAJ>.

KAWASAKI, T. F. *Tecnologias na Sala de Aula de Matemática: Resistência e Mudanças na Formação Continuada de Professores*. Tese (Tese (Doutorado do Programa de Pós Graduação Conhecimento e Inclusão Social)) — UFMG, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/FAEC-84XH59/teresinhakawasakitese.pdf?sequence=1>. Acesso em: 16 dez. 2014.

KELNER, J.; TEICHRIEB, V. Livro do Pré-Simpósio, IX Symposium on Virtual and Augmented Reality. *Técnicas de Interação pra Ambientes de Realidade Virtual e Aumentada*. Porto Alegre: Editora SBC, 2007. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~scuri/download/fid.pdf>.

KIRNER, C.; SISCOUTTO, R. Livro do Pré-Simpósio, IX Symposium on Virtual and Augmented Reality. *Fundamentos de realidade Virtual e Aumentada*. Porto Alegre: Editora SBC, 2007. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~scuri/download/fid.pdf>.

KLAWONN, F. *Introduction to Computer Graphics: Using Java 2D and 3D*. Springer, 2008. ISBN 978-1-84628-847-0. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~scuri/download/fid.pdf>.

KLEIN, J. T. Didática e interdisciplinaridade. In: ____. 6. ed. Campinas: Papirus, 2001. cap. Ensino interdisciplinar: didática e teoria, p. 109–132. Disponível em: <https://www.opendrive.com/files/59467322_EbHfD_48af/Didatica%20e%20Interdisciplinaridade.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2014.

KNOBEL, M. *Ensino de ciências e matemática no Brasil: desafios e perspectivas*. 2013. Personal communication.

LACANALLO, L. F. *O Jogo no Ensino da Matemática: Contribuições para o Desenvolvimento do Pensamento Teórico*. Tese (Tese (Doutorado em Educação)) — UEM, Maringá, 2011. Disponível em: <http://www.ppe.uem.br/teses/2011-Luciana-Lacanalo.pdf>. Acesso em: 16 dez. 2014.

LACROIX, S.; PROUHET, E. *Éléments de géométrie*. Mallet-Bachelier, 1855. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=-JFTAAAAYAAJ>.

LAMY, J.-B. et al. Which graphical approaches should be used to represent medical knowledge? In: *Connecting Medical Informatics and Bio-informatics: Proceedings of MIE2005 : the XIXth International Congress of the European Federation for Medical Informatics*. IOS Press, 2005. (Studies in health technology and informatics), p. 719–724. ISBN 9781586035495. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=HXTk5rWOdG4C>.

LAVAQUI, V.; BATISTA, I. d. L. Interdisciplinaridade em ensino de ciências e de matemática no ensino médio. *Ciência e Educação*, v. 13, n. 3, p. 399–420, julho 2013. ISSN 1980-850X. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v13n3/a09v13n3.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2014.

LEITE, O. *Geometria analítica espacial*. Loyola, 1996. ISBN 9788515011278. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=OG2xc6uA1R8C>.

LOPES, C. E. L. Os desafios e as perspectivas para a educaçao matemática no ensino médio. *Sessão Trabalho Encomendado – Anped34 - 2011*, p. 3–17, 2011. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/noticia/docs/TextosGT19Anped2011_TrabEncomendado.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2014.

LOPES, J. M. B. *Lecture notes in Rasterização*. [s.n.], 2004. Disponível em: <http://disciplinas.ist.utl.pt/leic-cg/textos/livro/Rasterizacao.pdf>.

LOPES, S. R.; VIANA, R. L.; LOPES, S. V. d. A. *A construção de conceitos matemáticos e a prática docente*. Curitiba: Ibpex, 2005.

MACHADO, N. J. Interdisciplinaridade e matemática. *Revista Quadrimental da Faculdade de Educação–UNICAMP–Pro-posições. Campinas*, n. 1, p. 10, 1993. Disponível em: <http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-machadonj.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2014.

MCADAMS, J. K.; DEKOCK, A. R. Computer graphics as an aid to teaching geometric transformations. In: *Proceedings of the ACM SIGCSE-SIGCUE Technical Symposium on Computer Science and Education*. New York, NY, USA: ACM, 1976. (SIGCSE '76), p. 137–143. Disponível em: <http://doi.acm.org/10.1145/800107.803463>.

MEC. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. ISBN 85-98171-43-3. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>.

MEHL, S. *LACROIX Sylvestre François, français, 1765-1843*. s.d. Disponível em: <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Lacroix.html>.

MINAYO, M. C. S. *Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social*. Petrópolis: Vozes, 1994. 9-29 p. (18).

MIORIM, M. *Introdução à história da educação matemática*. Atual Editora, 1998. ISBN 9788570568700. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=Ts5RAQAACAAJ>.

MOITA, F. M. G. d. S. C. *Games: Contexto Cultural e Curricular Juvenil*. Tese (Doutorado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA, João Pessoa, 2006. Disponível em: <http://www.filomenamoita.pro.br/pdf/tese-games.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2014.

MUNHOZ, M. d. O. *Propostas metodológicas para o ensino da Matemática*. Curitiba: Ibpex, 2011.

Towards real-time ray-tracing of combinatorial solid geometric models.

PARANÁ, S. D. E. D. E. D. *DIRETRIZES CURRICULARES DA EDUCAÇÃO BÁSICA MATEMÁTICA*. [s.n.], 2008. Disponível em: <http://www.diaadia.pr.gov.br/nre/irati/arquivos/File/matematica.pdf>.

Interactive ray tracing. 12 p.

PELIZZARI, A. et al. Teoria da aprendizagem significativa segundo ausubel. *Rev. PEC, Curitiba*, v. 2, n. 1, p. 37–42, jul 2002. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/storage/materiais/0000012381.pdf>.

PIQUERES, J. V. *The average office*. 2004. Disponível em: <http://hof.povray.org/office-13.html>.

PIRES, C. M. C. Formulações basilares e reflexões sobre a inserção da matemática no currículo visando a superação do binômio máquina e produtividade. *São Paulo: Educação Matemática Pesquisa*, 2004. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4688/3256>. Acesso em: 10 jul. 2014.

RITTNER, L. *PROCESSAMENTO DE IMAGENS MÉDICAS*. FEEC/UNICAMP, 2011. Disponível em: <http://adessowiki.fee.unicamp.br/media/Attachments/courseIA369O1S2011/Cap1/IA369O-Cap1.pdf>.

ROLKOUSKI, E. *Tecnologias no ensino de matemática*. Curitiba: Ibpex, 2011.

SANADA, E. d. R.; WAJSKOP, G. Como formar bons professores nos dias de hoje: efeitos do mercado de saber sobre a educação. In: *O DECLINIO DOS SABERES E O MERCADO DO GOZO*. FE/USP, 2010. p. 69–76. ISBN 978-85-60944-35-4. Disponível em: <http://www.proceedings.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=MSC0000000032010000100017&lng=en&nrm=abn>.

SANTOS, D. L.; LAVAL, A. História da educação matemática – escrita e reescrita de histórias. In: ____. Porto Alegre: Sulina, 2012. cap. Uma história concisa da geometria analítica, p. 170–207. ISBN 9788520506264. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=Vp1ILgEACAAJ>.

SANTOS, F. dos; FERREIRA, S. *Geometria Analítica*. Bookman, 2009. ISBN 9788577805037. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=-BiAN9AIG2gC>.

SANTOS, I. G.; SOUZA, J. R. Educação matemática e mídias tecnológicas: Uma possibilidade para a ação educativa? estudo da porcentagem na 6ª série. s.d. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1955-8.pdf?PHPSESSID=2010022609222258>.

SCHNEIDERMAN, B.; PLAISANT, C. *Designing the User Interface: Strategies for Effective Human-Computer Interaction*. Addison-Wesley Publishiers, 2004. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~scuri/download/fid.pdf>.

SCURI, A. E. *Fundamentos da Imagem Digital*. Tecgraf/PUC-Rio, 2002. Disponível em: <http://webserver2.tecgraf.puc-rio.br/~scuri/download/fid.pdf>.

SHKLYAR, D. 3d rendering history. s.d. Disponível em: <http://www.cgsociety.org/index.php/CGSFeatures/CGSFeatureSpecial/3d_rendering_history_part_1._humble_beginnings>.

SILVA, C. M. S. d. Os"espinhos"da álgebra para lacroix. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática. ISSN 1983-3156*, v. 13, n. 1, 2011.

SILVA, O. M. M. Análise do uso das mídias na prática pedagógica dos professores de uma escola pública da rede estadual de ensino do estado de alagoas. *Encontro de Pesquisa em Educação de Alagoas (EPEAL)*, 2011. ISSN 1981-3031. Disponível em: <http://dmd2.webfactional.com/media/anais/ANALISE-DO-USO-DAS-MIDIAS-NA-PRATICA-PEDAGOGICA-DOS-PROFESSORES-DE-UMA-ESCOLA-PUBLICA-DA-REDE-EST.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2014.

SOARES, S. R. *Um estudo histórico do ensino de geometria analítica no curso de matemática da UFJF nas décadas de 1960 e 1970*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — UNIVERSIDADE FEDERAL DE JUIZ DE FORA, Juiz de Fora (MG), Março 2013. Disponível em: <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2011/05/Disserta%C3%A7ao-final-Susana-Soares.pdf>.

STRUIK, D. *A Concise History of Mathematics*. G. BELL AND SONS LTD, 1954. Disponível em: <https://ia801707.us.archive.org/34/items/AConciseHistoryOfMathematics/Struik-AConciseHistoryOfMathematics.pdf>.

TIRONI, C. R.; SILVA, V. L. d. Souza e. Experiências interdisciplinares na educaçao básica: o caso do laboratório de educaçao matemática isaac newton. 2013. Disponível em: <http://www.siiepe.ufsc.br/wp-content/uploads/2013/10/K-Tironi.pdf>. Acesso em: 08 jun. 2014.

TRIVIñOS, A. N. S. *Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação*. São Paulo: Atlas, 1987.

VELHO, L. *Retrato da Computacao Gráfica*. 2005. Personal communication. Disponível em: <http://lvelho.impa.br/hp/clips/zona.html>. Acesso em: 10 jul. 2014.

WACHILISK, M. *Didática e Avaliação: Algumas Perspectivas da Educação Matemática*. Curitiba: Ibpex, 2007.

XPTA. *Sistema Multiprojeção para Múltiplas Visões de Dados Coordenadas para suporte a Análise de Grandes Bases de Dados Multidimensionais*. s.d. Disponível em: <http://xpta.sourceforge.net/>.

Apêndices

A CÓDIGOS EM SDL

A.1 CÓDIGO-BASE PARA TODAS AS CENAS

A seguir é apresentado o código comum a ser utilizado para todas as cenas que deverão ser codificadas em prol do objetivo que é o cumprimento das atividades propostas. Visto que o objetivo das atividades reside no foco do aprendizado de Geometria Analítica e não de Computação Gráfica, o código abaixo foi simplificado de forma que se torne entendível pelo aluno que queira ir além da Geometria Analítica.

Para tornar mais simples a reutilização deste código abaixo, recomenda-se que o mesmo seja armazenado em um arquivo à parte, em uma pasta que conterá os outros códigos das atividades à serem respondidas. Consideraremos que o referido código será armazenado em um arquivo de nome *“base_cena.pov”*.

```
//____________________________________________________________________________
/* Este trecho de codigo contem diretrizes comuns a praticamente todas as cenas de todas as
   atividades que serao desenvolvidas */

#include"math.inc"     //especifica a disponibilizacao de funcoes matematicas
#include "colors.inc" //especifica a disponibilizacao de cores para serem usadas no codigo

//____________________________________________________________________________
/* os comandos "#include" abaixo especificam as texturas e materiais que estarao disponiveis
   para serem utilizadas no resto do codigo */
#include "textures.inc"
#include "stones.inc"
#include "shapes.inc"
#include "glass.inc"
#include "metals.inc"
#include "woods.inc"
#include "metals.inc"
#include "glass.inc"

/* Para definirmos uma Textura devemos ao menos definir os parametros Pigment e Finish
   Pigment (Pigmento): cor ou padrao de cores inerentes ao material
   Finish (Finalizacao): descreve as propriedades reflectivas do material
*/

//Declaracoes de Pigmentos que serao usados
#declare bronze_reflexao_suave = pigment { P_Copper5 }
#declare prateado3             = pigment { P_Silver3 }
#declare cor_vidro_azul        = pigment { color rgbf <0.4, 0.4, 0.7, 0.99> }

//Declaracoes de Finalizacoes (Finish) que serao usadas
#declare metal_reflectividade_media = finish{ F_MetalC }
#declare vidro_reflectividade_media = finish{ F_Glass4 }

//Declaracoes das Texturas que serao usadas
#declare textura_cobre = texture {
   bronze_reflexao_suave
   metal_reflectividade_media
```

```
}

#declare textura_prata = texture {
   prateado3
   metal_reflectividade_media
}

#declare textura_vidro_azul = texture {
   cor_vidro_azul
   vidro_reflectividade_media
}
//________________________________________________________________________

#declare ponto_de_vista = <1,2.2,1.3>; //define o vetor no espaco onde sera alocado o viewpoint

camera {           /* cria uma camera do tipo PERSPECTIVA na cena */
 location ponto_de_vista /* coloca a camera no "ponto de vista" definido */
 up y              /* informa altura da tela de visualizacao relativo ao comprimento */
 right x           /* informa o comprimento da tela de visualizacao relativo a altura */
                   /* os vetores up e right definem o Aspect Ratio (Razao de Aspecto)
                      que e a razao do comprimento pela altura da imagem resultante */
 angle 60          /* especifica o angulo (graus) de visao horizontal da camera utilizada */
 sky <0,0,1>       /* imagine que o vetor ceu como uma antena apontando para fora do topo
                      da camera, o vetor ceu modifica a maneira como vetor look_at a gira */
 look_at <0,0,0> /* rotaciona a camera para apontar para as coordenadas <0,0,0,> do vetor
              em geral, o ponto de "look_at" deveria ser o centro da atencao principal da imagem*/
}

background {      /* uma cor de fundo pode ser especificada, assim qualquer raio que nao atinja
                 um objeto sera colorido com esta cor. A cor de fundo padrao e preto (black) */
 color rgb <1,1,1> /* especifica o vetor de cor para a cor BRANCO (white) */
}

light_source {        /* especifica o tipo mais simples de fonte de luz que e uma Point Light
                         (Luz de Ponto), que e o tipo padrao. Uma Point Light emite luz da cor
                         especificada uniformemente em todas as direcoes */
 ponto_de_vista + <0,0,2> //define o vetor que representara o local onde ficara a fonte de luz
 color rgb <1,1,1>        //define a cor que sera utilizada para iluminar a cena
}
```

A.2 CÓDIGO-SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 01

O código abaixo será armazenado em um arquivo de nome *"atividade01.pov"*.

```
//________________________________________________________________________
//o #include abaixo inclui todos os codigos da cena base, como consta definido no Apendice A.1
#include "base_cena.pov"

//________________________________________________________________________
/* o trecho de codigo a seguir define os vertices, arestas e faces do tetraedro */

/* Vertices serao representadas como esferas e como um tetraedro tem 4 vertices,
   criaremos 4 esferas para representa-los */
#declare raio_da_esfera = 0.1; //declaracao da variavel chamada "raio_da_esfera" para armazenar
                               //o valor do raio que usaremos para criacao das esferas

union { /* embora possamos criar as esferas de forma totalmente independente, vamos agrupa-las
```

```
          com o comando "union", a vantagem disso decorre da definicao unica da textura que
          sera aplicada ao mesmo tempo para todas as esferas */
   sphere { < 1,  1,  1>, raio_da_esfera } /* especifica a criacao de uma esfera com centro
                                              definido pelo vetor < 1,  1,  1> e raio definido
                                              pela variavel "raio_da_esfera" */
   sphere { <-1,  1, -1>, raio_da_esfera }
   sphere { < 1, -1, -1>, raio_da_esfera }
   sphere { <-1, -1,  1>, raio_da_esfera }
   texture { textura_cobre }        /* especifica que a textura "textura_cobre" sera
                                       utilizada para recobrir as superficies das esferas */
}

/* Arestas serao representadas como cilindros e como um tetraedro tem 6 arestas, criaremos
   6 cilindros para representa-los */

#declare raio_do_cilindro = 0.05; //declaracao da variavel chamada "raio_do_cilindro" para
                   // armazenar o valor do raio que sera usado para criacao dos cilindros

union { /* embora possamos criar os cilindros de forma totalmente independente, vamos
          agrupa-los com o comando "union", a vantagem disso decorre da definicao unica da
          textura que sera aplicada ao mesmo tempo para todos os cilindros */
   cylinder { < 1,  1,  1 > , < -1,  1, -1 > , raio_do_cilindro }
        /* o comando acima cylinder especifica a criacao de um
           cilindro com centro da base inferior < 1,  1,  1>,
           centro da base superior < -1,  1, -1>
           e raio definido pela variavel "raio_do_cilindro" */
   cylinder { < 1,  1,  1>, < 1, -1, -1>, raio_do_cilindro }
   cylinder { < 1, -1, -1>, <-1,  1, -1>, raio_do_cilindro }
   cylinder { < 1,  1,  1>, <-1, -1,  1>, raio_do_cilindro }
   cylinder { <-1, -1,  1>, < 1, -1, -1>, raio_do_cilindro }
   cylinder { <-1, -1,  1>, <-1,  1, -1>, raio_do_cilindro }
   texture { textura_prata } /* especifica que a textura "textura_prata" sera utilizada
                                para recobrir as superficies dos cilindros */
}

/* Faces serao representadas como triangulos e como um tetraedro tem 4 faces, criaremos
   4 triangulos para representa-los */

union { /* embora possamos criar as faces de forma totalmente independente, vamos
          agrupa-las com o comando "union", a vantagem disso decorre da definicao unica da
          textura que sera aplicada ao mesmo tempo para todas as faces */
        triangle { < 1,  1,  1>,  <-1,  1, -1>,  < 1, -1, -1> }
          /* o comando triangle acima especifica a criacao de um triangulo com vertices
             definidos pelos vetores < 1, 1, 1 > , < -1, 1, -1 > e < 1, -1, -1 > */
        triangle { <-1,  1, -1>,  <-1, -1,  1>,  < 1, -1, -1> }
        triangle { < 1,  1,  1>,  < 1, -1, -1>,  <-1, -1,  1> }
        triangle { < 1,  1,  1>,  <-1, -1,  1>,  <-1,  1, -1> }
        texture { textura_vidro_azul } /* especifica que a textura "vidro_azul" sera
                                          utilizada para recobrir as faces do tetraedro */
}
```

A.3 CÓDIGO-SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 02

O código abaixo será armazenado em um arquivo de nome *“atividade02.pov”*.

```
//______________________________________________________________________________________
//o #include abaixo inclui todos os codigos da cena base, como consta definido no Apendice A.1
```

```
#include "base_cena.pov"

//______________________________________________________________________________________________
/* o trecho de codigo a seguir define as esferas que irao compor o cubo de cores RGB/CMY */

#declare densidade_pontos = 255; //deve variar entre 8 e 255
#declare raio_da_esfera = 1/(110-(log(densidade_pontos)/log(2)-3)*20);
         //o raio das esferas e calculado automaticamente pela formula e varia entre 1/0.01 e 0.1

/* o codigo com o while representa um loop (repeticao), a ideia e variarmos as variaveis
   vermelho, verde e azul nos intervalos entre 0 e 255, de forma que consigamos produzir
   as principais cores totalizando 16.777.216 de cores se for definida a "densidade_pontos"
   igual a 1, cada cor esta sendo representada por uma esfera que tem centro exatamente no
   ponto do espaco de cores que representa a respectiva cor */
union{
#declare vermelho = 0;
#while(vermelho <= 255)
    #declare verde = 0;
    #while(verde <= 255)
        #declare azul = 0;
        #while(azul <= 255)
          sphere { <vermelho/256,verde/256,azul/256>,
                   raio_da_esfera
                   texture {
                       pigment{
                          color rgb <vermelho/256,verde/256,azul/256>
                       }
                   }
                 }
          #declare azul = azul + densidade_pontos;
        #end
        #declare verde = verde + densidade_pontos;
    #end
    #declare vermelho = vermelho + densidade_pontos;
#end
translate <-0.5, -0.5, -0.5>             //desloca o cubo de forma que o centro do universo
                                         //coincida com o centro do cubo
rotate<-180*clock,-180*clock,-180*clock> //usado pelo arquivo .ini para animar a rotacao
}
```

O código abaixo será armazenado em um arquivo de nome *“atividade02.ini”* responsável pela animação da rotação do cubo representativo do espaço vetorial 3D de cores que une os sistemas de cores RGB e CMY.

```
Antialias=On
Antialias_Threshold=0.5
Antialias_Depth=5

Input_File_Name=atividade02.pov

Initial_Frame=1
Final_Frame=50
Initial_Clock=0
Final_Clock=4.1

Cyclic_Animation=on
Pause_when_Done=off
```

A.4 CÓDIGO-SOLUÇÃO DA ATIVIDADE 03

O código abaixo será armazenado em um arquivo de nome *“atividade03.pov”*.

```
//______________________________________________________________________________
#include "papel_quadriculado.pov"
//______________________________________________________________________________
/* Algoritmo de Bresenham para Aritmetica Inteira
   Ao considerar todos os vetores de (x0,y0) ate (x1,y1), podemos verificar que existem oito
   regioes (chamadas de 'octantes') e o algoritmo basico de Bresenham funciona em apenas um
   deles. Uma implementacao completa do algoritmo de Bresenham deve, obviamente, ser capaz de
   manipular todas as combinacoes de inclinacoes e ordenacoes de pontos.

   Abaixo e apresentada a versao basica do algoritmo de Bresenham para aritmetica inteira e
   que funciona apenas para o caso: x0 < x1 e 0 <= m <= 1
*/

#declare x0 = 1;
#declare y0 = 1;
#declare x1 = 12;
#declare y1 = 5;

#macro bresenham(x0,y0,x1,y1)
  #declare dx = x1 - x0;
  #declare dy = y1 - y0;
  #local D = 2 * dy - dx;

  box{<x0, y0, 0>,<x0+1, y0+1, -0.01>}

  #declare y_local = y0;

  #for (x_local, x0 + 1, x1, 1)
    #if (D > 0)
      #declare y_local = y_local + 1;
      box{<x_local,y_local,0>,<x_local + 1, y_local + 1, -0.01>}
      #declare D = D + (2 * dy - 2 * dx);
    #else
      box{<x_local,y_local,0>,<x_local + 1, y_local + 1, -0.01>}
      #declare D = D + (2 * dy);
    #end
  #end
#end
bresenham(x0,y0,x1,y1)

union{
#declare X    =  x0;
#declare EndX = x1;
#declare m = dy/dx;
#declare b = y1 - m * x1;
#while ( X <= EndX )
  sphere{ <0,0,0>,0.06
          pigment{color rgb<1,0,0>}
          translate< X, m * X + b, 0>
        }
  #declare X = X + 0.03;
#end
}
```

O código abaixo será armazenado em um arquivo de nome *"papel_quadriculado.pov"*. O código é uma adaptação do código que pode ser baixado em <http://www.f-lohmueller.de/pov_tut/calc/pov/grid01.pov>.

```
#version 3.7;
global_settings{assumed_gamma 1.0}
#default{ finish{ ambient 0.1 diffuse 0.9 }}
//__________________________________________________________________________
#include "colors.inc"
#include "textures.inc"
//__________________________________________________________________________
camera { orthographic
         location  < 8.0, 6.0,-15.0>
         look_at   < 8.0, 6.0, 0.00>
         angle 60
         right     x*image_width/image_height
}

//__________________________________________________________________________
// sun _____________________________________________________________________
light_source{<1000,1000,-2500> color White}
// sky _____________________________________________________________________
sky_sphere{ pigment{ gradient <0,1,0>
                     color_map{ [0   color rgb<1,1,1>          ]//White
                                [0.4 color rgb<0.14,0.14,0.56>]//~Navy
                                [0.6 color rgb<0.14,0.14,0.56>]//~Navy
                                [1.0 color rgb<1,1,1>          ]//White
                              }
                     scale 2 }
           } // end of sky_sphere

//______________________________ the Axes _________________________________
//__________________________________________________________________________
#macro Axis( AxisLen, Dark_Texture, Light_Texture)
 union{
    cylinder { <0,-AxisLen-0.5,0>,<0,AxisLen,0>,0.035
               texture{checker texture{Dark_Texture }
                               texture{Light_Texture}
               translate<0.1,0,0.1>}
             }
    cone{<0,AxisLen,0>,0.15,<0,AxisLen+0.45,0>,0
         texture{Dark_Texture}
        }
     } // end of union
#end // of macro "Axis()"
//__________________________________________________________________________
#macro AxisXY( AxisLenX, AxisLenY, Tex_Dark, Tex_Light)
//_____________________ drawing of 3 Axes _________________________________
union{
#if (AxisLenX != 0)
 object { Axis(AxisLenX, Tex_Dark, Tex_Light)   rotate< 0,0,-90>}// x-Axis
 text   { ttf "arial.ttf",  "x",  0.15,  0  texture{Tex_Dark}
          scale 0.5 translate <AxisLenX+0.15,0.2,-0.05>}

 #declare j = 1;
 #while ( j < 17 )
     text   { ttf "arial.ttf",  str(j,0,0),  0.15,  0  texture{Tex_Dark}
              scale <0.6,0.35,0.6> translate <j - 0.3,-0.35,-0.02>}
  #declare j = j + 1;
```

```
 #end
#end // of #if
#if (AxisLenY != 0)
 object { Axis(AxisLenY, Tex_Dark, Tex_Light)   rotate< 0,0,  0>} // y-Axis
 text   { ttf "arial.ttf",  "y",  0.15,  0  texture{Tex_Dark}
          scale 0.5 translate <-0.35,AxisLenY+0.15,-0.05>}
 #declare j = 0;
 #while ( j < 17 )
     text   { ttf "arial.ttf",  str(j,0,0),  0.15,  0  texture{Tex_Dark}
             scale <0.6,0.35,0.6> translate <-0.35,j-0.3,-0.02>}
  #declare j = j + 1;
 #end
#end // of #if
} // end of union
#end// of macro "AxisXY( //... )"
//------------------------------------------------------------------------

#declare Texture_A_Dark  = texture {
                              pigment{color rgb<1,0.05,0>}
                              finish {ambient 0.1 diffuse 0.6 phong 1}
                            }
#declare Texture_A_Light = texture {
                              pigment{color rgb<1,0.55,0.3>}
                              finish {ambient 0.1 diffuse 0.6 phong 1}
                            }

object{ AxisXY( 20.0, 20.0, Texture_A_Dark, Texture_A_Light)}
//---------------------------------------------------- end of coordinate axes


// ground -----------------------------------------------------------------
//--------------------------------</<<< settings of squared plane dimensions
#declare RasterScale = 1;
#declare RasterHalfLine  = 0.035;
#declare RasterHalfLineY = 0.035;
//------------------------------------------------------------------------
#macro Raster(RScale, HLine)
       pigment{ gradient x scale RScale
                color_map{[0.000   color rgbt<1,1,1,0>*0.5]
                          [0+HLine color rgbt<1,1,1,0>*0.5]
                          [0+HLine color rgbt<1,1,1,1>]
                          [1-HLine color rgbt<1,1,1,1>]
                          [1-HLine color rgbt<1,1,1,0>*0.5]
                          [1.000   color rgbt<1,1,1,0>*0.5]} }
       finish { ambient 0.15 diffuse 0.85}
 #end// of Raster(RScale, HLine)-macro
//------------------------------------------------------------------------


plane { <0,1,0>, 0    // plane with layered textures
        texture { pigment{color White*1.1}
                  finish {ambient 0.45 diffuse 0.85}}
        texture { Raster(RasterScale,RasterHalfLine ) rotate<0,0,0> }
        texture { Raster(RasterScale,RasterHalfLineY) rotate<0,90,0>}
        rotate<-90,0,0>
      }
```