UFRR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

JORGE LUIZ CREMONTTI FILHO

O USO DA APRENDIZAGEM MÓVEL E TÉCNICAS DE GAMIFICAÇÃO COMO SUPORTE AO ENSINO DE MATRIZES

Boa Vista - RR

2016

JORGE LUIZ CREMONTTI FILHO

O USO DA APRENDIZAGEM MÓVEL E TÉCNICAS DE GAMIFICAÇÃO COMO SUPORTE AO ENSINO DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva

Boa Vista - RR

2016

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

C915u Cremontti Filho, Jorge Luiz.
O uso da aprendizagem móvel e técnicas de gamificação como suporte ao ensino de matrizes / Jorge Luiz Cremontti Filho. – Boa Vista, 2016.
152 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 – Educação matemática. 2 – Aprendizagem móvel. 3 – Gamificação. 4 – Matrizes. 5 – Aplicações móveis. I – Título. II – Silva, Luciano Ferreira (orientador).

CDU – 512.64

JORGE LUIZ CREMONTTI FILHO

O USO DA APRENDIZAGEM MÓVEL E TÉCNICAS DE GAMIFICAÇÃO COMO SUPORTE AO ENSINO DE MATRIZES

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Defendida em 10 de agosto de 2016, e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Luciano Ferreira Silva

Prof. Dr. Luciano Ferreira Siva
Orientador / UFRR

Humberto José Bortolossi

Prof. Dr. Humberto José Bortolossi
UFF

Lindeval F. Lima

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
UFRR

Dedico a minha amada esposa Reijane, companheira em todas as horas.

AGRADECIMENTOS

A Deus por proporcionar-me saúde, fé e esperança para a conquista deste sonho.

A minha família pela compreensão diante de minhas ausências e estímulos nos momentos de dificuldades.

Aos Professores do PROFMAT, pois sem eles esta caminhada seria infrutífera.

Aos colegas Altino, Bruno, Hewerton, Gilson (*in memoriam*) e Reginaldo pelos muitos momentos de companheirismo demonstrados durante o curso.

Ao Professor Dr. Luciano Ferreira Silva, pelas orientações oportunas e fundamentais para a consecução deste trabalho.

"O homem sábio é forte, e o homem de conhecimento consolida a força."
(Provérbios 24:5)

RESUMO

A melhoria na qualidade do ensino matemático resulta de diversos fatores como: qualificação dos professores, busca de novos modelos pedagógicos e inclusão da tecnologia aos processos de aprendizagem. Existe um grande distanciamento entre a tecnologia e a sala de aula, principalmente quando se fala em ensino público, e é nessa problemática que este trabalho busca contribuir com soluções alternativas. Aproveitando a enorme demanda dos aparelhos móveis e a forte influência que esses dispositivos detém sobre os jovens, buscou-se fundamentar o trabalho realizando pesquisas sobre os aspectos pedagógicos da aprendizagem móvel e, em virtude do fascínio exercido pelos jogos digitais, foram estudadas as técnicas de gamificação. Nesse contexto, foi desenvolvido um aplicativo tipo perguntas e respostas (QUIZ), de acordo com os preceitos da aprendizagem móvel e utilizando os recursos motivacionais da gamificação. Como tópico matemático, foi utilizado matrizes e determinantes devido a contemporaneidade do assunto e sua diversidade de aplicações. Com a finalidade de validar os objetivos, foi realizado um experimento com alunos do Ensino Médio do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Roraima, onde após a utilização do aplicativo foi distribuído um questionário a alunos e professores. E, com a tabulação dos resultados, foi realizada uma breve avaliação de alguns aspectos deste trabalho.

Palavras-chave: Educação matemática, Aprendizagem Móvel, Gamificação, matrizes, determinantes, aplicações móveis

ABSTRACT

The improvement in the quality of mathematics teaching is the result of several factors such as the qualification of teachers, the search for new pedagogical models and the inclusion of technology to learning processes.There is a large gap between the technology and the classroom, especially when it comes in public education, and it is this problem that this work seeks to contribute to alternative solutions. Taking advantage of the huge demand of mobile phones and the strong influence that this device has on young people, we seek to support our application conducting research on the pedagogical aspects of mobile learning and, because of the fascination exerted by digital games, we studied the techniques of gamification. In this context, it was developed an application questions and answers (QUIZ), according to the precepts of mobile learning and using the motivational resources of gamification. As mathematical topic was used matrices and determinants due to this matter be current and its range of applications. For the purpose to validate the goals was carried out an experiment with high school students of the College Application of the Federal University of Roraima, where after using the application has distributed a questionnaire to students and teachers. And with the tabulation of results, there was a brief review of some aspects of this work.

Key-words: Mathematics education, Mobile Learning, gamification, matrices, determinants, mobile applications

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Uma das maiores preocupações de todo professor de matemática é a de como melhorar os padrões de educação matemática de seus alunos. Em Inep (2014) e Inep (2015), pode-se verificar a média dos pontos obtidos em matemática, dos alunos das escolas públicas na cidade de Boa Vista, no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), referente aos anos de 2013 e 2014, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 – Média de pontos obtidos em Matemática, por escola.

Média de Pontuação	ano de 2013	ano de 2014
Pontuação máxima	488	448
Pontuação mínima	433	418

Fonte: Autor

A pontuação é baixa considerando que se pode atingir mais de 900 pontos no referido exame. Afirma Castro (2007), que "todas as avaliações nacionais e internacionais apresentam sistematicamente resultados inaceitáveis", evidenciando o quanto é necessário melhorar esses índices. Ainda de acordo com Castro (2007), "melhorar a qualidade da educação básica é hoje o maior e mais importante desafio do país no campo das políticas sociais".

Em particular, segundo Sanches (2002), "a álgebra das matrizes tem importância significativa para várias ciências e encontra cada vez mais, aplicações em diversos setores como a Economia, a Engenharia e Tecnologia. Se não ocorrer uma aprendizagem significativa e relevante dos conceitos de matrizes, os estudantes poderão apresentar dificuldades, em níveis mais avançados, para compreender e aplicar outros conceitos relacionados, tais como: conceitos de programação, computação gráfica, custos de produção, teoria dos grafos, circuitos elétricos, modelos econômicos lineares, entre centenas de outros".

Sabe-se que a quantidade de assuntos a serem abordados no Ensino Médio é vasta, havendo a necessidade de um maior dinamismo do professor, o que pode ser facilitado pela utilização da tecnologia.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais Brasil (2006) estabelecem que o aluno deve utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação, logo o esforço pode ser minimizado se o professor apropriar-se dos recursos tecnológicos, que podem auxiliá-lo dentro e fora da sala de aula. Dentre esses recursos tecnológicos, na atualidade, destacam-se os dispositivos móveis (*smartphones* e tabletes).

De acordo com UNESCO (2014):

> À medida que os dispositivos se tornam mais potentes, funcionais e baratos, aumenta também o seu potencial de apoiar o aprendizado de modos inusitados. Esse potencial vem sendo destacado por iniciativas inovadoras de aprendizagem móvel do mundo inteiro (FRITSCHI; WOLF, 2012b; HYLÉN, 2012; ISAACS, 2012b; LUGO; SCHURMANN, 2012; ROSCHELLE, 2003; SO, 2012; WEST, 2012b). De uma forma ou de outra, muitos desses projetos, para não dizer a maioria, estão ajudando os estudantes a aprender.

Dispositivos móveis em sua maioria são portáveis e conectam-se à Internet ou outras redes, dependendo do modelo, têm capacidade multimídia e realizam um grande número de tarefas, como editar textos, planilhas, agendas etc.

Segundo UNESCO (2014), com o crescente aumento do uso de dispositivos móveis em ambientes educacionais, os aplicativos deverão tornar-se uma parte importante da aprendizagem móvel.

Schlemmer et al. (2007) define Aprendizagem Móvel como os processos de ensino e de aprendizagem que ocorrem, necessariamente, apoiados pelo uso de tecnologias móveis sem fio, em espaços diversos bem como em espaços de educação formal, tais como salas de aula, salas de treinamento, formação e qualificação ou local de trabalho.

Uma técnica que vem sendo muito utilizada em aplicativos é a gamificação, que é a utilização de recursos dos jogos, tais como *design* e mecânica para enriquecer contextos diversos normalmente não relacionados a jogos.

Motivado pelo crescente número de pesquisas sobre gamificação, o interesse pela estratégica e seu emprego tem aumentado na área de educação. Como exemplo temos o Geekgames, uma plataforma online de aprendizado, onde estudantes preparam-se para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), através de desafios, tendo acesso ao resultado obtido e identificação de dificuldades a serem sanadas. De acordo com Vianna et al. (2013):

> Os resultados foram considerados positivos e o Ministério de Educação levantou a possibilidade de também gamificar a avaliação do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA), que mede a habilidade de estudantes de 15 anos em matemática, leitura e ciências, e a Prova Brasil, exame realizado com alunos de 5º e 9º anos do ensino fundamental e 3º ano de ensino médio de escolas públicas brasileiras.

Este crescente interesse, segundo Kapp (2012), pode ser explicado pelo potencial da gamificação para influenciar, engajar e motivar pessoas.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver e validar um aplicativo que auxilie o usuário de *smartphones* e tabletes no estudo de matrizes, baseando-se em conceitos da aprendizagem móvel e técnicas de gamificação.

1.1.2 Objetivos Específicos

a) Fazer um estudo das Matrizes por meio das definições, teoremas e propriedades enfatizando suas aplicações;

b) Estudar as linguagens de programação para o desenvolvimento de aplicativos em dispositivos móveis;

c) Estudar e verificar a viabilidade das técnicas de gamificação;

d) Interligar a tecnologia com a educação através da aprendizagem móvel;

e) Propor, desenvolver e validar uma aplicação para dispositivos móveis com o ensino de matrizes baseado em técnicas de gamificação;

f) Construir um acervo de aplicações do estudo de matrizes em aparelhos móveis.

1.2 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Este trabalho está organizado em 6 capítulos. O capítulo 2 contém uma revisão da literatura referente ao estudo de matrizes, os conceitos que envolvem a Aprendizagem Móvel e estabelecem as principais técnicas da Gamificação, que serviu de base para o desenvolvimento do aplicativo. O capítulo 3 apresenta um resumo de trabalhos já realizados com relevância para a nossa dissertação. No capítulo 4 é apresentada uma descrição detalhada das funcionalidades do aplicativo. No capítulo 5 consta uma pesquisa exploratória, na qual foi verificado junto a alunos do ensino médio de uma instituição educacional de Boa Vista, sobre o funcionamento e a aceitabilidade do aplicativo que foi desenvolvido. E por fim, é apresentado as conclusões sobre o trabalho realizado.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 MATRIZES

De acordo com Sanches (2002) é importante que o processo de aprendizagem do conhecimento matemático ocorra a partir do estudo histórico, pois quando se faz a análise dos obstáculos vividos, no passado, por estudiosos da Matemática, pode-se compreender os erros cometidos hoje pelos alunos.

De acordo com Santos (2007):

> A teoria dos determinantes e das matrizes é resultado de uma longa evolução através da História. Ganha, portanto, significado bastante preciso a afirmação encontrada em BOURBAKI (1999) de que o tema "é um dos mais antigos e um dos mais novos da Matemática".

2.1.1 HISTÓRICO

Encontra-se traços da origem do estudo de matrizes e determinantes, na China do século II a.C., onde o livro Nove Capítulos sobre a Arte Matemática, em seu Capítulo 8 contém procedimentos matriciais e problemas que levam a sistemas de equações lineares. Boyer e Merzbach (2012) descrevem um algoritmo retirado do texto para resolução dos sistemas, que requer a organização dos coeficientes de cada equação em colunas de uma tabela (matriz), que após o processo de eliminação se reduz a uma tabela (matriz) triangular, cuja essência foi reproduzida, bem mais tarde pelo Método da Eliminação de Gauss.

No final do século XVII, Boyer e Merzbach (2012) atribuíram a Gottfried Leibniz a primeira referência no Ocidente ao estudo de determinantes e matrizes. Leibniz escreveu sobre o uso de determinantes em sistemas lineares de três equações a duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3, e estabeleceu uma notação que usava números para as linhas e colunas da coleção de equações, como segue abaixo:

$$\begin{cases} 1_0 + 1_1x + 1_2y = 0, \\ 2_0 + 2_1x + 2_2y = 0, \\ 3_0 + 3_1x + 3_2y = 0, \end{cases}$$

ficando muito próxima da notação atual:

$$\begin{cases} a_1 + b_1x + c_1y = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y = 0 \end{cases}$$

Ao longo do tempo, as matrizes eram aplicadas quase que exclusivamente na resolução de sistemas lineares e, somente no século XIX, tiveram sua importância detectada. A Regra de Cramer, utilizada para resolução de Sistemas Lineares através do cálculo de determinantes, foi publicada em 1750 por Gabriel Cramer. O tratado intitulado *Théorie Générale des Équations Algébriques*, publicado por Etienne Bézout em 1779, estabelece regras semelhantes a de Cramer. De acordo com Boyer e Merzbach (2012), para as equações $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, $a_3x+b_3y+c_3=0$ tenham solução comum, o determinante da matriz formada pelos coeficientes e termo independente das equações têm que ser zero.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Adrien Marie Legendre publicou em 1775, aplicações para a geometria analítica, embora expressas de forma um pouco diferente. Segundo Boyer e Merzbach (2012), para cálculo da área de um triângulo e volume de um tetraedro respectivamente, temos:

$$\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Em 1812, um artigo de Augustin-Louis Cauchy sobre determinantes, conforme Eves (2004), demonstra o teorema que garante que se A e B são matrizes nxn, então $|AB| = |A||B|$. Foi Cauchy quem, em 1840, introduziu a palavra "característica", na teoria de matrizes, chamando $|A - \lambda I| = 0$ de equação característica da matriz A, segundo Eves (2004).

Arthur Cayley foi um dos pioneiros no estudo da álgebra das matrizes, e por volta de 1850, divulgou esse nome passando a demonstrar sua aplicação. De acordo com Boyer e Merzbach (2012), Cayley afirmou que o desenvolvimento das matrizes originava-se dos determinantes, como modo conveniente de exprimir uma transformação. É visto em Boyer e Merzbach (2012), se por exemplo, após a transformação

$$T_1 \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + by \end{cases}$$

aplicar-se uma outra transformação

$$T_2 \begin{cases} x'' = Ax' + By' \\ y'' = Cx' + Dy' \end{cases}$$

o resultado é equivalente a uma única transformação composta

$$T_2T_1 \begin{cases} x'' = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ y'' = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}$$

Expressando na linguagem de matriz

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}$$

Se por outro lado, inverter-se a ordem de T_1 e T_2, tem-se uma transformação única

$$T_1T_2 \begin{cases} x'' = (aA + bC)x + (aB + bD)y \\ y'' = (cA + dC)x + (cB + dD)y \end{cases}$$

Expressa também na linguagem de matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA + bC & aB + bD \\ cA + dC & cB + dD \end{pmatrix}$$

Logo diante da definição da multiplicação de matrizes e sua propriedade não comutativa. Cayley passou a definir a soma de matrizes de mesma ordem, como a soma dos elementos correspondentes das matrizes, conforme descrito abaixo

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + A & b + B \\ c + C & d + D \end{pmatrix}$$

A multiplicação por um escalar K é definida pela equação

$$K \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ka & Kb \\ Kc & Kd \end{pmatrix}$$

O elemento neutro da multiplicação é a matriz Identidade, usualmente denotada por I e a matriz zero a matriz invariante da adição, definidas abaixo, em matrizes de ordem 2

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pode-se dizer que as matrizes passaram a ter vida própria e, gradativamente, começaram a suplantar os determinantes em importância, com trabalhos publicados por diversos matemáticos e físicos, até atingir a desejada consistência algébrica pelas mãos de Arthur Cayley e James J. Sylvester. E, por todo esse trajeto, as matrizes ganharam novas e importantes significações em diversos campos de interesse da matemática.

2.1.2 ESTUDO DE MATRIZES

Agora, um estudo das definições, operações e principais propriedades das matrizes baseado nas obras de Hefez e Fernandes (2014) e Iezzi e Hazzan (2004).

2.1.2.1 Definição

Dados m e $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, define-se uma matriz de ordem m por n, ou simplesmente uma matriz m por n, como uma tabela formada por elementos distribuídos em m linhas e n colunas.

Os elementos são chamados entradas da matriz e usualmente utiliza-se números reais, porém podem ser usados números complexos ou ainda elementos de um corpo K.

As matrizes são usualmente representadas por letras maiúsculas, e as entradas de uma matriz arbitrária $A_{m\times n}$ são denotadas pelos símbolos A_{ij} , ou ainda a_{ij} , onde os índices i e j indicam, respectivamente a linha e a coluna onde o elemento está posicionado. Por exemplo, a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de ordem 2×3, onde $a_{12} = 0$ e $a_{22} = 3$. Logo a matriz $A_{m\times n}$ é representada por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ou ainda $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

2.1.2.2 Algumas matrizes especiais

Dependendo dos valores de m e n e das características de suas entradas, as matrizes podem ter nomes especiais.

a) Matriz Quadrada

Chama-se matriz quadrada de ordem n, a matriz com mesmo número de linhas e colunas. A matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & \sqrt{2} \\ \dfrac{2}{5} & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

é uma matriz quadrada de ordem 3.

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem n, as entradas a_{ii} , com $1 \leq i \leq n$, formam a diagonal principal de A.

b) Matriz Diagonal

Matriz quadrada de ordem n em que os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

c) Matriz Identidade

Matriz diagonal cujas entradas da diagonal principal são iguais ao número real 1, usualmente denotada por I_n:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

d) Matriz Nula

Matriz de ordem $m \times n$ cujas entradas são todas iguais a zero. Por exemplo, a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma matriz nula de ordem 3×2.

e) Matriz Oposta

Seja a Matriz A de ordem $m \times n$ denotada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, define-se como a matriz oposta de A, a matriz denotada por $-A = (-a_{ij})_{m \times n}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$. Por exemplo, a matriz

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

é a matriz oposta da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

f) Matriz Transposta

Seja a Matriz A de ordem $m \times n$ denotada por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, define-se como a matriz transposta de A, a matriz denotada por $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$. Por exemplo, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

tem como transposta a matriz

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

2.1.2.3 Igualdade de matrizes

Tem-se $A = B$, quando $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$. Por exemplo, sejam

$$A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{pmatrix} \qquad e \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

Se $A = B$, então

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 2 \\ d = 3 \end{cases}$$

2.1.2.4 Operações com matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$, de mesma ordem, com a_{ij}, b_{ij} e $c_{ij} \in \mathbb{R}$.

a) Adição de Matrizes

A soma de A e B, denotada $A + B$, é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + (-3) & 1 + 1 \\ 4 + 5 & 3 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$$

A adição de matrizes tem propriedades semelhantes à adição nos números reais.

Proposição 2.2.1 *Se A, B e C são matrizes de mesma ordem, então admitem-se as seguintes propriedades:*

(i) ***associatividade da adição:*** $A + (B + C) = (A + B) + C$;

Demonstração. Se $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$, então

$$A + (B + C) = (a_{ij}) + [(b_{ij}) + (c_{ij})] = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}).$$

Como a_{ij}, b_{ij} e $c_{ij} \in \mathbb{R}$, pela propriedade associativa da adição para os números reais tem-se:

$$(a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = [(a_{ij}) + (b_{ij})] + (c_{ij}) = (A + B) + C.$$

(ii) ***comutatividade da adição:*** $A + B = B + A$;

Demonstração. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Como a_{ij} e $b_{ij} \in \mathbb{R}$, pela propriedade comutativa da adição para os números reais tem-se:

$$(a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}) = B + A.$$

(iii) ***elemento neutro da adição:*** $A + 0 = A$, onde 0 denota a matriz nula $m \times n$;

Demonstração. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, onde B é matriz nula, ou seja, $b_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}) = A.$$

(iv) ***anulamento:*** $A + (-A) = 0$.

Demonstração. Se $A = (a_{ij})$ e $-A = (-a_{ij})$, onde $-A$ é matriz oposta de A

$$A + B = (a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = (0).$$

b) Subtração de Matrizes

A subtração de A e B, denotada $A - B = A + (-B)$, é a matriz $C = (c_{ij})$ de ordem $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - (-3) & 1 - 1 \\ 4 - 5 & 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Multiplicação por escalar

Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, define-se o produto de A pelo número real k, como $kA = (ka_{ij})_{m\times n}$. Por exemplo:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -4 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

d) Multiplicação de matrizes

A multiplicação das matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$, denotada AB, é a matriz $C = (c_{ij})_{m\times p}$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{K=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{in}b_{nj},$$

para todo $1 \leq i \leq m$ e para todo $1 \leq j \leq n$. Nota-se que o produto matricial só está definido, se o número de colunas da primeira matriz é igual ao números de linhas da segunda matriz e a matriz resultante terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda. Por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 2\cdot 3 & 3\cdot(-1) + 2\cdot 4 \\ 2\cdot 2 + (-1)\cdot 3 & 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 4 \\ (-2)\cdot 2 + 3\cdot 3 & (-2)\cdot(-1) + 3\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 1 & -6 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

Verifica-se que o produto

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

não está definido, pois o número de colunas da primeira matriz (2 colunas) é diferente do números de linhas da segunda (3 linhas). Assim, vê-se que a multiplicação de matrizes não possui a propriedade comutativa ($AB = BA$).

Observa-se também que a matriz nula pode resultar de uma multiplicação de matrizes não nulas, como o por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 1\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 2 + 1\cdot(-2) & 1\cdot 2 + 1\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A seguinte proposição apresenta algumas propriedades da multiplicação de matrizes.

Proposição 2.2.2 *Desde que as operações sejam possíveis, admitem-se as seguintes propriedades:*

(i) ***distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição:*** $A(B+C) = AB + AC$;

Demonstração. Se $A = (a_{ij})_{n\times m}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$ e $C = (c_{ij})_{m\times s}$, então

$$(A+B)C = [(a_{ij} + b_{ij})]_{n\times m} C_{m\times s} = [\sum_{k=1}^{m}(a_{ik} + b_{kj})c_{kj}]_{n\times s}.$$

Como a_{ij}, b_{ij} e $c_{ij} \in \mathbb{R}$, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para os números reais tem-se:

$$[\sum_{k=1}^{m}(a_{ik} + b_{kj})c_{kj}]_{n\times s} = \sum_{k=1}^{m}(a_{ik}c_{kj} + b_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m}(a_{ik}c_{kj}) + \sum_{k=1}^{m}(b_{ik}c_{kj}) = AC + BC$$

(ii) ***distributividade à direita da multiplicação em relação à adição:*** $(A+B)C = AC + BC$;

Demonstração. Se $A = (a_{ij})_{n\times m}$, $B = (b_{ij})_{m\times s}$ e $C = (c_{ij})_{m\times s}$, então

$$A(B+C) = A_{n\times m}[(b_{ij} + c_{ij})]_{m\times s} = [\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})]_{n\times s}$$

Como a_{ij}, b_{ij} e $c_{ij} \in \mathbb{R}$, pela propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição para os números reais tem-se:

$$[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})]_{n\times s} = \sum_{k=1}^{m}(a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) = \sum_{k=1}^{m}(a_{ik}b_{kj}) + \sum_{k=1}^{m}(a_{ik}c_{kj}) = AB + AC$$

(iii) ***associatividade:*** $(AB)C = A(BC)$;

Demonstração. Se $A = (a_{ij})_{n\times r}$, $B = (b_{ij})_{r\times s}$ e $C = (c_{ij})_{s\times m}$, então

$$(AB)C = [(ab)c]_{ij} = [\sum_{k=1}^{s}(AB)_{ik}c_{kj}]_{n\times m} = [\sum_{k=1}^{s}(\sum_{t=1}^{r} a_{it}.b_{tk})c_{kj}]_{n\times m}$$

Como a_{ij}, b_{ij} e $c_{ij} \in \mathbb{R}$, pela propriedade associativa da multiplicação para os números reais tem-se:

$$[\sum_{k=1}^{s}(\sum_{t=1}^{r} a_{it}.b_{tk})c_{kj}]_{n\times m} = [\sum_{t=1}^{r} a_{it}(\sum_{k=1}^{s} b_{tk}c_{kj})]_{n\times m} = [\sum_{t=1}^{r} a_{it}(BC)_{tj}]_{n\times m} = A(BC)$$

(iv) ***existência de elemento identidade ou neutro:*** $AI = IA = A$.

Demonstração. Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$, $I = (b_{ij})_{n\times n}$, com

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

então

$$AI = (ab)_{ij} = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{n\times n}$$

pela definição de b_{ij} quando $k = j$ tem-se $b_{kk} = 1$, quando $k \neq j$ tem-se $b_{kj} = 0$, então

$$[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]_{n\times n} = a_{i1}\cdot 0 + a_{i2}\cdot 0 + ... + a_{ij}\cdot b_{kk} + ... + a_{in}\cdot 0 = (a_{ij}) = A$$

Agora para

$$IA = (ba)_{ij} = (\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj})_{n\times n}$$

pela definição de b_{ij} quando $k = j$ tem-se $b_{kk} = 1$, quando $k \neq j$ tem-se $b_{kj} = 0$, então

$$(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj})_{n\times n} = (a_{ij}) = A$$

f) Matrizes Inversíveis

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Diz-se que A é uma matriz inversível se existir uma matriz B, tal que $AB = BA = I$. Se a matriz A é inversível, chama-se a inversa de A a matriz A^{-1}, tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Exemplo:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 7 + 3\cdot(-2) & 1\cdot(-3) + 3\cdot 1 \\ 2\cdot 7 + 7\cdot(-2) & 2\cdot(-3) + 1\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Proposição 2.2.3 *Se uma matriz é invertível, então essa inversa é única.*

Demonstração. Suponhamos que B e C são duas inversas da matriz A de ordem n. Então $AB = BA = I$ e $AC = CA = I$, logo

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

Como determinar a inversa de uma matriz? Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Basta resolver a seguinte equação matricial:

$$AA^{-1} = I \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3d+g & 2a+d-2g & a+2d+2g \\ b+3e+h & 2b+e-2h & b+2e+2h \\ c+3f+k & 2c+f-2k & c+2f+2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtendo:

$$\begin{cases} a+3d+g=1 \\ 2a+d-2g=0 \\ a+2d+2g=0 \end{cases} \Longrightarrow a=-\frac{2}{3},\ d=\frac{2}{3},\ g=-\frac{1}{3}$$

$$\begin{cases} b+3e+h=0 \\ 2b+e-2h=1 \\ b+2e+2h=0 \end{cases} \Longrightarrow b=\frac{4}{9},\ e=-\frac{1}{9},\ h=-\frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} c+3f+k=0 \\ 2c+f-2k=0 \\ c+2f+2k=1 \end{cases} \Longrightarrow c=\frac{7}{9},\ f=-\frac{4}{9},\ k=\frac{5}{9}$$

Portanto tem-se:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

2.1.2.5 Determinantes

Considera-se o conjunto de matrizes quadradas de entradas reais. Seja M uma matriz desse conjunto de ordem $1 \leq n \leq 3$, chama-se determinante de M, denotado por $\det M = \|M\|$, o número real que pode-se obter operando os elemento de M da seguinte forma:

1. Se M tem ordem 1, então o determinante é o próprio elemento de M

$$M = (a_{11}) \Longrightarrow \det M = a_{11}$$

2. Se M tem ordem 2, então o determinante é a subtração do produto da diagonal principal pelo produto da diagonal secundária de M.

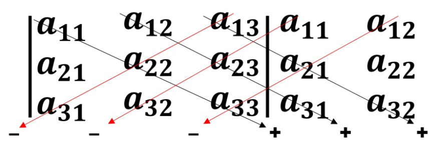
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det M = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

3. Se M tem ordem 3, isto é,

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ defini-se:}$$

$$\det M = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Ainda pode-se memorizar esta definição utilizando a regra de Sarrus, representada abaixo:



4. Caso geral - Teorema de Laplace

Menor Complementar

Seja A uma matriz de ordem $n \geq 2$, define-se menor complementar de a_{ij}, denotado por D_{ij}, como o determinante da matriz resultante da supressão da linha i e da coluna j de A. Por exemplo, seja a Matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

o menor complementar de a_{11} é

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

e o menor complementar de a_{23} é

$$D_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{32}$$

Cofator ou Complemento algébrico

Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$, define-se cofator de a_{ij}, denotado por A_{ij}, como o número real resultante de $(-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$. Exemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

o cofator de a_{23} é

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (1 \cdot 2 - (-2) \cdot 0) = (-1) \cdot 2 = -2$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz M, de ordem $n \geq 2$, obtém-se pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de M (linha ou coluna) pelos seus cofatores, isto é, seja a matriz

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{t1} & a_{t2} & ... & a_{tk} & ... & a_{tn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mk} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

escolhendo uma coluna k,

$$\det M = a_{1k} \cdot A_{1K} + a_{2k} \cdot A_{2K} + ... + a_{mk} \cdot A_{mK}$$

escolhendo uma linha t,

$$\det M = a_{t1} \cdot A_{t1} + a_{t2} \cdot A_{t2} + ... + a_{tn} \cdot A_{tn}$$

Por exemplo, seja a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

escolhendo a coluna 3 tem-se

$$\det M = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34} =$$

$$(-2) \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^7 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det M = (-2) \cdot 1 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-7) + 4 \cdot (-1) \cdot (-5) = 6 - 1 - 14 + 20 = 11$$

Essa escolha de fila não precisa ser aleatória, pois basta escolher uma fila que possua zeros como entradas, o que facilita o cálculo pelo fato do produto $a_{ij}.Aij$ ser zero, não sendo necessário a resolução do referido cofator e portanto o determinante retringe-se ao cálculo dos cofatores em que as entradas não são nulas, portanto escolhendo a linha 3

$$\det M = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} + a_{34} \cdot A_{34}$$

$$\det M = 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 2 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^7 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det M = 0 + 0 + 2 \cdot 1 \cdot (-7) + (-1) \cdot (-1) \cdot 25 = -14 + 25 = 11$$

2.1.3 MATRIZES E A CRIPTOGRAFIA

Sabe-se que a quantidade de informação que circula na internet é vasta e diversificada: e-mails, notícias, transações bancárias, compras on-line, etc. Muitas vezes são dados de cunho pessoal que necessitam ser enviados com sigilo a um determinado recebedor.

O termo criptografia originou-se das palavras gregas "KRYPTÓS" e "GRÁPHEIN", que significam respectivamente oculto e escrita. Trata-se de um conjunto de técnicas que visa codificar uma informação para que somente o emissor e o receptor possam acessá-la. O emissor transforma a mensagem através de uma operação específica utilizando um código (chave). O receptor utilizando-se da chave que só ele e o emissor possuem decodificará a mensagem, através da operação designada.

Para exemplificar essa técnica utiliza-se uma matriz para codificar e a matriz inversa para decodificar a expressão "PROFMAT DEZ".

Primeiro é necessário utilizar a tabela de correspondência abaixo.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Transformando, assim, a expressão "PROFMAT DEZ" em um conjunto numérico.

P	R	O	F	M	A	T	D	E	Z
16	18	15	6	13	1	20	4	5	26

Dispondo esse conjunto em uma matriz M de 2 linhas:

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 18 & 15 & 6 & 13 \\ 1 & 20 & 4 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

Agora define-se as matrizes A, chave de codificação e sua inversa A^{-1}, chave de decodificação.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Para criptografar a mensagem utiliza-se a matriz A que multiplicará a matriz M, transformando-a em uma matriz T, como segue abaixo:

$$A.M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 16 & 18 & 15 & 6 & 13 \\ 1 & 20 & 4 & 5 & 26 \end{pmatrix} = T$$

$$T = \begin{pmatrix} 2.16+1.1 & 2.18+1.20 & 2.15+1.4 & 2.6+1.5 & 2.13+1.26 \\ 5.16+3.1 & 5.18+3.20 & 5.15+3.4 & 5.6+3.5 & 5.13+3.26 \end{pmatrix}$$

Resultando na matriz criptografada T, que poderá ser enviada ao destino.

$$T = \begin{pmatrix} 33 & 56 & 34 & 17 & 56 \\ 83 & 150 & 87 & 45 & 143 \end{pmatrix}$$

Para o receptor decriptografar a mensagem basta multiplicar a matriz inversa A^{-1} pela matriz T como segue abaixo:

$$A^{-1}.T = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 33 & 56 & 34 & 17 & 56 \\ 83 & 150 & 87 & 45 & 143 \end{pmatrix} = M$$

$$M = \begin{pmatrix} 3.33+(-1).83 & 3.56+(-1).150 & 3.34+(-1).87 & 3.17+(-1).45 & 3.56+(-1).143 \\ (-5).33+2.83 & (-5).56+2.150 & (-5).34+2.4 & (-5).17+2.45 & (-5).56+2.143 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 16 & 18 & 15 & 6 & 13 \\ 1 & 20 & 4 & 5 & 26 \end{pmatrix}$$

Utilizando a tabela de correspondência obtem-se então a mensagem:

$$M = \begin{pmatrix} P & R & O & F & M \\ A & T & D & E & Z \end{pmatrix}$$

2.2 APRENDIZAGEM MÓVEL

Aprendizagem móvel é a utilização do notebook, tablete ou smartphone em tarefas educacionais como forma de otimizar o tempo para o aprendizado.

Segundo Marcal, Andrade e Rios (2005), as aplicações M-LEARNING, termo em Inglês para aprendizagem móvel, surgem como importantes colaboradoras, auxiliando o processo de aprendizagem e devem propiciar a expansão das estratégias de aprendizado pelo uso da tecnologia, fornecendo meios para o desenvolvimento de métodos inovadores de ensino e proporcionando melhoraria na utilização dos recursos didáticos, utilizando a plataforma digital e acesso aos conteúdos de forma dinâmica através dos aplicativos móveis.

Atualmente existe um grande interesse pelos aplicativos móveis criando um mercado que está em franca expansão no mundo, estimulando investimentos consideráveis no desenvolvimento de software e aplicativos educacionais que fornecem ferramentas para atividades pedagógicas como vídeo, áudio, anotação, cálculo e criação de conteúdos. De acordo com UNESCO (2014) foram baixados mais de 270 milhões de aplicativos pedagógicos em 2011, um aumento de mais de 1000%, comparando-se com o ano de 2009.

Ainda segundo Marcal, Andrade e Rios (2005), "o instituto de pesquisa SRI (Stanford Research Institute) realizou uma pesquisa sobre a utilização de dispositivos móveis nas escolas (Crawford et al., 2002). Foi verificado que 89% dos professores disseram que descobriram nos dispositivos móveis ferramentas eficientes de ensino. Ainda 75% dos professores que permitiram que os alunos levassem os dispositivos móveis para casa, constataram um aumento na conclusão dos trabalhos de casa e quase a totalidade dos professores afirmou que a utilização de softwares educativos apropriados e acessórios foi de fundamental importância na aprendizagem e que, a introdução da computação móvel na sala de aula aumentou a motivação para aprender, a colaboração e a comunicação entre os estudantes".

De acordo com UNESCO (2014)

> “Ao longo dos próximos 15 anos, é importante que a implementação de projetos de aprendizagem móvel e seus modelos pedagógicos não sejam orientados apenas pelas vantagens e limitações das tecnologias móveis, mas também pela consciência de como as tecnologias se encaixam na estrutura cultural e social mais ampla das comunidades.... Com os incentivos políticos e sociais certos, e o que é mais urgente, com mecanismos de capacitação para a formulação de intervenções de aprendizagem móvel, essa forma de aprendizagem tem o potencial de transformar as oportunidades e os resultados educacionais.”

Existem alguns aspectos que as aplicações de aprendizagem móvel podem possuir, os quais passamos a estudar:

a) Mobilidade: A aplicação deverá ser utilizada em qualquer lugar e a qualquer hora, dessa forma, após instalada no dispositivo, deverá funcionar independente de conexão, com isso a aprendizagem não sofrerá nenhum prejuízo por falta de sinal de comunicação.

b) Interatividade: A aplicação fornece ao usuário a possibilidade de navegar livremente no aplicativo, escolhendo o caminho e atividades de sua escolha e saindo quando achar necessário.

c) Portabilidade: A aplicação pode ser executada em diferentes plataformas, deve ser compatível tanto com smartphones quanto com tabletes e notebooks, suportando diferentes sistemas operacionais.

d) Facilidade de uso: A aplicação deve primar pela simplicidade, pois a complexidade das aplicações reduz a capacidade de entendimento do aplicativo e sua respectiva interatividade.

e) Informação: A aplicação deve conter as informações necessárias ao entendimento do que se propõem a atividade.

Neste estudo ainda existem alguns obstáculos relativos aos recursos tecnológicos que devemos levar em conta, que podem impactar a Aprendizagem Móvel, dentre eles podemos citar:

a) Custo da Tecnologia: não podemos negar que existem aparelhos no mercado de custo muito elevado, porém também há dispositivos de custos mais reduzidos e cada vez mais inteligentes, possibilitando funcionalidades com novas oportunidades de aprendizado.

b) Tamanho da tela: as limitações do tamanho de tela, bem como sua qualidade de resolução, seguramente restringem a maneira como as aplicações M-Learning são desenvolvidas, porém já existem no mercado aparelhos com excelente resolução, permitindo que os alunos visualizem imagens maiores e mais detalhadas por inteiro ou tornem mais fácil a leitura por longos períodos de tempo.

c) Sistema Operacional: Existe uma variedade de sistemas operacionais gerindo os smartphones e tabletes. Windows phone, iOS, Mac OSX, BlackBerry são alguns dos sistemas operacionais utilizados, porém o sistema mais popular, com mais de 80% dos smathphones do país possuem o Sistema Android.

2.3 GAMIFICAÇÃO

A gamificação (do original em inglês *GAMIFICATION*) técnica que se utiliza de recursos, como dinâmica e estética, aproveitando as caracteristicas motivacionais dos jogos, com objetivo de engajamento de um público específico. Conforme Fadel et al. (2014)

> "O foco da gamificação é envolver emocionalmente o indivíduo dentro de uma gama de tarefas realizadas. Para isso se utiliza de mecanismos provenientes de jogos que são percebidos pelos sujeitos como elementos prazerosos e desafiadores, favorecendo a criação de um ambiente propício ao engajamento do indivíduo."

Segundo Vianna et al. (2013), o termo “gamificação” foi usado pela primeira vez em 2002, por Nick Pelling, programador de computadores e pesquisador britânico, mas só ganhou popularidade com Jane McGonigal, *game designer* norte-americana e autora do livro "A realidade em jogo: Por que os games nos tornam melhores e como eles podem mudar o mundo", considerado um referencial na área da Gamificação.

Ainda segundo Vianna et al. (2013), a gamificação não trata-se de criar jogos, mas sim uma metodologia por meio da qual se aplicam mecanismos de jogos, em seus aspectos mais eficientes (estética, mecânicas e dinâmicas), envolvendo a criação ou adaptação da experiência do usuário com intenção de despertar emoções positivas, explorar aptidões pessoais ou atrelar recompensas virtuais ou físicas ao cumprimento de tarefas.

De acordo com Fadel et al. (2014)

> A gamificação pode ser aplicada a atividades em que é preciso estimular o comportamento do indivíduo. Schmitz, Klemke e Specht (2012) exemplificam que no processo de aprendizagem a gamificação contribui tanto para a motivação como para o desenvolvimento cognitivo do estudante. Sua utilização contribue na criação de um ambiente ímpar de aprendizagem, com a eficácia na retenção da atenção do aluno

Conforme Vianna et al. (2013), a motivação advinda dos mecanismos de jogos, pode ser dividida em:

a) Motivação intrínseca: aquela em que o sujeito se envolve em uma atividade por desejo próprio, pois percebe que a mesma é interessante, envolvente, desafiadora e prazerosa.

b) Motivação extrínseca: parte do desejo de obter uma recompensa externa ou mesmo reconhecimento pelo sucesso alcançado.

Ainda conforme Vianna et al. (2013), as recompensas representam a principal razão pela qual os jogadores se motivam a persistir em um jogo, merecem especial atenção:

a) *Status*: pode ser encontrado na forma de *rankings* dos melhores jogadores, distribuição de badges (espécie de troféu/indicadores de realização de tarefas ou de expertise) ou por aferição dos próprios jogadores.

b) Acesso: é um forte aliado na construção de sistemas de recompensas eficientes. Promover ou não acesso a conteúdos estratégicos, informações privilegiadas, habilidades específicas consiste em uma maneira bastante promissora de manter os jogadores conectados com seus propósitos.

c) Influência: é oferecida quando é desejável que o jogador se sinta de algum modo no controle do jogo. Isso pode ocorrer por meio de acesso exclusivo ou possibilidade de intervenção em determinada regra ou atividade, com o intuito de legitimar uma conquista obtida.

d) Brindes: método mais simples de recompensa, podem vir na forma de benefícios, itens, dicas, vida extra, etc. É preciso ter cautela quanto à sua disponibilidade, uma vez que a imprevisibilidade da recompensa potencializa sua relevância dentro do sistema.

e) *Giftings*: funcionam como um modo de ampliação da interação social em um jogo, a partir da troca de presentes entre jogadores e do consequente estabelecimento de comunidades mais fortes e engajadas.

3 TRABALHOS CORRELATOS

Neste capítulo, são destacados alguns trabalhos que vêm ao encontro do estudo realizado no capítulo anterior e que corroboram com os objetivos do presente trabalho.

3.1 *SOFTWARES* NO ENSINO DA MATEMÁTICA - Souza (2015)

Neste trabalho Souza (2015) apresenta perspectivas através da contribuição tecnológica para a prática do professor, evidenciando a importância das tecnologias na sala de aula e o papel do educador frente a sua utilização. Salienta que a educação há tempos vem necessitando de mudanças em várias áreas, e com isso buscando novos métodos pedagógicos, principalmente através da parceria tecnologia e educação.

Nesse aspecto, o autor relaciona e discorre sobre vários *softwares* e aplicativos que podem ser utilizados pelo professor em sala de aula, tornando assim a matemática na escola mais atraente para os alunos, já que esses terão a oportunidade de visualizar a matemática com outra perspectiva. O autor cita que há uma pequena relação de aplicativos matemáticos para *tablets* e *smartphones*.

Souza (2015) conclui que o educador deve estar atento à forma com que vai utilizar a informática em sala de aula, para que essa não venha a ser apenas mais um recurso, mas que auxilie a prática docente e que sirva de apoio à aprendizagem. Portanto, este trabalho corrobora com os objetivos de procurar novos caminhos para a educação matemática, caminhos esses que buscam na inovação tecnológica a fonte para métodos pedagógicos que vislumbrem melhores resultados.

3.2 *M-LEARNING* OU APRENDIZAGEM COM MOBILIDADE: casos no contexto brasileiro - Schlemmer et al. (2007)

Artigo em que Schlemmer et al. (2007) relatam pesquisa exploratória, em que inicialmente os autores buscaram publicações, localizadas na Internet no contexto brasileiro. Como resultado da busca, foram localizadas 31 referências, entre projetos, artigos, reportagens, *websites*, que divulgavam iniciativas, projetos, pesquisas, aplicações e soluções para *m-learning*, a maioria no ambiente acadêmico/universitário.

Foi realizada a análise do material procurando identificar autores ou responsáveis que pudessem responder às questões de uma pesquisa. Os atores envolvidos foram contatados, uma pessoa em cada iniciativa e, ainda, dois especialistas acadêmicos da área de Ensino a Distância e de desenvolvimento de Tecnologia Móvel Sem Fio, reconhecidos pelo conhecimento das áreas.

Após o contato obtiveram-se quinze respostas, dois executivos de grandes empresas de Tecnologia da Informação, um executivo de uma fundação do setor bancário, e doze professores e/ou pesquisadores de Ciências da Computação e Educação, com experiência em Ensino a Distância. Dentre as diversas questões respondidas pelos contatados à pesquisa, destacamos as seguintes:

> “Você conhece/e ou poderia citar casos de sucesso na aplicação de Aprendizagem com Mobilidade em empresas/organizações, no contexto brasileiro?”

Schlemmer et al. (2007) apresentam como resultado que a maior parte dos casos de desenvolvimento de soluções ou de práticas de *m-learning* se encontram no meio acadêmico, especialmente no ensino superior, em que boa parte deles apresentam modelos, *frameworks* ou protótipos de *software* ainda não aplicados. Dos casos que testaram práticas e soluções para *m-learning* em contextos reais, verificou-se o uso de poucas funcionalidades e recursos, e nenhuma prática rotineira. A maioria das referências e projetos possui enfoque tecnológico. Poucas são as que se preocupam com questões didático-pedagógicas ou com elementos contextuais e sociais relacionados à adoção das tecnologias e práticas de *m-learning*. Isso indica o estágio emergente de desenvolvimento do *m-learning* também no meio acadêmico brasileiro.

> “Na sua percepção, qual o tipo de tecnologia mais indicada para viabilizar a Aprendizagem com Mobilidade (por exemplo: o celular, o PDA, o smartphone, o Tablete, PC, etc.) e por quê?”

Os autores constataram que quanto aos dispositivos móveis mais adequados para *m-learning*, não houve consenso. O *smartphone* e o *notebook* foram os mais citados. Porém observou-se que o dispositivo ideal teria que ser leve e portátil como um celular, PDA ou *smartphone*, mas ter a facilidade ergonômica de um *notebook*.

> “Você conhece algum software ou plataformas para Aprendizagem com Mobilidade? Quais são, na sua percepção, as características que estas devem possuir?”

Diversas soluções foram citadas, adaptações de soluções para *e-learning* e *softwares* específicos de *m-learning*. A maioria basicamente geram apresentações para acesso em dispositivos móveis, ou tutoriais, alguns com certo grau de interatividade do tipo “pergunta-resposta”.

Quanto as características desejáveis dos softwares para m-learning, as mais citadas pelos entrevistados foram:

a) baixo custo de aquisição e manutenção;

b) possibilidade de trabalho *on-line* e *off-line*; e

c) ser multiplataforma e multiaparelho (poder ser acessado por diferentes dispositivos móveis).

E quanto as características desejáveis com relação à usabilidade dos softwares os autores destacaram:

a) a utilização de recursos visuais e auditivos, com um mínimo de entrada manual de dados; e

b) o uso de jogos e simulações (recursos mais lúdicos – interatividade).

Finalmente, Schlemmer et al. (2007) concluem que a preocupação predominante em relação ao *m-learning*, tanto no contexto da educação corporativa quanto no contexto acadêmico, está relacionada principalmente às questões tecnológicas, em detrimento às questões epistemológicas e didático-pedagógicas. Os recursos tecnológicos, nesse caso, os dispositivos móveis, por si só, não se constituem em inovações nos processos de ensino e de aprendizagem. Essa compreensão tem povoado a mente de professores/pesquisadores que se apropriam das tecnologias, utilizando-as de forma crítica, refletindo sobre o que representam no contexto do desenvolvimento humano. Assim, representam uma possibilidade efetiva para o surgimento de novas compreensões em relação a conceitos como: tempo, espaço, presença, distância, interação, informação, conhecimento, trabalho, aprendizagem, ensino, provocando processos de desequilíbrio no sistema de significação dos sujeitos, impulsionando o rompimento de paradigmas, e modificando a forma de compreender e desenvolver determinados processos.

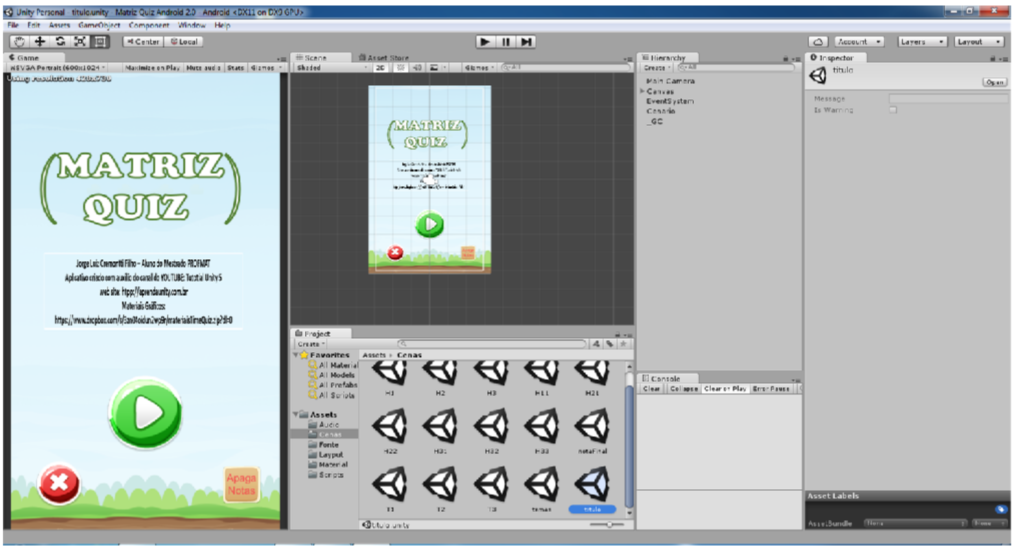
4 DESENVOLVIMENTO DO APLICATIVO

Inicialmente destaca-se que um dos objetivos do trabalho é desenvolver um aplicativo de apoio e complementação de estudo. No intuito de colaborar com o processo de ensino/aprendizagem, através de uma atividade que permita a fixação de conceitos, aplicação e revisão dos conteúdos, que poderá ser realizado em qualquer lugar e a qualquer hora, com base nos preceitos da aprendizagem móvel, e utilizando-se do caráter motivacional dos recursos da gamificação. Busca-se portanto, desenvolver um aplicativo leve, ágil e de fácil utilização, com foco principal na resolução de questões que envolvam matrizes e determinantes, que possa ser executado em *smartphones* e *tablets* na plataforma Android.

4.1 *UNITY DEVELOPMENT*

O *UNITY DEVELOPMENT* é uma plataforma de desenvolvimento de jogos 2D e 3D, disponível na *internet*, que possibilita desde a programação dos motores de jogo até o *design* do *game*. Ferramenta extremamente poderosa para criação de *games* de todos os tipos, para vários sistemas operacionais diferentes, como *Windows*, *IOS*, *MAC* e *Android*.

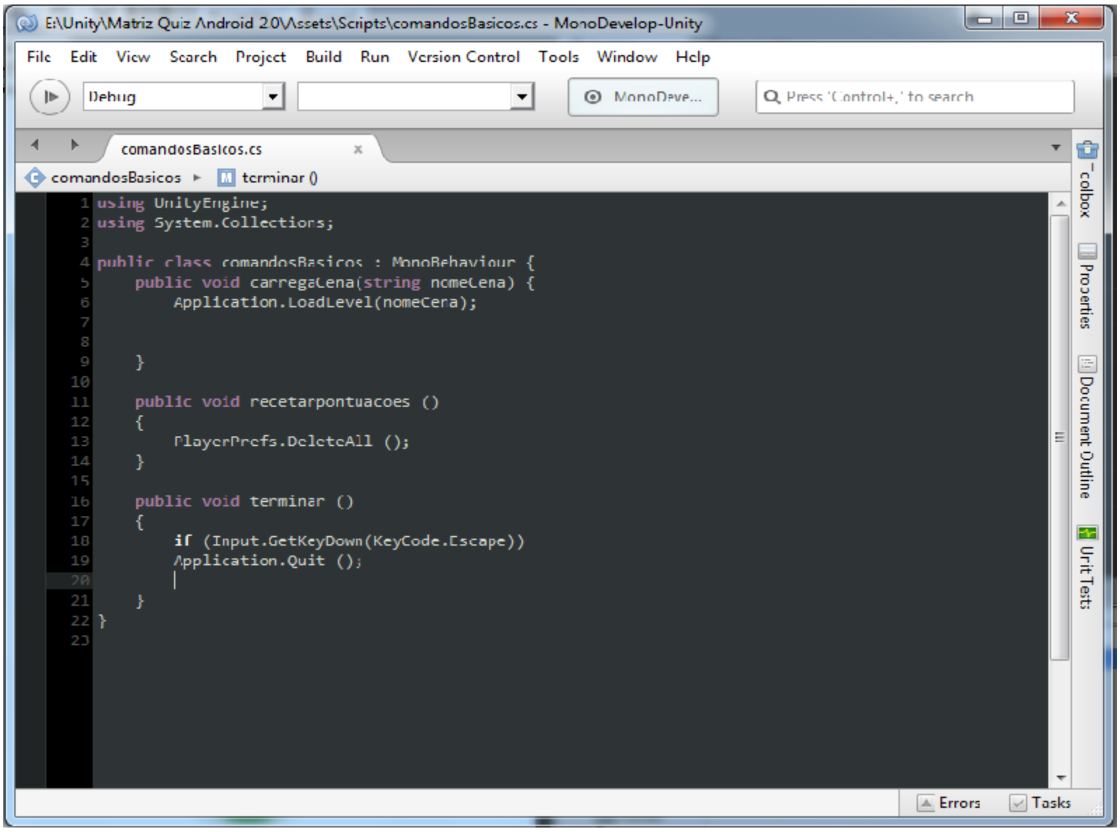
Figura 1 – Desenvolvedor de jogos *Unity*



Fonte: Autor

Essa ferramenta permite a utilização de *scripts*, que são os componentes lógicos do jogo, isto é, são sequências de comandos em uma linguagem de programação específica, como C# ou *JavaScript*, que dão vida ao jogo. A figura 2 ilustra a implementação de *scripts*.

Figura 2 – editor de *Scripts* do *Unity* - *MonoDevelopment*



Fonte: Autor

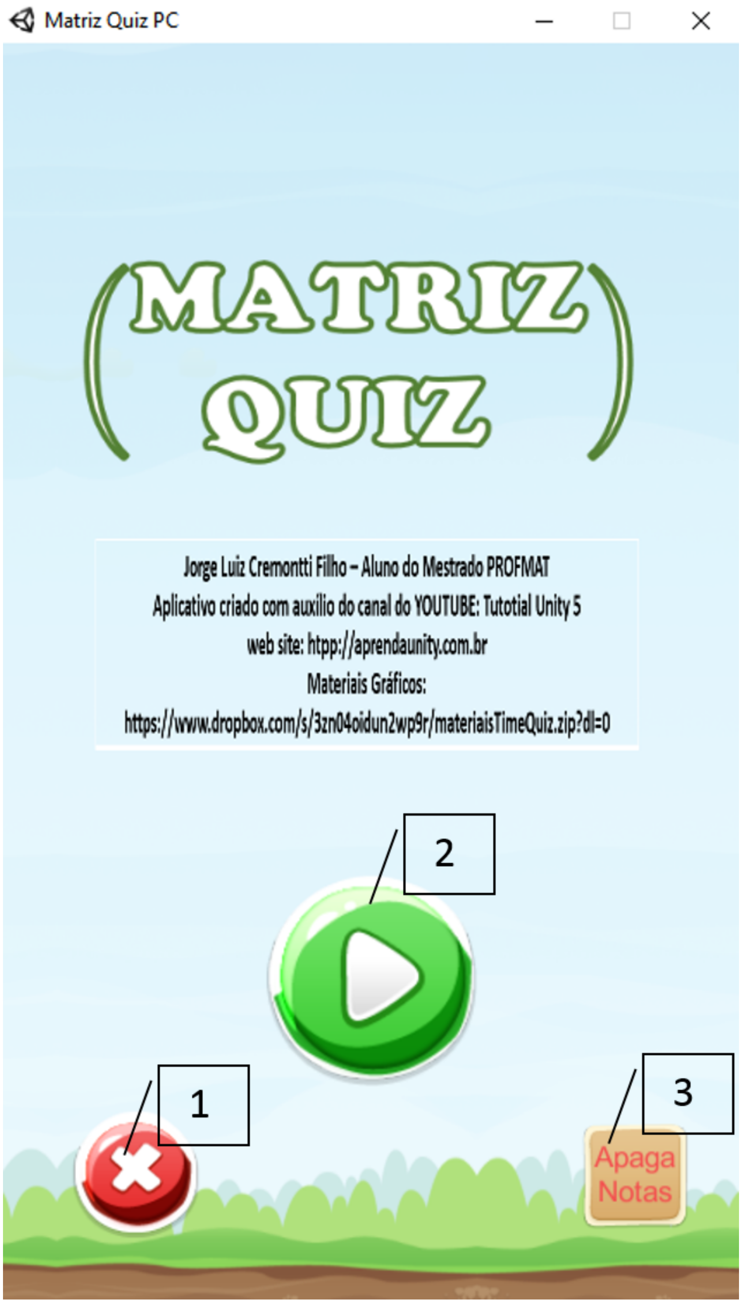
Dentre algumas vantagens do *Unity* temos a possibilidade de utilizar elementos criados por outros em nossos *games* e também a disponibilização de ferramentas de aprendizado para o desenvolvedor. No *site* da ferramenta (http://unity3d.com/learn) estão disponíveis vários tutoriais, além de toda a documentação necessária para o desenvolvedor utilizar as classes do *Unity* em seus *scripts*, além de uma versão gratuita para *download*.

4.2 DESCRIÇÃO DO APLICATIVO

4.2.1 Tela de Título

A figura 3 ilustra a tela inicial do aplicativo, onde pode-se visualizar o título, os créditos de construção, botão de início de jogo - número (2), botão para zerar todas as notas - número (3) e botão de fim de aplicativo - número (1).

Figura 3 – Tela de Título

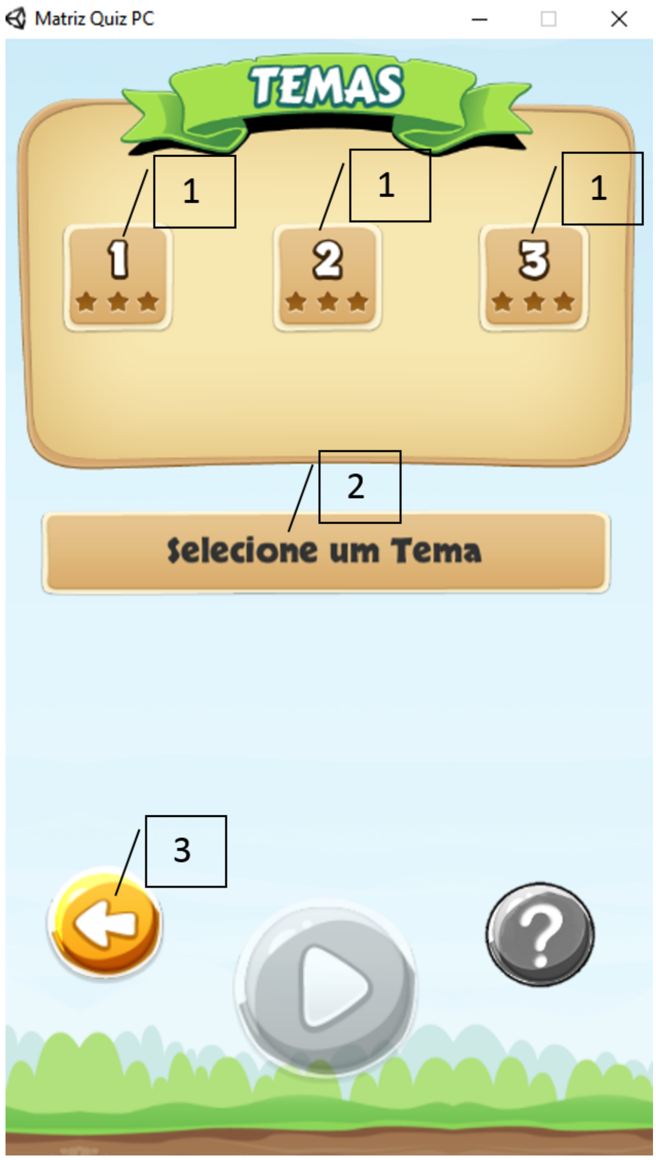


Fonte: Autor

4.2.2 Tela de Escolha de Temas

A figura 4 ilustra a tela de escolha de temas, com o tema ainda não selecionado, onde o usuário poderá escolher o tema a ser respondido, obter a ajuda teórica sobre o tema escolhido e retornar à tela de início de jogo acionando o botão de retorno - número (3).

Figura 4 – Tela de escolha de Temas



Fonte: Autor

Nesta fase, estão habilitados para o uso somente o botão de retorno ao início do jogo - número (3), e os botões de escolha de tema - número (1), que permitem a escolha do tema para as questões a serem respondidas, e quando acionados exibem o nome do tema escolhido no quadro de exibição de temas - número (2).

Figura 5 – Tela com informações do tema escolhido

Fonte: Autor

A figura 5 ilustra a tela de temas após acionado o botão de temas, e portanto é possível visualizar no quadro de exibição do tema, número (4), o título do tema escolhido, dentre os temas Definições de Matrizes, botão número (1), Operações Matriciais, botão número (2) e Determinantes, botão número (3). Aparecem também habilitados os botões de ajuda, número (6), com o um resumo teórico do tema escolhido e o botão de jogar, número (5) que permite ir à tela de perguntas do tema escolhido.

Em particular, a figura 5 mostra a tela após o acionamento do botão número (1), e portanto são exibidos o título do tema escolhido, número (4), a quantidade de questões acertadas e a quantidade de estrelas (cor amarela) obtidas, na última sessão realizada do referido tema. A quantidade de estrelas e a nota obtida são reguladas pela tabela 2.

Tabela 2 – Tabela de correspondência de notas e estrelas

respostas certas	nota	quantidade de estrelas
10	10	três estrelas
9	9	duas estrelas
8	8	duas estrelas
7	7	duas estrelas
6	6	uma estrela
5	5	uma estrela
4	4	sem estrelas
3	3	sem estrelas
2	2	sem estrelas
1	1	sem estrelas
0	0	sem estrelas

Fonte: Autor

4.2.3 Tela de Ajuda

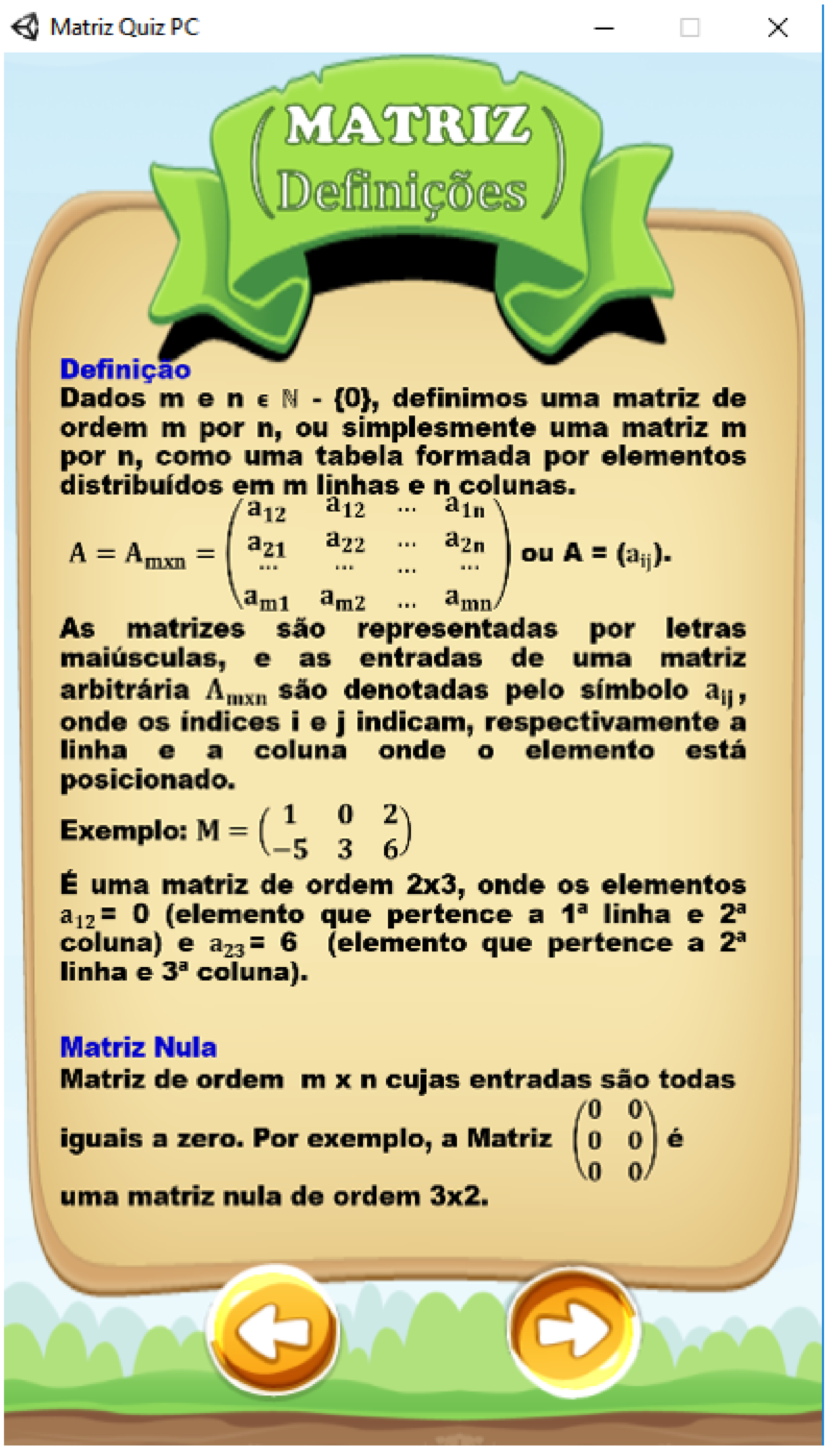
As telas de ajuda exibem um resumo teórico dos temas abordados no aplicativo: Definições de Matrizes, Operações Matriciais e Determinantes.

O usuário estando na tela de escolha de tema, figura 4, ao acionar o botão de ajuda é encaminhado à tela de ajuda do tema escolhido, que serão descritas a seguir:

1. Definições de matrizes

A figura 6 exibe a tela inicial de um resumo das principais definições das matrizes utilizadas no ensino médio.

Figura 6 – Tela de definições

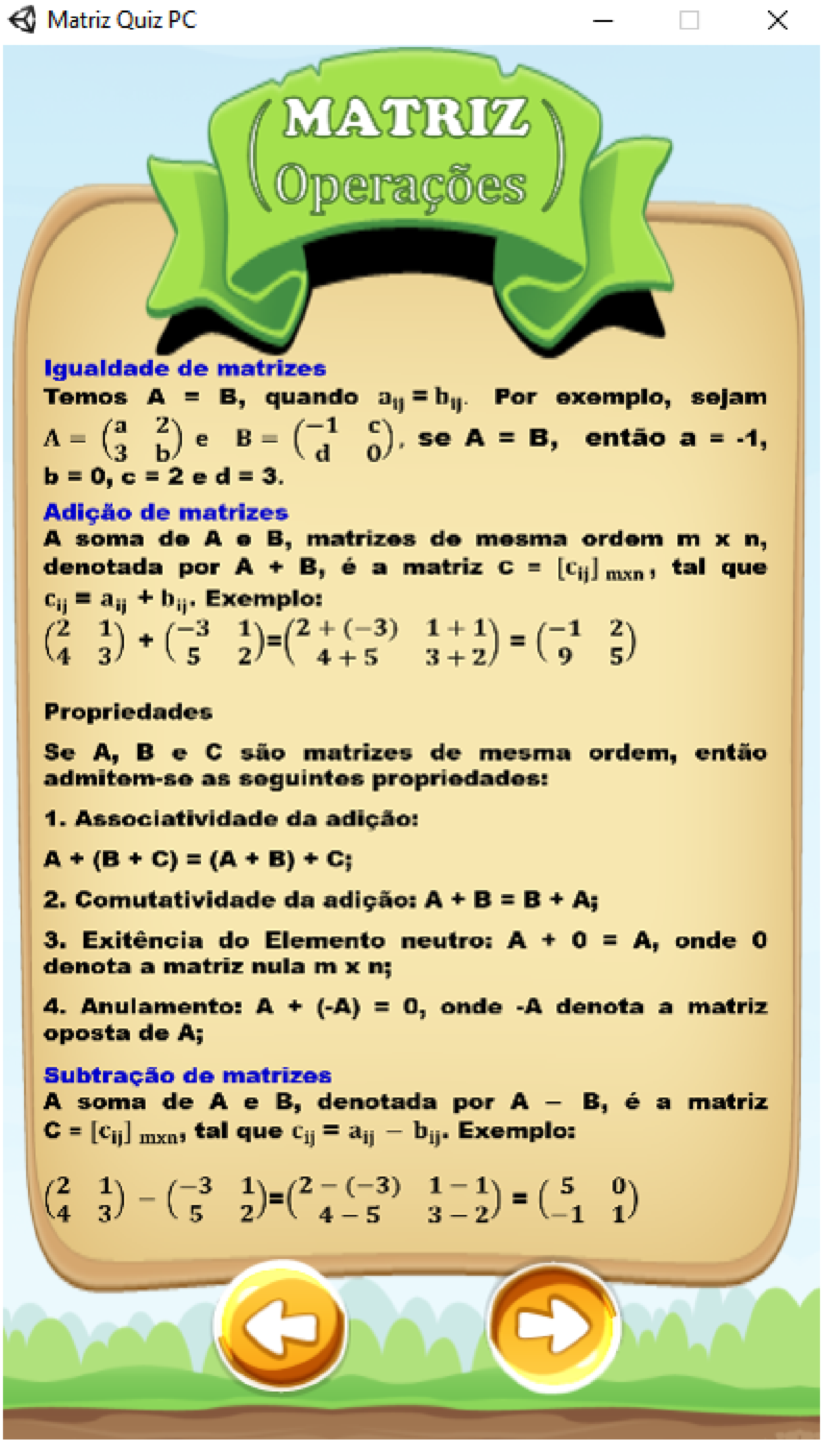


Fonte: Autor

2. Operações com matrizes

A figura 7 exibe a tela inicial de um resumo das propriedades operatórias das matrizes com enfoque ao ensino médio.

Figura 7 – Tela de operações

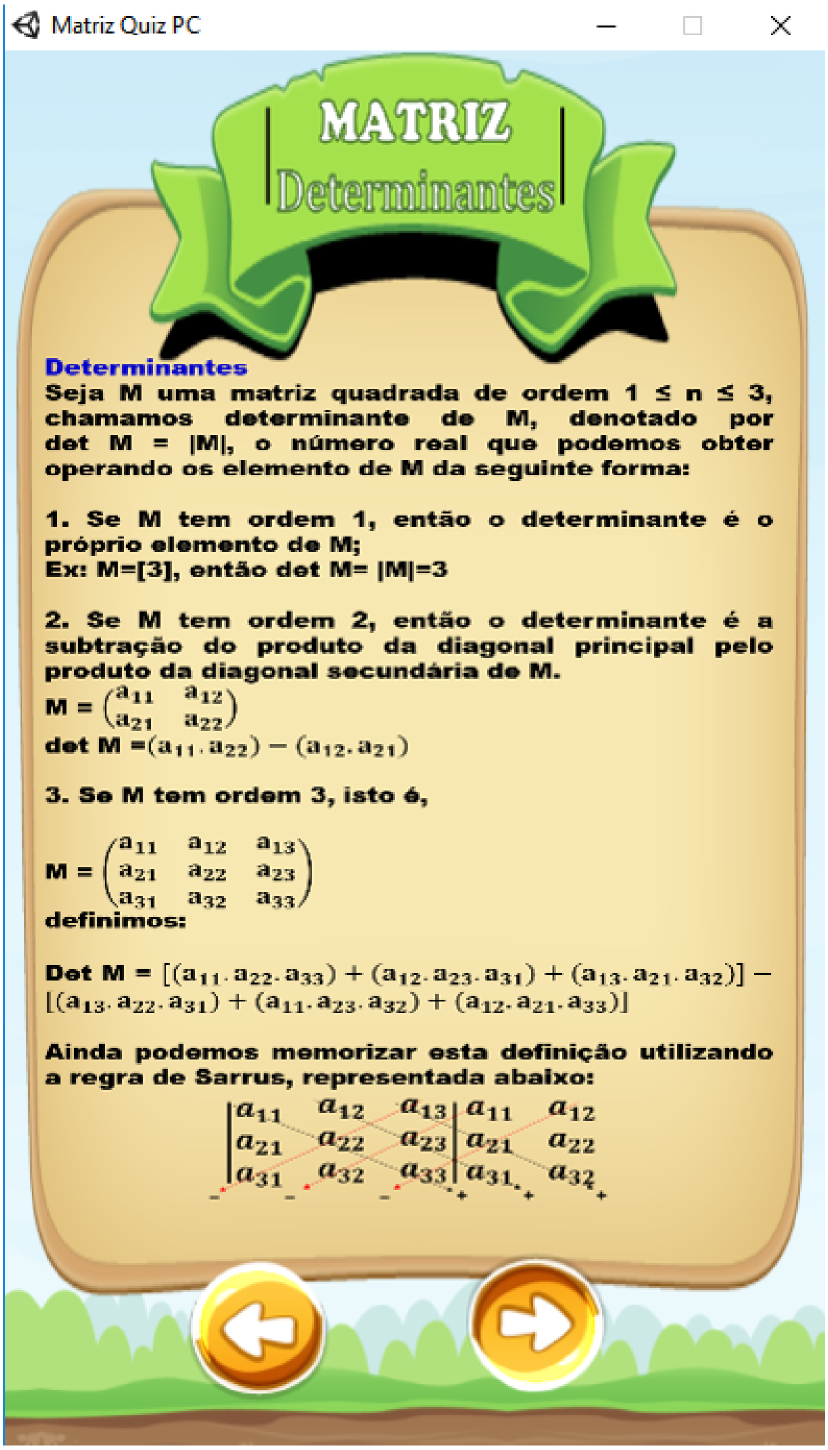


Fonte: Autor

3. Determinantes

A figura 8 exibe a tela inicial de um resumo com os principais teoremas para cálculo de determinantes utilizados no ensino médio.

Figura 8 – Tela de determinantes

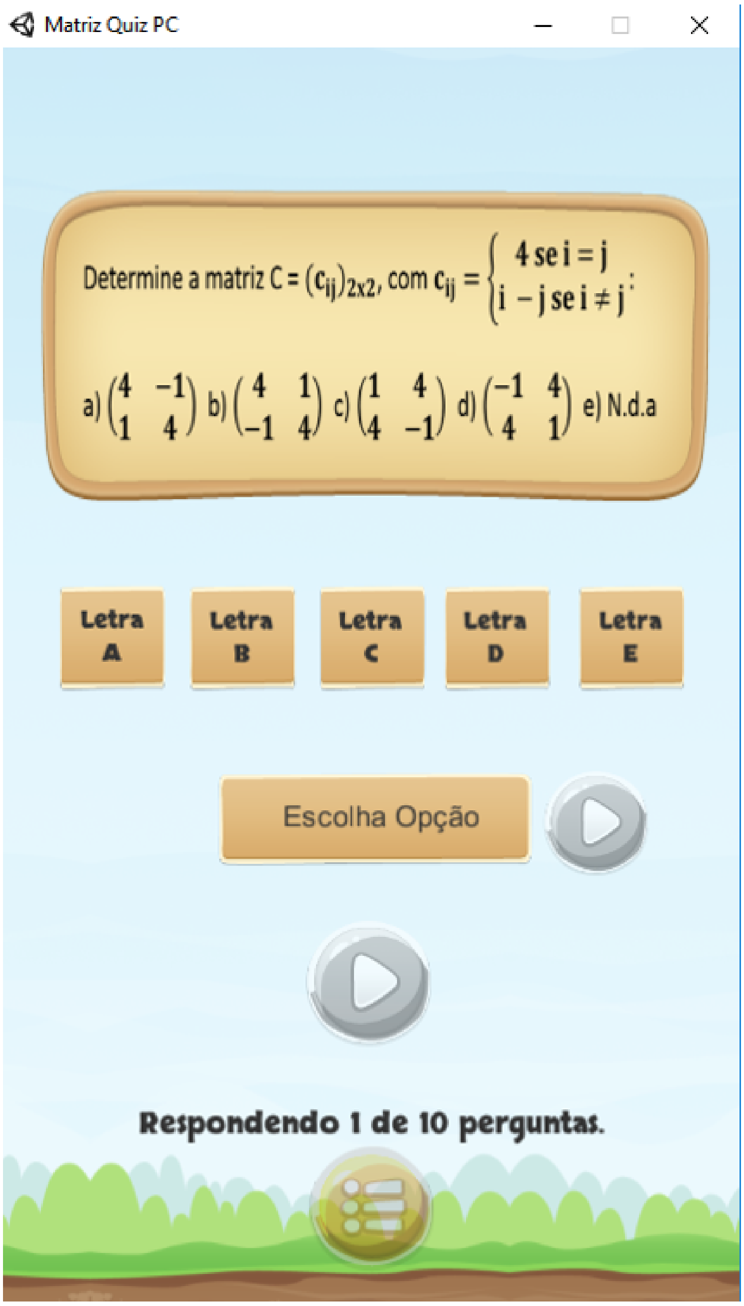


Fonte: Autor

4.2.4 Tela de Perguntas

A figura 9 exibe a tela de perguntas sobre o tema escolhido. Serão exibidas 10 perguntas com 5 opções de respostas, onde o usuário deve acionar um dos botões de acordo com as respostas disponíveis.

Figura 9 – Tela de perguntas

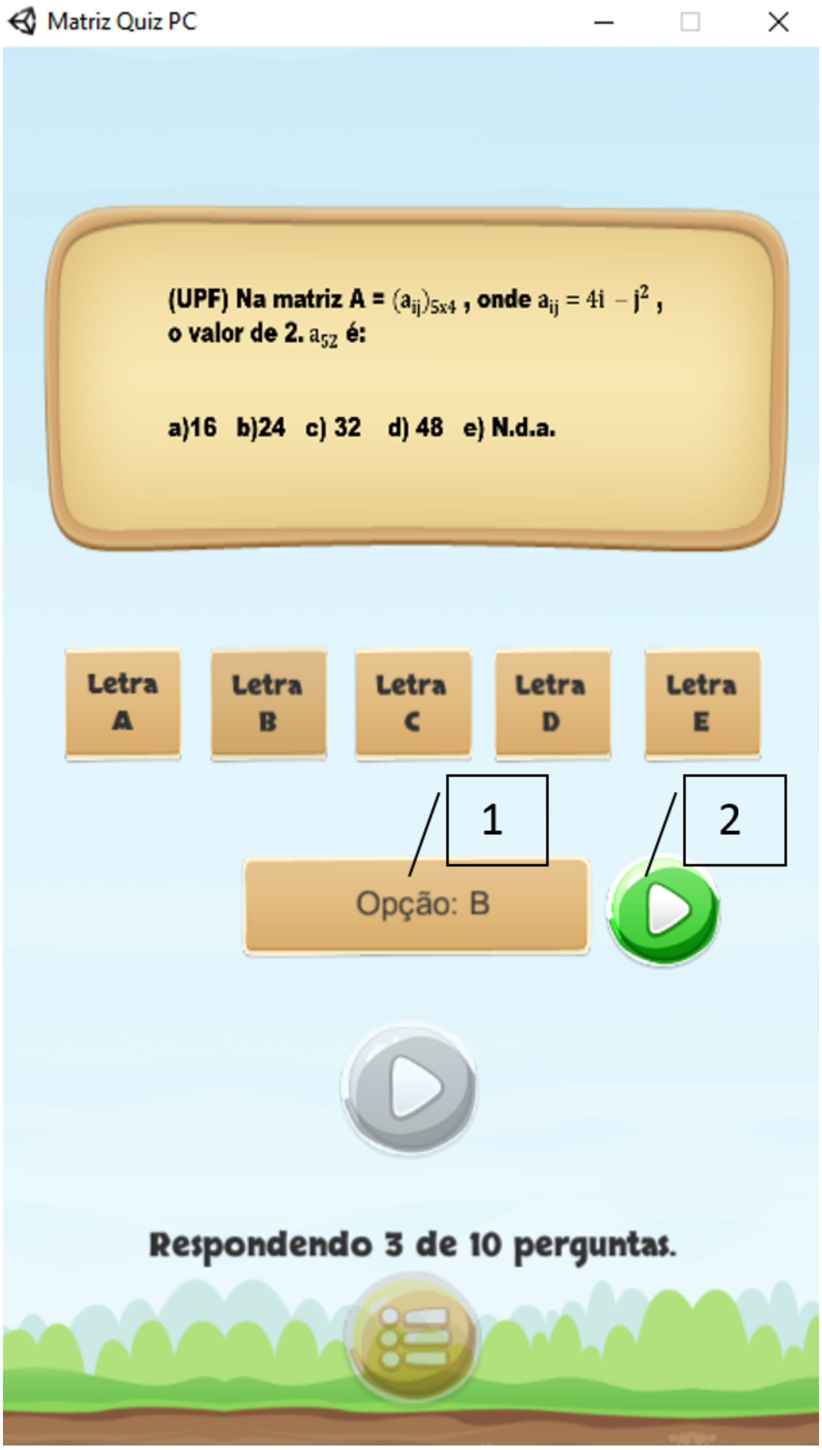


Fonte: Autor

A tela informa a contagem de questões respondidas e os botões ficam desabilitados até que uma opção de resposta seja selecionada.

A figura 10 exibe a tela de perguntas com uma opção de resposta selecionada, que será exibida na barra de opção, número (1). Essa seleção pode ser alterada até que o botão de confirmação de resposta, número (2), seja acionado.

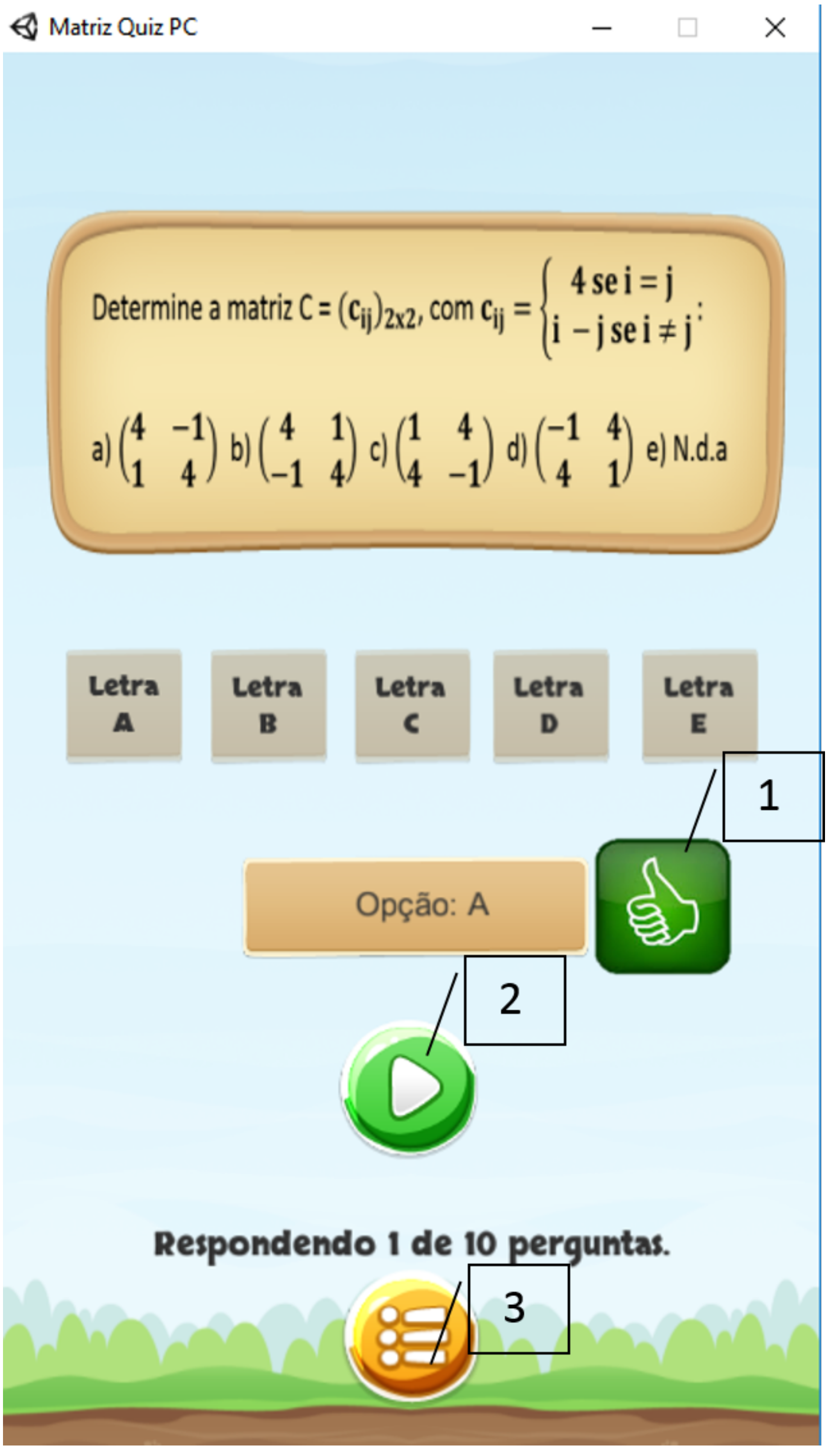
Figura 10 – Tela de pergunta com opção selecionada



Fonte: Autor

A figura 11 exibe a tela de perguntas com confirmação de resposta certa, número (1), também será executado o som de palmas de mão. Ficam habilitados os botões de próxima pergunta, número (2), e retorno ao menu, número (3). Em caso de retorno ao menu as informações de nota e quantidade de questões respondidas são zeradas.

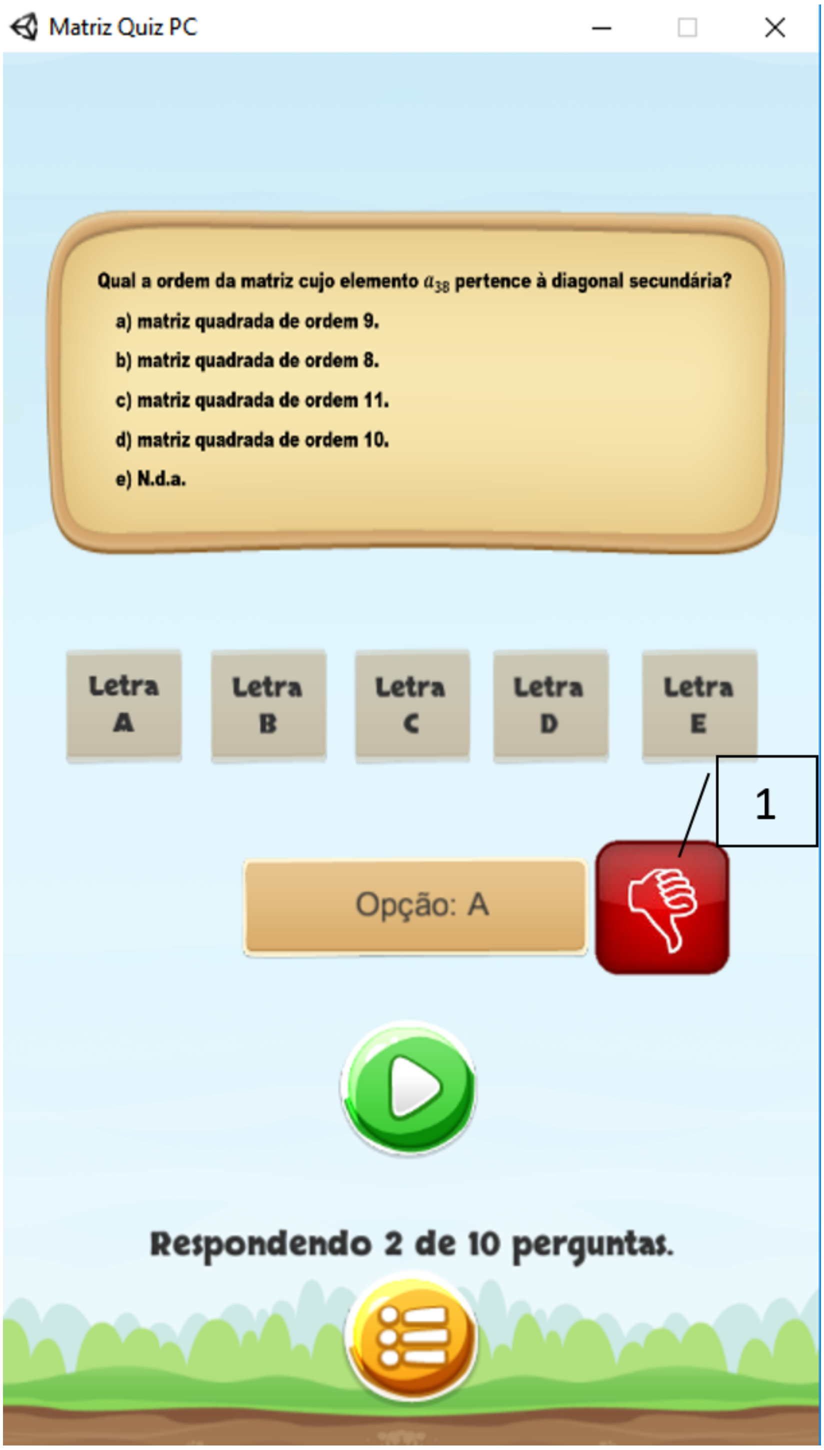
Figura 11 – Tela de resposta certa



Fonte: Autor

A figura 12 exibe a tela de perguntas com confirmação de resposta errada, número (1), também será executado o som de explosão.

Figura 12 – Tela de resposta errada



Fonte: Autor

4.2.5 Tela de Conclusão do Questionário

A figura 13 exibe a tela de conclusão de fase ou tema, onde visualizamos o nome do tema, nota, estrelas obtidas e total de respostas certas. Encontram-se habilitados o botão de retorno à tela de título, número (1), botão de retorno à tela de temas, número (2), e botão para responder novamente o tema, número (3).

Figura 13 – Tela de conclusão

Fonte: Autor

4.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Cabe agora algumas considerações sobre o aplicativo. Em um primeiro momento é necessário colocar que compete ao professor, a escolha das perguntas, bem como verificar o nível de dificuldade das mesmas, em consonância com os objetivos a serem atingidos. Em particular utilizou-se em no aplicativo questões de vestibulares, visando assim uma preparação para a realização de processos seletivos por parte dos alunos. Portanto uma análise pedagógica resulta, em alguns aspectos, do tipo de abordagem realizada pelo professor em relação ao questionário. Porém há aspectos que envolvem a aprendizagem móvel e a gamificação, que são os preceitos norteadores do trabalho, e que passa-se a comentar:

a) Mobilidade e portabilidade do aplicativo: o aplicativo foi desenvolvido para aparelhos com Sistema Android, sistema mais utilizado no país, e após instalado não necessita de conexão para ser executado;

b) Interatividade do aplicativo; aqui buscou-se a simplicidade para o usuário. A maioria das telas possuem somente um caminho a seguir, com exceção das telas com os botões de ajuda e retorno;

c) Resumos teóricos: aqui buscou-se um diferencial em relação a outros aplicativos do tipo perguntas e respostas, pois foi disponibilizado um resumo da teoria utilizada nos questionários, ressaltando que muitas vezes o aplicativo estará sendo executado em lugares onde não haverá acesso a livros e outros tipos de consulta;

d) Correção das respostas: a exibição da correção, figuras 11 e 12, é de suma importância, principalmente em relação às perguntas respondidas incorretamente, pois são elas que farão com que o aluno persiga a correção, e por consequência realize uma revisão na teoria;

e) Informações de desempenho: a tela de conclusão do questionário, figura (13), nos fornece a nota final e a quantidade de estrelas recebidas. Com essa informação, se o aluno não obteve a nota máxima e por consequência as três estrelas, tabela 2, faz com que o mesmo busque completar a quantidade de estrelas, executando a fase quantas vezes for necessário, podendo ainda procurar auxílio de conteúdo nos resumos teóricos, nas telas de ajuda, figuras (6), (7) e (8);

f) Gravação das informações: as informações de desempenho são gravadas no aplicativo e exibidas na tela de escolha de temas, figura (5), fazendo com que o aluno busque a excelência em seus resultados e também exibi-las, por exemplo, quando o professor solicitar como confirmação de uma tarefa realizada.

5 METODOLOGIA DE AVALIAÇÃO E RESULTADOS

Como forma de buscar uma avaliação para *layout* e recursos do aplicativo, foi realizada uma atividade com duas turmas de segundo ano e duas turmas de terceiro ano do ensino médio do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Roraima, perfazendo um total de 94 estudantes. A atividade foi desenvolvida no dia 01 de abril de 2016, no laboratório de informática da escola, onde o aplicativo foi instalado em versão *windows*, nas 30 máquinas disponíveis. Foi solicitado para cada turma que os alunos que testassem o aplicativo durante o tempo de uma aula e, posteriormente foi distribuido um questionário à turma e aos dois professores de matemática responsáveis pelas turmas, que encontram-se anexo (Apêndice B e Apêndice C), com os quais poderam-se tabular os resultados, que também constam do anexo (Apêndice D) e com isso realizou-se uma avaliação inicial do aplicativo.

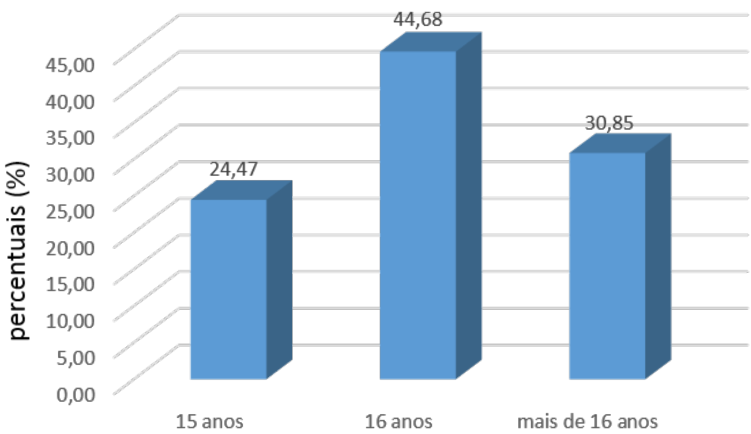
5.1 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO DOS ALUNOS

5.1.1 Sobre os estudantes

As perguntas iniciais destinaram-se a levantar alguns dados da turma com finalidade de verificar idade, sexo, afinidade com a matemática, tempo de estudo e a utilização de jogos digitais.

a) Faixa etária: Constatou-se uma regularidade para alunos de 2º e 3º anos do ensino médio, com quase 70% de jovens com idades entre 15 e 16 anos, conforme a figura 14.

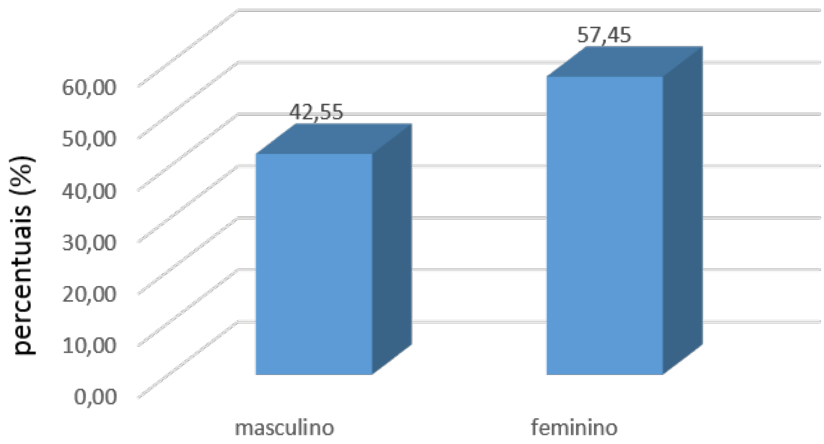
Figura 14 – Idade dos alunos



Fonte: Autor

b) Sexo: Conforme a figura 15 podemos verificar uma distribuição uniforme entre os sexos.

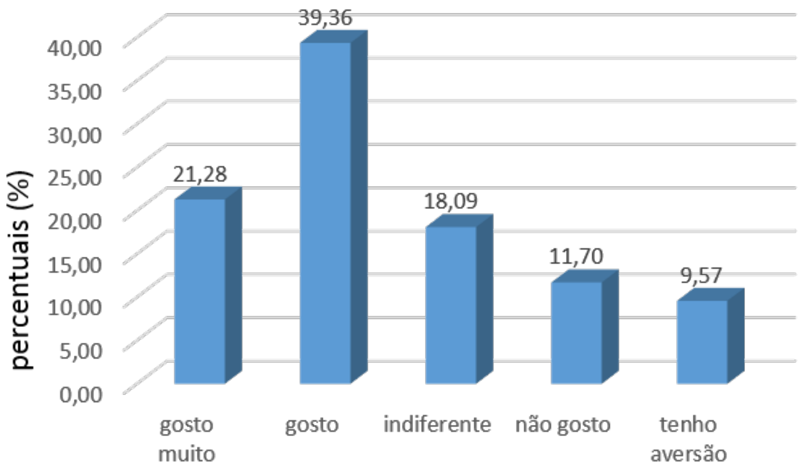
Figura 15 – Sexo dos alunos



Fonte: Autor

c) Afinidade com a matemática: Constata-se, conforme figura 16, que quase 40% dos alunos afirmou não apreciar a matéria.

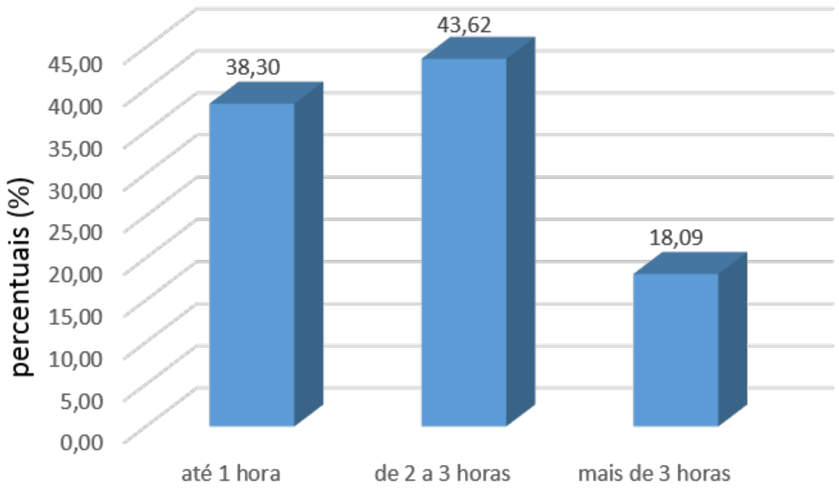
Figura 16 – Afinidade com a matemática



Fonte: Autor

d) Tempo de estudo em casa: Constata-se, na figura 17, que 70% dos alunos estuda em casa de 2 a 3 horas por dia.

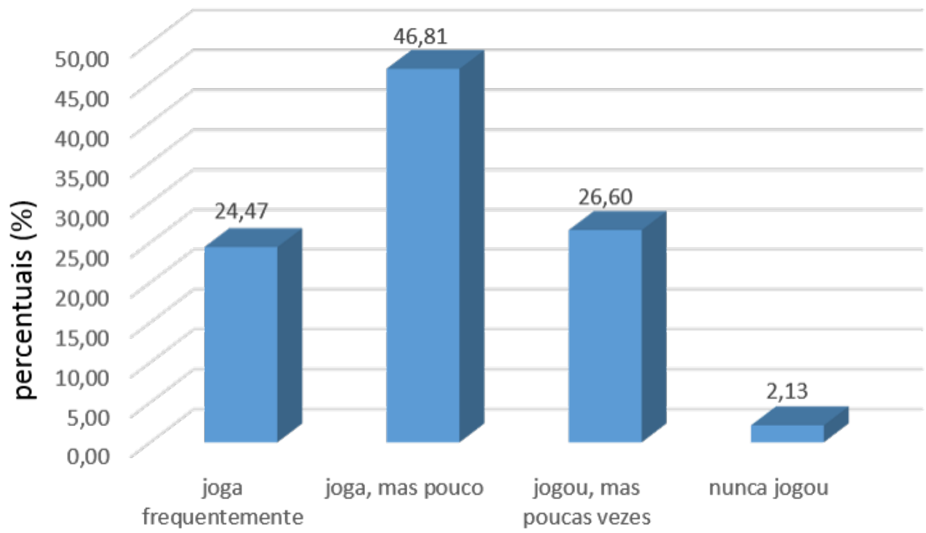
Figura 17 – Tempo de estudo diário em casa



Fonte: Autor

e) Jogos digitais: Verifica-se que 70% dos alunos jogam games digitais, figura 18.

Figura 18 – Uso de jogos digitais



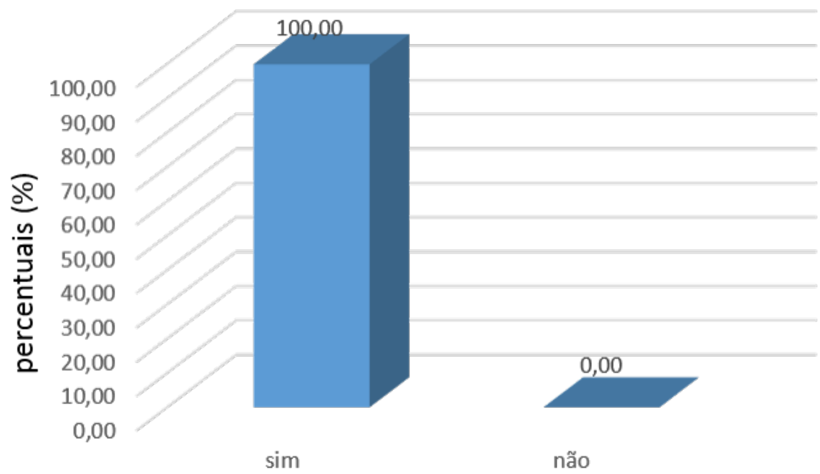
Fonte: Autor

5.1.2 Uso de *Smartphones* e *tablets*

Os estudantes também foram questionados a respeito da utilização de smartphones e tabletes.

a) Uso de *smartphones* e *tablets*: Todos os alunos utilizam *smartphones* e *tablets*, figura 19.

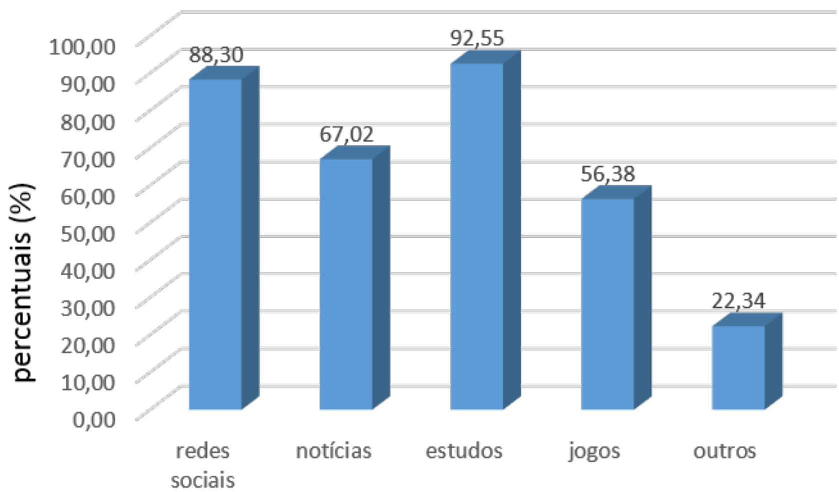
Figura 19 – Uso de *smartphones* e *tablets*



Fonte: Autor

b) Acesso à *internet*: Constata-se, conforme a figura 20, que mais de 90% dos alunos utilizam *smartphones* e *tablets* para o estudo.

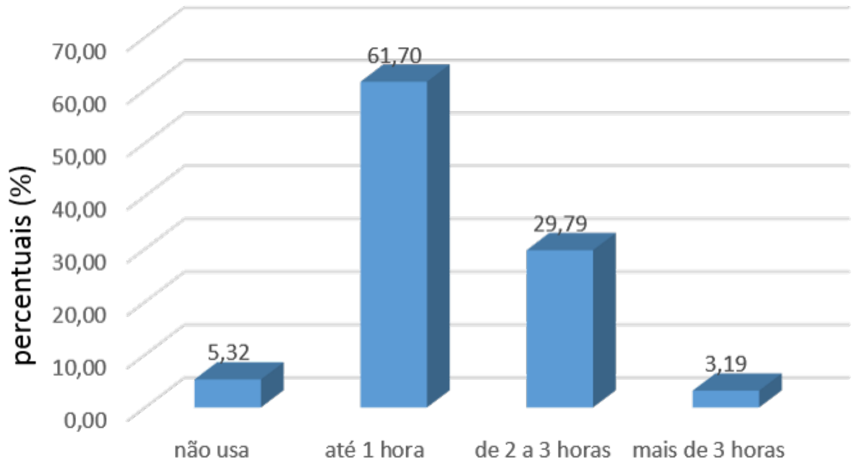
Figura 20 – Acesso à *internet*



Fonte: Autor

c) Uso para o estudo: Verifica-se que mais de 90% dos alunos utilizam os *smartphones* e *tablets* para o estudo de 1 a 2 horas por dia, figura 21.

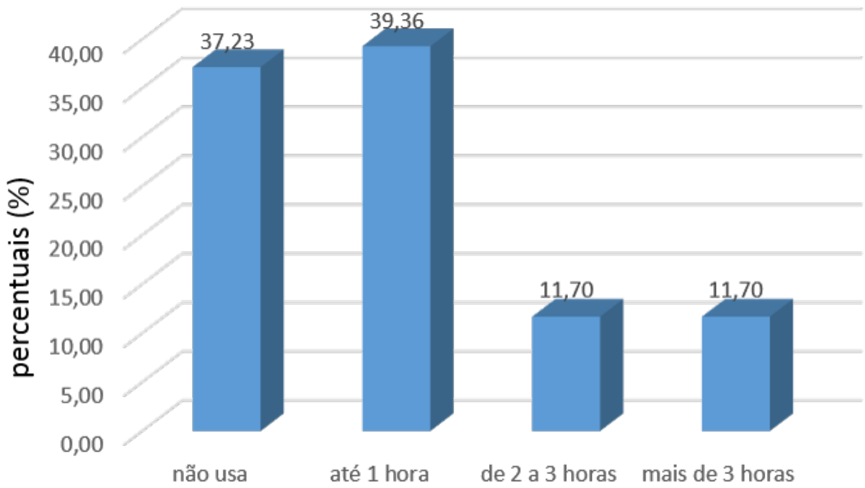
Figura 21 – Uso para o estudo



Fonte: Autor

d) Uso para Jogos: Conforme a figura 22, mais de 60% dos alunos utilizam *smartphones* e *tablets* para jogar por até 1 hora por dia.

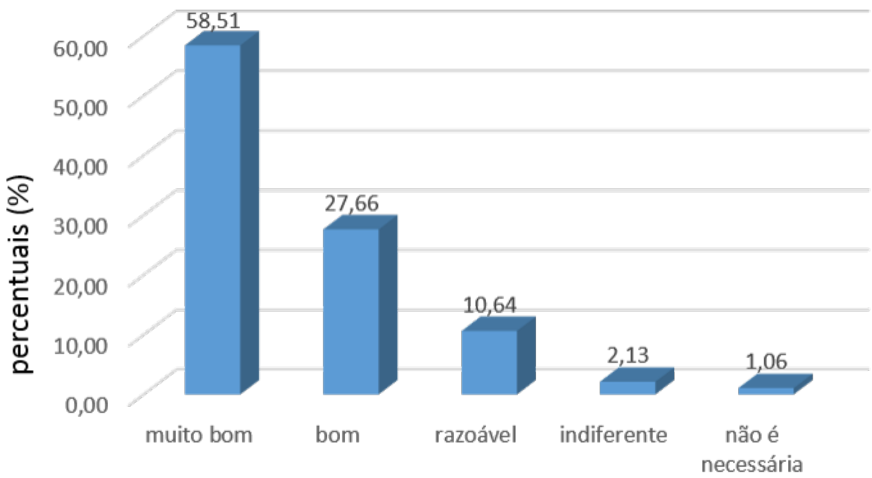
Figura 22 – Uso para jogos



Fonte: Autor

e) Uso para o estudo de matemática: Foi perguntado a opinião dos alunos sobre o uso dos *smartphones* e *tablets* para o estudo de matemática, e como pode-se verificar na figura 23, mais de 80% aprovam o uso.

Figura 23 – Uso para o estudo de matemática



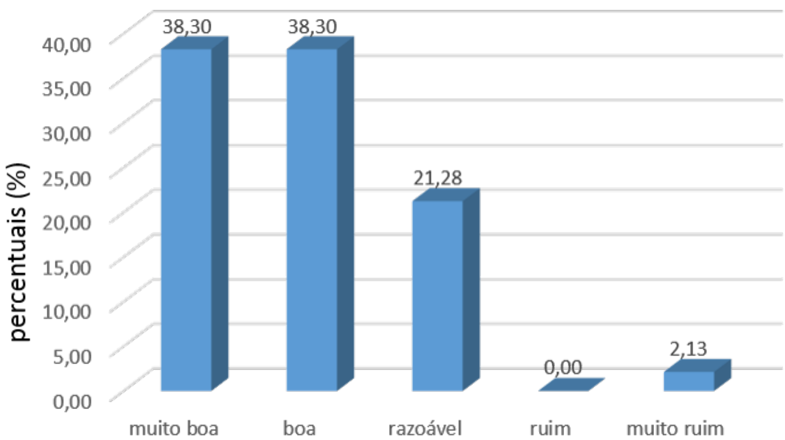
Fonte: Autor

5.1.3 O aplicativo

Reservou-se a última parte do questionário para verificar a impressão dos alunos sobre o aplicativo.

a) Interface do aplicativo: Referente às cores, telas, menus, botões de acesso e ajuda, mais de 75% dos alunos aprovaram a interface, figura 24.

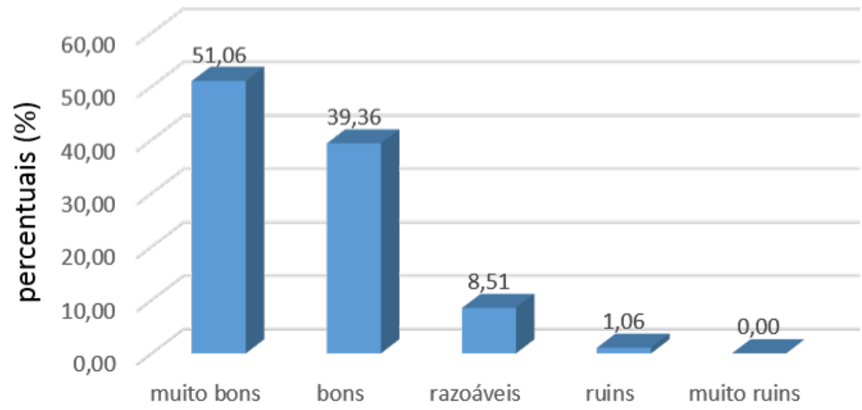
Figura 24 – Interface do aplicativo



Fonte: Autor

b) Recursos do aplicativo: Referente às fases, estrelas, pontuação, sons, de acordo com a figura 25, 90% dos alunos conceituaram de forma positiva os recursos do aplicativo.

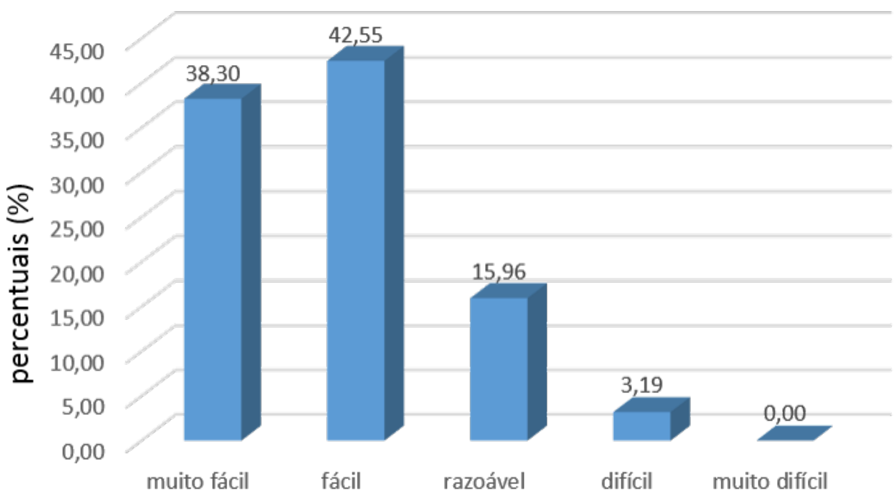
Figura 25 – Recursos do aplicativo



Fonte: Autor

c) Jogabilidade do aplicativo: O aplicativo foi executado pelos alunos sem nenhum tipo de explicação para o uso, e 70% dos alunos conceituaram como fácil ou muito fácil a sua execução, figura 26.

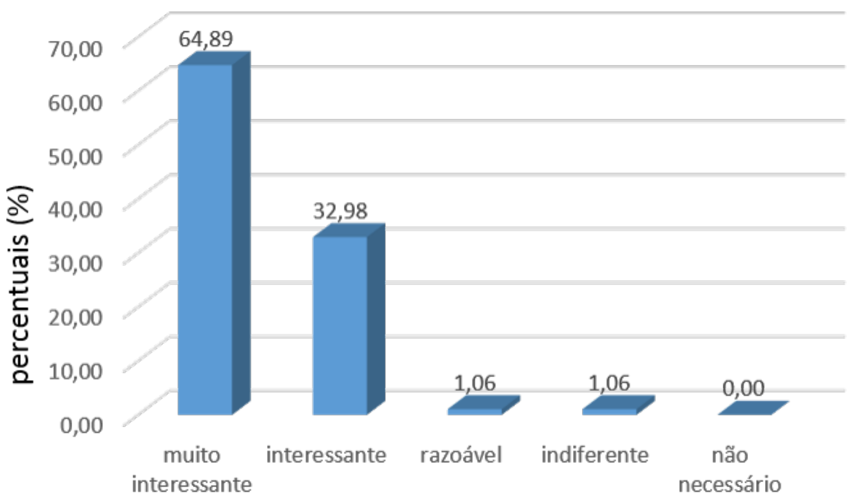
Figura 26 – Jogabilidade do aplicativo



Fonte: Autor

d) Auxílio ao estudo de matemática: Finalmente foi perguntado a opinião dos alunos sobre o uso do aplicativo como auxílio ao estudo e fixação dos conteúdos de matemática, e como verifica-se na figura 27, mais de 95% aprovaram o uso.

Figura 27 – Uso para o estudo de matemática



Fonte: Autor

5.2 RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO DOS DOCENTES

Em relação ao questionário apresentado aos docentes, apesar de serem somente dois professores, foi fundamental colher suas opiniões e que passa-se a descrever.

Os docentes possuem idade acima dos 26 anos, com certa experiência em sala de aula (acima dos 5 anos), fazem uso da tecnologia em sala de aula, conceituaram como muito bom o uso de jogos matemáticos em sala de aula e que utilizariam os aparelhos móveis com tarefas matemáticas.

Quanto ao aplicativo conceituaram como muito boa a interface e os recursos do jogo, bem como acharam-no fácil de jogar e muito interessante a sua utilização como auxílio ao estudo e fixação de conteúdos.

5.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O CAPÍTULO

Verificou-se que 90% dos alunos utilizam a tecnologia móvel para o estudo, ficando evidenciado a utilização frequente e usual de aspectos que caracterizam a aprendizagem móvel por grande parte dos discentes.

Pode-se destacar ainda que apesar de 40% dos alunos não apreciarem a matemática e de 70% jogarem games digitais, constatou-se que mais de 95% aprovaram o aplicativo como auxílio ao estudo e 90% avaliaram positivamente os recursos disponíveis. Esse resultado fornece indícios consistentes sobre o caráter motivacional da gamificação na educação, e no caso, utilizada como estratégia metodológica.

Finalizando, foi solicitado no questionário sugestões para o aplicativo e dois itens destacaram-se:

- inclusão de novos tópicos matemáticos ao aplicativo; e
- aumento do tamanho da fonte.

Cabe comentar que inclusão de novos tópicos será sugestão para realização de trabalhos futuros e o aumento do tamanho da fonte pode ser solucionado com a implementação da função de aumento de tela (zoom). Problemas relacionados ao tamanho das fontes, podem ocorrer em dispositivos móveis, principalmente em smartphones com tamanho reduzido de tela. As aplicações móveis normalmente são adaptáveis nesse quesito, no entanto, telas muito pequenas podem dificultar a vizualização por parte do usuário.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como o trabalho tratou de um aplicativo abordando matrizes, realizou-se primeiramente uma revisão sobre os assuntos de matrizes e determinantes, onde iniciou-se com um breve histórico sobre desenvolvimento da teoria, verificou-se as definições, as propriedades operatórias e finalizou-se com uma aplicação prática: criptografia de uma mensagem utilizando o conceito de matriz inversa. Tal demonstração serviu para caracterizar a contemporaneidade do assunto estudado e exemplificar a aplicabilidade da teoria de matrizes.

Posteriormente realizou-se estudos sobre as características técnicas da aprendizagem móvel e sua aplicação pedagógica, bem como sobre a gamificação e seus aspectos motivacionais. Esse estudo revelou uma gama de aspectos favoráveis à implementação do aplicativo desenvolvido.

Após esse levantamento teórico realizou-se o desenvolvimento de um aplicativo tipo QUIZ, jogo de perguntas e respostas, utilizando a plataforma UNITY. Essa plataforma mostrou-se uma ferramenta simples e acesível para a criação do aplicativo, mesmo para um desenvolvedor com pouca experiêcia.

Finalmente foi apresentado um pequeno estudo através de um experimento com alunos e professores do ensino médio, com a finalidade de avaliar o aplicativo em relação ao layout, aos recursos utilizados e sua aplicabilidade.

Os resultados mostraram um clima favorável para a utilização da tecnologia móvel, devido ao alto percentual de uso dos dispositivos móveis para o estudo, por parte dos alunos. E aproveitando também o fascínio que os jogos exercem sobre os jovens, comprovado pela pesquisa, pode-se concluir que o aplicativo foi bem aceito por parte dos alunos e professores devido a sua base na teoria da Gamificação.

Destaca-se que não foi objetivo a criação de um jogo, mas sim, apropriar-se de algumas características dos jogos como fator motivacional e usar a mobilidade dos smartphones e tabletes como auxílio à aprendizagem em sala de aula. Portanto levando em consideração a pesquisa, pode-se concluir favoravelmente na viabilidade da aprendizagem móvel e das técnicas de gamificação como recurso pedagógico, e, em complemento ao nosso estudo indica-se como trabalhos futuros a serem desenvolvidos:

- uma avaliação pedagógica aprofundada por parte da comunidade acadêmica para a validade do aplicativo como recurso para a melhoria da qualidade de ensino.
- o desenvolvimento do aplicativo em versão com banco de dados atualizado via internet;

- o desenvolvimento do aplicativo com outros tópicos matemáticos.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. ***História da Matemática.*** *Edição Norte Americana, Tradução Helena Castro*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. v. 1. 504 p.

BRASIL. ***PCN+Ensino Médio:*** *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 20 set. 2015.

CASTRO, M. H. G. d. **O desafio da qualidade**. Zahar, 2007. Disponível em: <http://www.rededosaber.sp.gov.br/contents/SIGS-CURSO/sigsc/upload/br/site_25/File/DesafioDaQualidade.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2015.

EVES, H. ***Introdução à História da Matemática.*** *Tradução Hygino H. Domingues.* 1. ed. Campinas: UNICAMP, 2004. v. 1.

FADEL, L. M. et al. ***Gamificação na Educação*** *(a Gamificação e a sistemática de jogo: conceitos sobre a gamificação como recurso motivacional)*. 1. ed. São Paulo: Pimenta Cultural, 2014. 300 p.

HEFEZ, A.; FERNANDES, C. S. ***Introdução à Algebra Linear.*** 1. ed. Rio de janeiro: SBM, 2014. v. 1.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. ***Fundamentos de Matemática Elementar:*** *Sequências, Matrizes, Determinantes e Sistemas.* 8. ed. São Paulo: Atual, 2004. v. 4. 228 p.

INEP. **Resultados por escola do ENEM 2013:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2014. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/enem-por-escola>. Acesso em: 20 set. 2015.

INEP. **Resultados por escola do ENEM 2014:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2015. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/enem-por-escola>. Acesso em: 20 set. 2015.

KAPP, K. M. ***The Gamification of learning and instruction:*** *Game - based methods and strategies for training and education*. San Francisco: Pfeiffer, 2012.

MARCAL, E.; ANDRADE, R.; RIOS, R. **Novas Tecnologias na Educação:** aprendizagem utilizando dispositivos móveis com sistemas de realidade virtual. CINTED-UFRGS, 2005. Disponível em: <http://www.seer.ufrgs.br/renote/article/download/13824/8013>. Acesso em: 10 dez. 2015.

SANCHES, M. H. F. ***Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes***. UNICAMP: Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, 2002.

SANTOS, R. N. d. **Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes**. Dissertação – Projeto de Ensino de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística – USP, 2007. Disponível em: <http://milanesa.ime.usp.br/imath/files/1/43.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2015.

SCHLEMMER, E. et al. **M-LEARNING OU APRENDIZAGEM COM MOBILIDADE: casos no contexto brasileiro**. UNISINOS, 2007. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2007/tc/552007112411PM.pdf>. Acesso em: 10 dez. 2015.

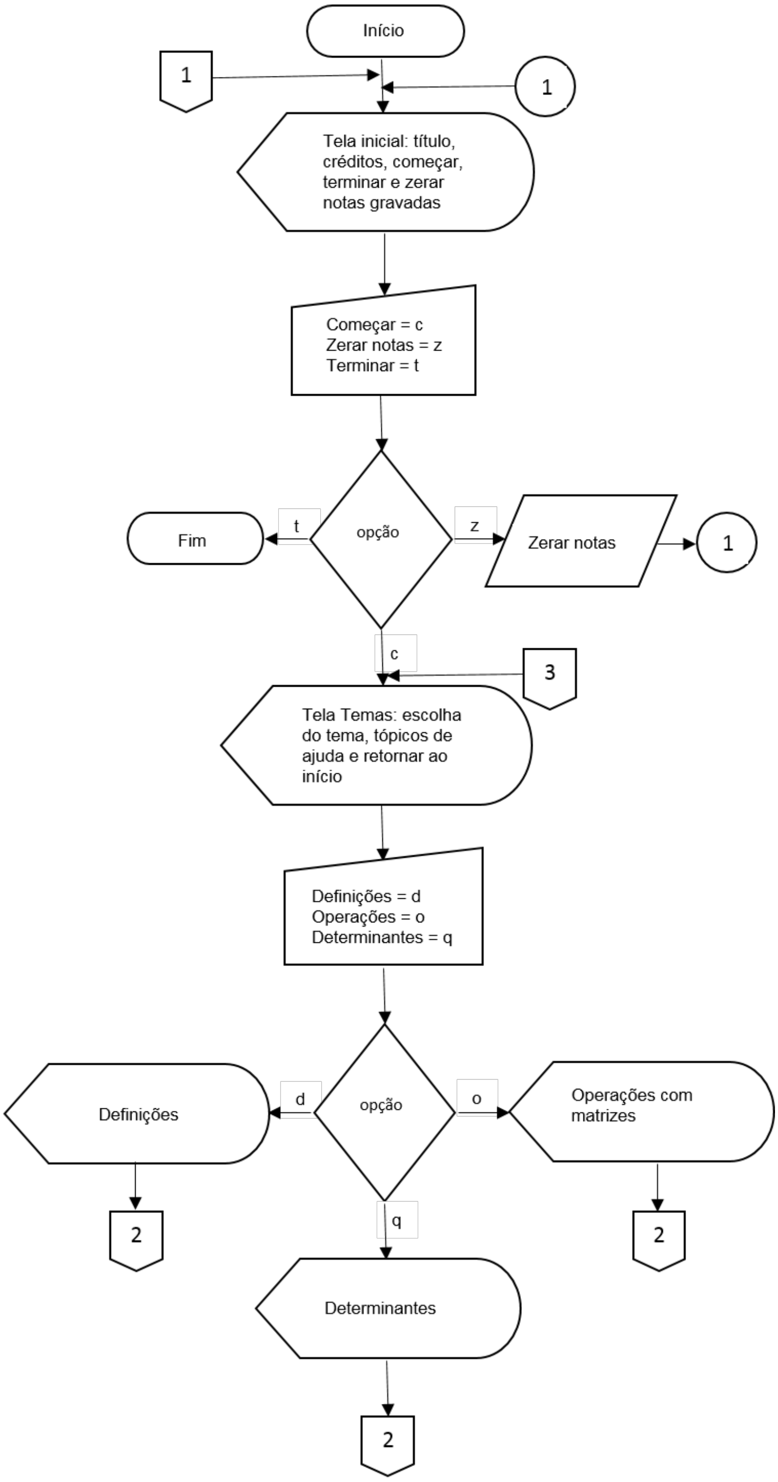
SOUZA, A. L. S. ***Softwares no Ensino da matemática***. UESC: Dissertação (mestrado-PROFMAT) - Universidade Estadual de Santa Cruz - BA, 2015. 59 p.

UNESCO. **O Futuro da aprendizagem móvel:** implicações para planejadores e gestores de políticas. *Documentos de trabalho da UNESCO sobre aprendizagem móvel*, Brasília: UNESCO, 2014. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002280/228074POR.pdf>. Acesso em: 10 out. 2015.

VIANNA, Y. et al. ***Gamification, Inc.:*** *como reinventar empresas a partir de jogos.* 1. ed. Rio de Janeiro: MJV Press, 2013.

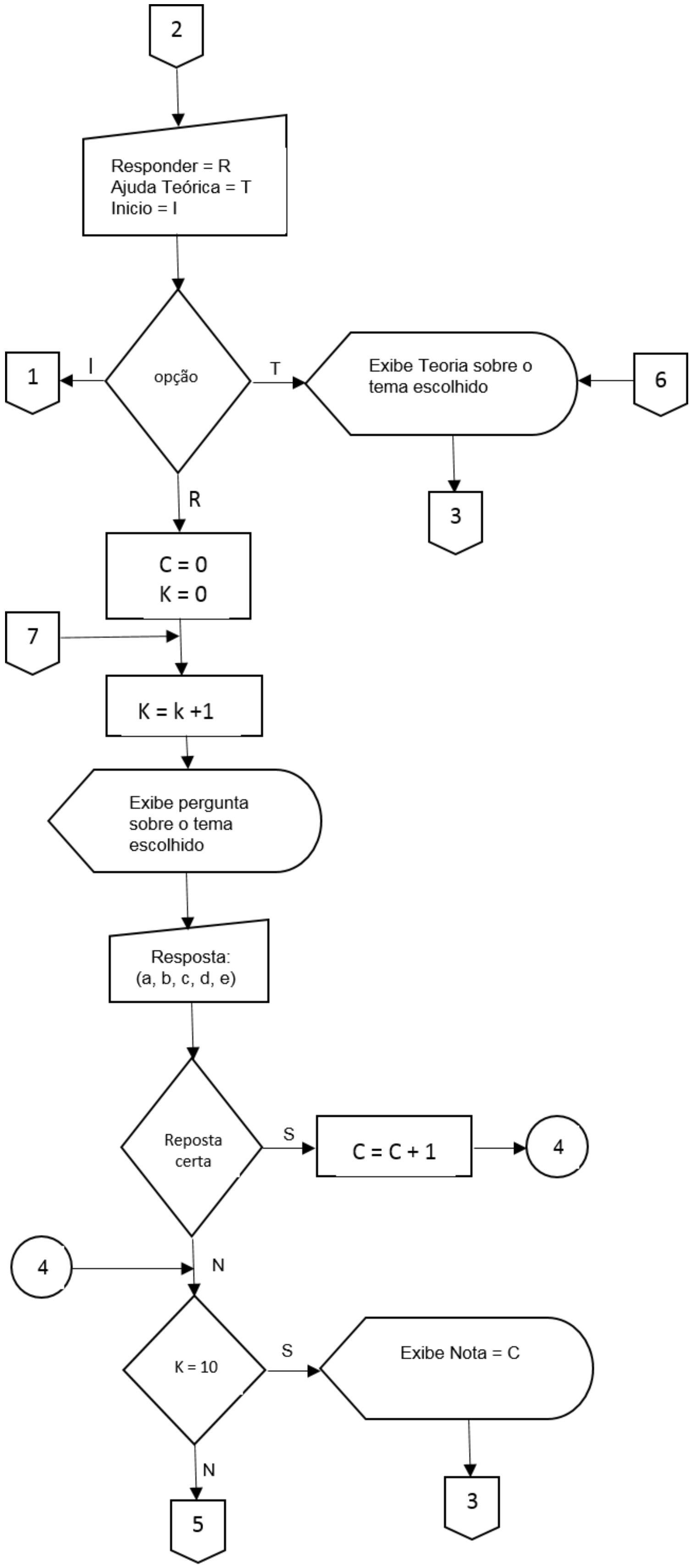
A FLUXOGRAMA DO APLICATIVO

Figura 28 – fluxograma do aplicativo - Parte 1



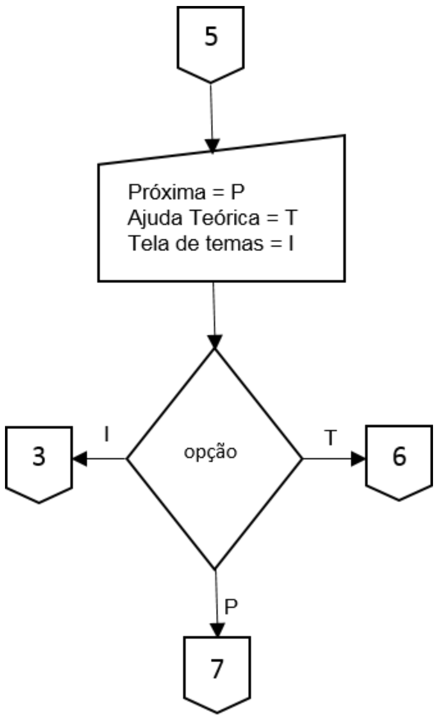
Fonte: Autor

Figura 29 – fluxograma do aplicativo - Parte 2



Fonte: Autor

Figura 30 – fluxograma do aplicativo - Parte 3



Fonte: Autor

B QUESTIONÁRIO AOS ALUNOS

Figura 31 – Questionário aos alunos - página 1

QUESTIONÁRIO (alunos)

1) Idade:
( ) 14 anos ( ) 15 anos ( ) 16 anos ( ) mais de 16 anos

2) Sexo:
( ) masculino ( ) feminino

3) Quanto tempo estuda em casa diariamente?
( ) até 1 hora ( ) de 2 a 3 horas ( ) mais de 3 horas

4) Qual a sua afinidade com matemática?
( ) gosto muito ( ) gosto ( ) indiferente ( ) não gosto ( ) tenho aversão

5) Sobre jogos digitais (em videogames, ou computadores, ou celular smartphone, ou tablet) você?
( ) joga frequentemente ( ) joga, mas pouco ( ) jogou já, mas poucas vezes ( ) nunca jogou

6) Já usou ou usa um celular smartphone ou tablet?
( ) sim ( ) não

7) Se possuir celular smartphone ou tablet:

a) frequência de acesso a internet:
( ) sempre ( ) nem sempre ( ) raramente ( )nunca

b) você usa o celular smartphone ou tablet para acessar (você pode marcar mais do que uma alternativa):
( ) redes sociais
( ) notícias
( ) estudos
( ) jogos
( ) outros: ____________

c) você usa o celular smartphone ou tablet para o estudo? Quanto tempo de uso diário?
( ) não usa ( ) até 1 hora ( ) de 2 a 3 horas ( ) mais de 3 horas

d) você usa o celular smartphone ou tablet para jogar? Quanto tempo de uso diário?
( ) não usa ( ) até 1 hora ( ) de 2 a 3 horas ( ) mais de 3 horas

8) O que você acha do uso do celular smartphone ou tablet como auxílio no estudo da matemática:
( ) muito bom ( ) bom ( )razoável ( ) indiferente ( ) não é necessária

SOBRE O APLICATIVO

9) Sobre a interface do aplicativo (visualização, botões, cores, etc.), o que você acha?
( ) muito boa ( ) boa ( ) razoável ( ) ruim ( )muito ruim

10) Sobre os recursos do jogo (pontuação, estrelas, fases, etc.), o que você acha?
( ) muito bons ( ) bons ( ) razoáveis ( ) ruins ( ) muito ruins

Fonte: Autor

Figura 32 – Questionário aos alunos - página 2

11) Sobre a jogabilidade (manuseio do jogo), o que você acha?
( ) muito fácil ( ) fácil ( ) razoável ( ) difícil ( ) muito difícil

12) Sobre os recursos didáticos (ajudas de conteúdo, correção, etc.), o que você acha?
( ) muito bom ( ) bom ( ) razoável ( ) indiferente ( ) não são necessários

13) O que você acha da utilização do jogo como auxílio ao estudo e fixação dos conteúdos
( ) muito interessante ( ) interessante ( ) razoável ( ) indiferente ( ) não necessário

14) Sugestões:

Fonte: Autor

C QUESTIONÁRIO AOS PROFESSORES

Figura 33 – Questionário aos professores

QUESTIONÁRIO (Professor)

1) Idade:
( ) até 25 anos ( ) 26 a 35 anos ( ) mais de 35 anos

2) Sexo:
( ) masculino ( ) feminino

3) Tempo de magistério:
( ) até 3 anos ( ) 4 a 10 anos ( ) mais de 11 anos

4) Faz uso da tecnologia em sala de aula?
( ) sempre ( ) nem sempre ( ) raramente ( )nunca

5) Qual sua opinião sobre o uso de jogos matemáticos no contexto escolar?
( ) muito bom ( ) bom ( ) razoável ( ) indiferente ( ) não é necessário

6) Utilizaria os recursos de um tablet ou smartphone com atividades para casa e/ou em sala de aula?
( ) sempre ( ) nem sempre ( ) raramente ( )nunca

SOBRE O APLICATIVO

7) Sobre a interface do aplicativo (visualização, botões, cores, etc.), o que você acha?
( ) muito boa ( ) boa ( ) razoável ( ) ruim ( )muito ruim

8) Sobre os recursos do jogo (pontuação, estrelas, fases, etc.), o que você acha?
( ) muito bons ( ) bons ( ) razoáveis ( ) ruins ( ) muito ruins

9) Sobre a jogabilidade (manuseio do jogo), o que você acha?
( ) muito fácil ( ) fácil ( ) razoável ( ) difícil ( ) muito difícil

10) Sobre os recursos didáticos (ajudas de conteúdo, correção, etc.), o que você acha?
( ) muito bom ( ) bom ( ) razoável ( ) indiferente ( ) não são necessários

11) O que você acha da utilização do jogo como auxílio ao estudo e fixação dos conteúdos?
( ) muito interessante ( ) interessante ( ) razoável ( ) indiferente ( ) não necessário

12) Sugestões :

Fonte: Autor

D RESULTADOS DO QUESTIONÁRIO

D.1 Os estudantes

Tabela 3 – Idade dos alunos

idade dos alunos	quantidade	percentual
14 anos	0	0,00
15 anos	23	24,47
16 anos	42	44,68
mais de 16 anos	29	30,85
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 4 – Sexo dos alunos

sexo	quantidade	percentual
masculino	40	42,55
feminino	54	57,45
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 5 – Tempo diário de estudo em casa

tempo de estudo diário	quantidade	percentual
até 1 hora	36	38,30
de 2 a 3 horas	41	43,62
mais de 3 horas	17	18,09
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 6 – Afinidade com a matemática

afinidade	quantidade	percentual
gosto muito	20	21,28
gosto	37	39,36
indiferente	17	18,09
não gosto	11	11,70
tenho aversão	9	9,57
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 7 – Jogos digitais

frenquência de jogo	quantidade	percentual
joga frequentemente	23	24,47
joga, mas pouco	44	46,81
jogou, mas poucas vezes	25	26,60
nunca jogou	2	2,13
total	94	100,00

Fonte: Autor

D.2 Uso de smartphones ou tablets

Tabela 8 – Uso de smartphones ou tablets

utilização	quantidade	percentual
sim	94	100,00
não	0	0,00
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 9 – Acesso à internet

frequência de acesso	quantidade	percentual
sempre	78	82,98
nem sempre	11	11,70
raramente	5	5,32
nunca	0	0,00
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 10 – Acesso à internet

tipo de acesso	quantidade	percentual
redes sociais	83	88,30
notícias	63	67,02
estudos	87	92,55
jogos	53	56,38
outros	21	22,34

Fonte: Autor

Tabela 11 – Uso de smartphone e tablet para estudar

frequência diária	quantidade	percentual
não usa	5	5,32
até 1 hora	58	61,70
de 2 a 3 horas	28	29,79
mais de 3 horas	3	3,19
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 12 – Uso de smartphone e tablet para jogar

frequência diária	quantidade	percentual
não usa	35	37,23
até 1 hora	37	39,36
de 2 a 3 horas	11	11,70
mais de 3 horas	11	11,70
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 13 – Uso de smartphone e tablet para estudar matemática

opinião	quantidade	percentual
muito bom	55	58,51
bom	26	27,66
razoável	10	10,64
indiferente	2	2,13
não é necessária	1	1,06
total	94	100,00

Fonte: Autor

D.3 O aplicativo

Tabela 14 – Interface do aplicativo

opinião	quantidade	percentual
muito boa	36	38,30
boa	36	38,30
razoável	20	21,28
ruim	0	0,00
muito ruim	2	2,13
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 15 – Recursos do aplicativo

opinião	quantidade	percentual
muito bons	48	51,06
bons	37	39,36
razoáveis	8	8,51
ruins	1	1,06
muito ruins	0	0,00
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 16 – Jogabilidade do aplicativo

opinião	quantidade	percentual
muito fácil	36	38,30
fácil	40	42,55
razoável	15	15,96
difícil	3	3,19
muito difícil	0	0,00
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 17 – Recursos didáticos do aplicativo

opinião	quantidade	percentual
muito bons	44	46,81
bons	36	38,30
razoáveis	13	13,83
indiferente	1	1,06
não são necessários	0	0,00
total	94	100,00

Fonte: Autor

Tabela 18 – Aplicativo como auxílio ao estudo de matrizes

opinião	quantidade	percentual
muito interessante	61	64,89
interessante	31	32,98
razoável	1	1,06
indiferente	1	1,06
não necessário	0	0,00
total	94	100,00

Fonte: Autor