UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL-PROFMAT

DENIS APOLINÁRIO DA SILVA

TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM CONJUNTA

Boa Vista, RR
2014

DENIS APOLINÁRIO DA SILVA

TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM CONJUNTA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda

Boa Vista - RR
2014

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S586t Silva, Denis Apolinário da.
Trigonometria e geometria : uma abordagem conjunta / Denis Apolinário da Silva. -- Boa Vista, 2014.
61 f : il.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Mestrado em Matemática Profissional - PROFMAT.

1 – Geometria. 2 – Trigonometria. 3 – Método trigonométrico. 4 – Método geométrico. I – Título. II. – Castañeda, Alberto Martin Martinez (orientador).

CDU- 514.116

DENIS APOLINARIO DA SILVA

TRIGONOMETRIA E GEOMETRIA: UMA ABORDAGEM CONJUNTA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática-SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, defendida em 29 de abril de 2014, e avaliado pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Alberto Martinez Castañeda - UFRR
Orientador

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha - UFSJ

Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva - UFRR

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus que não apenas me deu o dom da vida, mas também me capacitou para fazer este trabalho.

À minha mãe, Raimunda, e a meu padrasto, João, pelo amor que recebi, pela educação e pelos sacrifícios que fizeram para cuidar de mim e para que eu pudesse estudar.

Sou muito grato ao professor Alberto Martin Martinez Castañeda que me orientou e auxiliou no desenvolvimento deste trabalho.

Agradeço ao professor Joselito de Oliveira, coordenador local do PROFMAT, que tanto se empenhou para que tivéssemos êxito durante estes dois anos de formação.

À Sociedade Brasileira de Matemática-SBM e a Universidade Federal de Roraima-UFRR.

E também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pelo auxílio financeiro.

Sou imensamente grato aos colegas e amigos que fiz na turma PROFMAT 2012, Rodson, José Walter, Jerrimar, Admilson, Ana, Eduardo e Wender, pela troca de experiências e aprendizado e pelo incentivo.

E um agradescimento especial a Girlane, minha esposa, e Tales, meu filho, pelo incentivo, compreensão e paciência, que me deram força para continuar e chegar até o final.

RESUMO

A relação entre a Geometria e a Trigonometria vai além da forma clássica em que estas duas áreas da Matemática são apresentadas no Ensino Básico. Existe uma tendência a separá-las por fronteiras rígidas cerceando de certa forma a cooperação entre os métodos e técnicas de uma e de outra, com o objetivo de resolver determinados problemas matemáticos, cuja solução não está obrigatoriamente inscrita numa destas áreas. Por exemplo, problemas propostos em olimpíadas. Neste trabalho mostra-se algumas dessas possibilidades trabalhando com situações em que a partir de um resultado geométrico obtem-se determinados resultados trigonométricos ou, o contrário.

Palavras-chave: Geometria. Trigonometria. Métodos trigonométrico. Método geométrico.

ABSTRACT

The relationship between Geometry and Trigonometry goes beyond the classic way in which these two areas of mathematics are presented in high school. There is a tendency to separate them by rigid boundaries, restricting somehow cooperation between the methods and techniques of one of them in the other in order to solve certain mathematical problems, whose solution is not compulsorily insured in a particular area. For example, problems proposed in the Olympics. In this work we will show some possibilities of interaction, working with situations where from geometrical results we obtain certain trigonometric results and otherwise.

Keywords: Geometry. Trigonometry. Trigonometric methods. Geometric methods.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Tradicionalmente, no ensino fundamental, a Trigonometria é introduzida com um vínculo inicial com a Geometria, mediante a definição das razões trigonométricas diretas, quais sejam: seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente, tendo como base o triângulo retângulo. Posteriormente se estudam as relações métricas conhecidas como Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, em triângulos quaisquer. Somente no ensino médio é que se generalizam as definições das funções trigonométricas, trabalhando-se agora com o círculo. Neste nível de ensino, o vínculo entre Trigonometria e Geometria fica, geralmente, circunscrito aos tradicionais problemas de resolução de triângulos.

Porém, as possibilidades e a riqueza da relação entre essas duas áreas ultrapassa o contexto descrito no parágrafo acima. O emprego de métodos e técnicas da Geometria e da Trigonometria concomitantemente na abordagem de problemas de uma ou outra área permite, em muitos casos, obter demonstrações de teoremas e soluções de problemas com maior eficiência e elegância. Por outro lado, combinando métodos de ambas as áreas ilustra-se a unidade da Matemática e desenvolvem-se as habilidades para a resolução de problemas.

Neste trabalho propõe-se como objetivo geral, mostrar essa relação estreita que existe entre a Geometria e a Trigonometria e como cada uma destas áreas da Matemática pode contribuir com seus métodos e técnicas para a demonstração de proposições e a resolução de problemas da outra área. Pretende-se concretizar esse objetivo geral, mediante as seguintes ações: (i) Apresentar a utilização de teoremas clássicos da Geometria para demonstrar de forma mais simples, clara e elegante certos resultados importantes da Trigonometria como, por exemplo, a Lei dos Senos. (ii) Demonstrar alguns teoremas da Geometria, como o Teorema de Steiner Lehmus, mediante a utilização de métodos trigonométricos. (iii) Resolver alguns problemas geométricos de duas formas, utilizando técnicas geométricas e técnicas trigonométricas.

A metodologia utilizada na elaboração do trabalho consistiu de uma pesquisa bibliográfica em livros, artigos científicos e comunicações, impressos ou tomados da Internet. Os materiais obtidos permitiram uma compreensão do assunto pesquisado e seu "estado", bem como uma comparação com a forma em que tradicionalmente são ministrados os conteúdos trigonométricos no ensino médio. Então, foi levantada a hipótese relativa à possibilidade de mostrar, em alguns exemplos concretos, a rica relação que existe entre a

Geometria e a Trigonometria e as possibilidades de "cooperação"entre ambas as áreas na resolução de problemas e na demonstração de proposições. A percepção dessa realidade por parte de professores do ensino fundamental poderia dar lugar a estratégias de ensino da Trigonometria que contribuam a melhorar a motivação e a compreensão dos alunos nesta área da Matemática, geralmente dificultosa. Foram definidos os objetivos do trabalho e delineado um caminho concreto para o seu cumprimento, que incluiu os processos lógicos de análise e síntese, bem como o prazeroso trabalho matemático da demonstração de algumas proposições e da resolução de determinados problemas. No fim, redigimos esta dissertação, suscetível de melhorias e correções, que constitui o nosso trabalho de conclusão do Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e que desejamos que seja de alguma utilidade a professores do ensino fundamental e a alunos interessados na Matemática.

Na revisão bibliográfica gostaríamos de destacar o livro da autoria de Maor (2002), intitulado Trigonometric Delights que, como o próprio título indica, é uma verdadeira "delícia trigonométrica"e que foi a fonte principal de inspiração deste trabalho.

A dissertação consiste essencialmente de três capítulos. No primeiro, demonstramos alguns resultados importantes da Trigonometria, como a Lei dos Senos e as fórmulas do seno e do cosseno do ângulo duplo, dentre outras, utilizando proposições geométricas. No segundo capítulo invertemos o sentido, apresentamos certos teoremas da Geometria, por exemplo, o de Steiner Lehmus, provados utilizando técnicas trigonométricas. No terceiro capítulo resolvemos alguns problemas utilizando ambos os métodos, o trigonométrico e o geométrico. Também mostramos um problema geométrico de otimização resolvido trigonometricamente. Foram incluídos três apêndices. No primeiro, é provado o teorema do ângulo inscrito, que junto com seus corolários, segundo Maor (2002), é "um tesouro sem dono de informações trigonométricas"(em tradução livre). No segundo apêndice é provado o Teorema de Ptolomeu e no terceiro, dois corolários do teorema do ângulo inscrito. Também foi incluído um anexo com a demonstração de alguns teoremas utilizados.

Capítulo 1

OBTENDO RESULTADOS DA TRIGONOMETRIA A PARTIR DA GEOMETRIA

Neste capítulo apresentaremos algumas proposições trigonométricas importantes e suas demonstrações baseando-nos em teoremas da Geometria Euclidiana Plana, com o objetivo de exemplificar a relação entre ambas as áreas, no sentido "a Geometria ao serviço da Trigonometria". O conhecido teorema que relaciona as medidas dos ângulos central e inscrito num círculo constitui a peça teórica chave que utilizaremos. Eli Maor diz o seguinte a respeito desse teorema (em tradução livre): "este simples teorema juntamente com seus dois corolários é um tesouro sem dono de informação trigonométrica"(MAOR, 2002).

1.1 O teorema do ângulo inscrito

O teorema do ângulo inscrito é bem antigo e também muito conhecido. Na obra "Os Elementos"de Euclides, este teorema aparece no Livro III como uma de suas proposições. Antes de enunciarmos propriamente o teorema lembremos as definições de ângulo central e ângulo inscrito num dado círculo, tais definições podem ser vistas em (BARBOSA, 2006) e (NETO, 2013).

Definição 1.1.1. *Ângulo central relativo a uma circunferência é qualquer ângulo que tenha o vértice no centro da circunferência.*

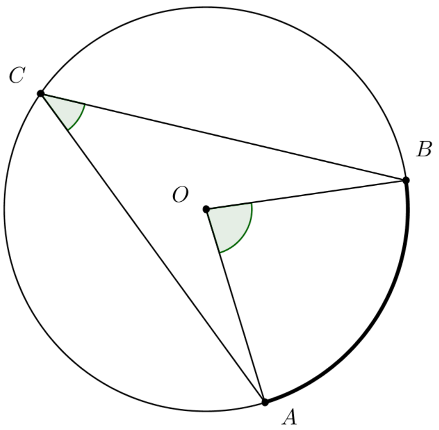
Observação 1.1.1. *Seja Γ um círculo de centro O. Duas semirretas com origem em O determinam dois ângulos centrais em Γ, que denotaremos por $\angle AOB$, em que A e B são os pontos de interseção das semirretas com o círculo Γ. O contexto tornará claro a qual dos dois ângulos $\angle AOB$ estamos nos referindo.*

Definição 1.1.2. *Entende-se por ângulo inscrito num círculo, o ângulo cujo vértice é um ponto do círculo e cujos lados são duas cordas do mesmo.*

Observação 1.1.2. *O arco da circunferência que não contiver o vértice do ângulo inscrito é denominado "arco correspondente ao ângulo inscrito". Diz-se também que o ângulo subtende ao arco.*

A figura 1.1 mostra os ângulos $\angle AOB$ (central) e $\angle ACB$ (inscrito), ambos num círculo de centro O. O arco $\widehat{\text{AB}}$ é subtendido por ambos os ângulos, central e inscrito.

Figura 1.1: Ângulo central e ângulo inscrito numa circunferência.



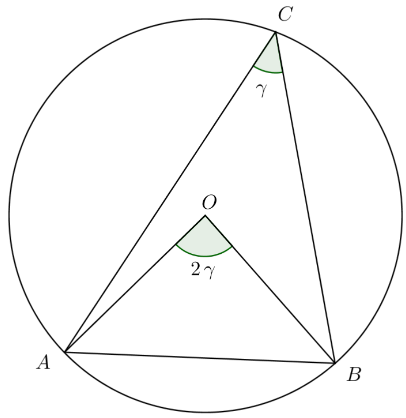
Fonte: Autor

A seguir enunciamos o teorema do ângulo inscrito.

Teorema 1.1.1 (Teorema do ângulo inscrito)**.** *A medida de todo ângulo inscrito numa circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente.*

A figura 1.2 ilustra bem o que o teorema está dizendo, temos o ângulo inscrito $\angle ACB$ de medida γ e o ângulo central correspondente $\angle AOB$ de medida 2γ.

Figura 1.2: Ângulo inscrito numa circunferência e ângulo central correspondente,com suas respectivas medidas relativas.

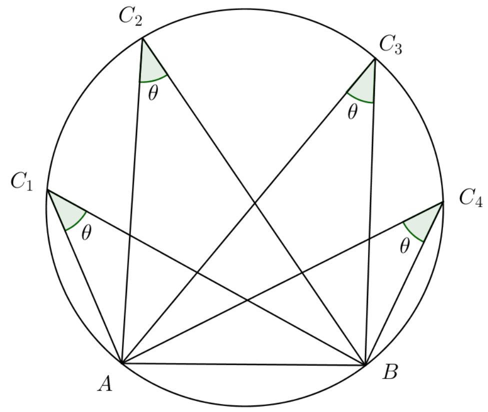


Fonte: MAOR (2002)

O corolário seguinte é uma consequência imediata desse teorema.

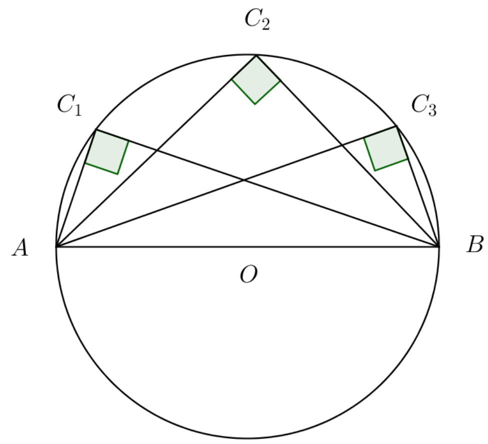
Corolário 1.1.1. *Num dado círculo, todos os ângulos inscritos que subtendem a mesma corda são iguais. Em particular, todos os ângulos inscritos que subtendem um diâmetro são retos.*

Figura 1.3: Ângulos inscritos numa circunferência subtendidos ao mesmo arco.



Fonte: MAOR (2002)

Figura 1.4: Ângulos inscritos numa circunferência subtendidos a um diâmetro.



Fonte: MAOR (2002)

A demonstração do teorema 1.1.1 será apresentada no Apêndice A.

Observação 1.1.3. *Com relação a primeira parte do corolário 1.1.1. pode-se dizer também que ângulos inscritos iguais estão subtendidos a cordas de mesma medida. E com relação a segunda parte, se um ângulo inscrito é reto, então, ele subtende um diâmetro do círculo.* (Veja a demonstração no apêndice C)

Ainda a respeito do corolário mencionado acima. Segundo BOYER (1974), esta proposição pode ter sido aprendida por Tales durante suas viagens à Babilônia. Sendo que a tradição vai ainda mais longe e lhe atribui uma espécie de demonstração.

O primeiro resultado que nos propomos a obter a partir do teorema é a Lei dos Senos.

1.1.1 A Lei dos Senos

Dado o triângulo $\triangle ABC$, estabeleceremos as seguintes notações: a, b, e c representam os comprimentos dos lados opostos aos vétices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente, e α, β, γ representam as medidas dos ângulos relativos aos vértices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$.

Teorema 1.1.2. *Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, então*

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma}$$

Demonstração. **(A)** Consideremos um triângulo acutângulo $\triangle ABC$ qualquer. Na parte (B) consideraremos um triângulo obtusângulo para completar a demonstração da proposição para um triângulo qualquer.

Em Geometria demonstra-se que todo triângulo é inscritível numa circunferência [1].

Seja, conforme mostrado na figura 1.5, a circunferência de centro O e raio r, na qual está inscrito o triângulo $\triangle ABC$. Tracemos os raios OA e OB. O ângulo $\angle AOB$ é central, o ângulo $\angle ACB$ é inscrito e ambos subtendem o mesmo arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$. Sejam γ a medida do ângulo $\angle ACB$ e a, b e c as medidas dos lados do triângulo $\triangle ABC$, conforme as notações usuais.

Aplicando o teorema 1.1.1, tem - se que $\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma$. Seja D o pé da perpendicular-bissetriz baixada[2] de O sobre AB. No triângulo retângulo $\triangle ODB$, tem-se:

$$sen\gamma = \frac{DB}{r} = \frac{\frac{AB}{2}}{r} = \frac{AB}{2r}$$

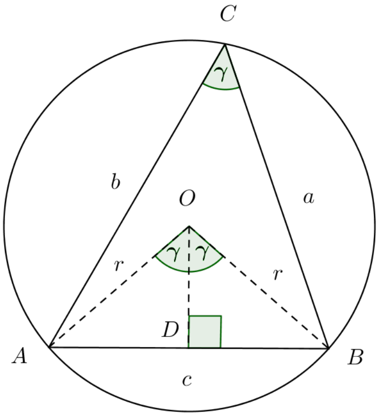
Daí, sendo $AB = c$, obtemos

$$\frac{c}{sen\gamma} = 2r = \text{constante.}$$

[1] Veja o teorema 3.0.2 do Anexo A.

[2] No triângulo isósceles a altura relativa à base é bissetriz do ângulo oposto à base e mediatriz da base [Veja Teorema 3.0.3 do Anexo A].

Figura 1.5: Lei dos Senos no caso do ângulo agudo.



Fonte: MAOR (2002)

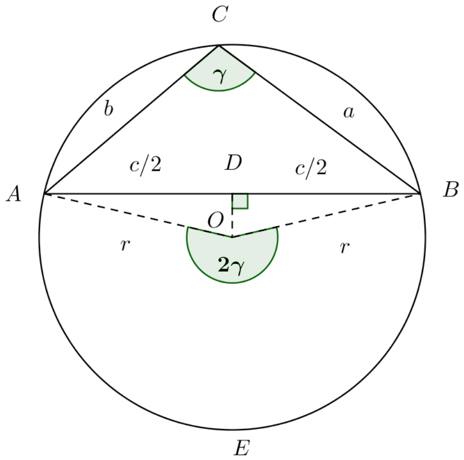
Se repetirmos o mesmo procedimento para os lados a e b resulta a Lei dos Senos:

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2r \tag{1.1}$$

.

(B) Como foi dito, o ângulo γ com o qual trabalhamos na demonstração na parte (A) acima é agudo. Isto significa que o centro da circunferência circunscrita está no interior do triângulo. Para concluir a demonstração consideraremos agora o caso em que o ângulo γ seja obtuso. Para facilitar a compreensão vamos considerar a figura 1.6.

Figura 1.6: Lei dos Senos no caso do ângulo obtuso.



Fonte: MAOR (2002)

Sendo γ obtuso, o centro O fica fora do triângulo $\triangle ABC$ e então o arco $\overset{\frown}{\mathrm{AEB}}$ é maior do que a semicircunferência. Tracemos os raios OA e OB (com linha pontada na figura 1.6), ficando assim construído o triângulo isósceles $\triangle AOB$, de base AB. Pelo teorema 1.1.1, sendo γ a medida do ângulo inscrito $\angle ACB$, tem-se que a medida do ângulo central $\angle AOB$ (que subtende o arco $\overset{\frown}{\text{AEB}}$) é 2γ. Note-se que o arco $\overset{\frown}{\text{AEB}}$ é o subtendido por ambos os ângulos, central e inscrito, logo o teorema 1.1.1 se refere, no caso, a esse arco.

De forma análoga ao caso anterior, traçamos a perpendicular-bissetriz (também mediatriz do lado AB) a partir de O, que encontra o lado AB no ponto D. Com essa construção, temos o triângulo $\triangle ODB$ retângulo em D, no qual $DB = \dfrac{c}{2}$. Para facilitar as notações, denotemos por θ ao ângulo interno $\angle AOB$ do $\triangle AOB$. Então,

$$\theta = 360^{\text{o}} - 2\gamma \quad \text{e} \quad \frac{\theta}{2} = 180^{\text{o}} - \gamma \tag{1.2}$$

Observe que $\angle BOD = \dfrac{\theta}{2} = 180^{\text{o}} - \gamma$. Assim, no triângulo $\triangle OBD$:

$$sen\ \angle BOD = sen\ \frac{\theta}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} \tag{1.3}$$

De (1.2) e (1.3),

$$sen\ \frac{\theta}{2} = sen\ (180^{\text{o}} - \gamma) = sen\ \gamma \tag{1.4}$$

De (1.3) e (1.4) resulta

$$sen\ \gamma = \frac{c}{2r}, \quad \text{ou,} \quad \frac{c}{sen\ \gamma} = 2r. \tag{1.5}$$

Para os ângulos agudos do triângulo obtusângulo vale o raciocínio desenvolvido em (A), logo, provamos que nesse triângulo

$$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen\ \gamma} = 2r \tag{1.6}$$

A Lei dos senos está provada em qualquer triângulo.

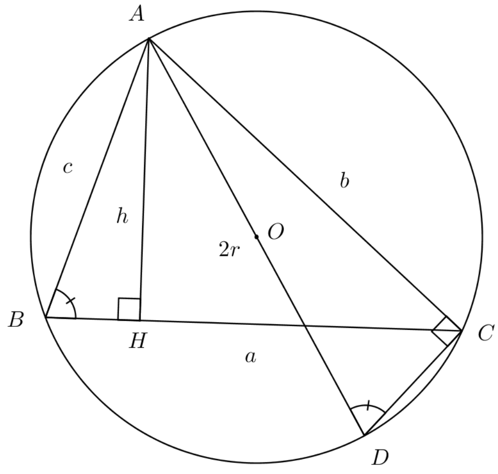
$\square$

Chamamos a atenção para o valor da constante $2r$ dada por essas razões. No tratamento tradicional da Lei dos Senos prova-se a proporcionalidade, mas permanece desconhecido o valor da razão. Esta demonstração, além de elegante, clara e mais simples que as tradicionais, exprime que em todo triângulo a razão entre um lado e o seno do ângulo oposto a este lado é constante e igual ao dobro do raio (diâmetro) da circunferência circunscrita a este triângulo. Para Eli Maor, "esta demonstração é não somente um modelo de simplicidade, mas exprime a Lei dos Senos na forma mais completa"(MAOR, 2002).

Resulta interessante dispor de uma expressão do valor da razão $2r$, diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Assim, abre-se um leque de aplicações da Lei dos Senos. A seguir calculamos r em função das medidas dos lados do triângulo [3].

Considere o triângulo $\triangle$ inscrito em uma circunferência centro O e raio r. Seja $AH = h$ uma altura e seja AD um diâmetro dessa circunferência (Figura 1.7).

Figura 1.7:



Fonte: WAGNER (2004)

Veja que os triângulos $\triangle AHB$ e $\triangle ACD$ são semelhantes uma vez que os ângulos $\angle AHB$ e $\angle ACD$ são retos e os ângulos $\angle AHB$ e $\angle ACD$ são iguais, pois, subtendem o mesmo arco. Resultando desta semelhança

$$\begin{aligned} \frac{AB}{AD} &= \frac{AH}{AC} \\ \frac{c}{2r} &= \frac{h}{b} \\ bc &= 2rh \end{aligned} \tag{1.7}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade (1.7) pelo comprimento $\underline{a}$ do lado BC, obtemos

$$abc = 2rah \tag{1.8}$$

Como ah é o dobro da área do triângulo $\triangle ABC$ a equação (1.8) fica

$$abc = 4r[\triangle ABC] \quad \text{ou} \quad r = \frac{abc}{4[\triangle ABC]} \tag{1.9}$$

[3]Tal resultado foi retirado do artigo intitulado "O triângulo e suas principais circunferências" de autoria do professor Eduardo Wagner.

Sabe-se que a fórmula de Heron nos permite calcular a área de um triângulo quando são conhecidos seus lados. Assim equação (1.9) fica

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}, \quad \text{em que } \; p = \frac{a+b+c}{2}. \tag{1.10}$$

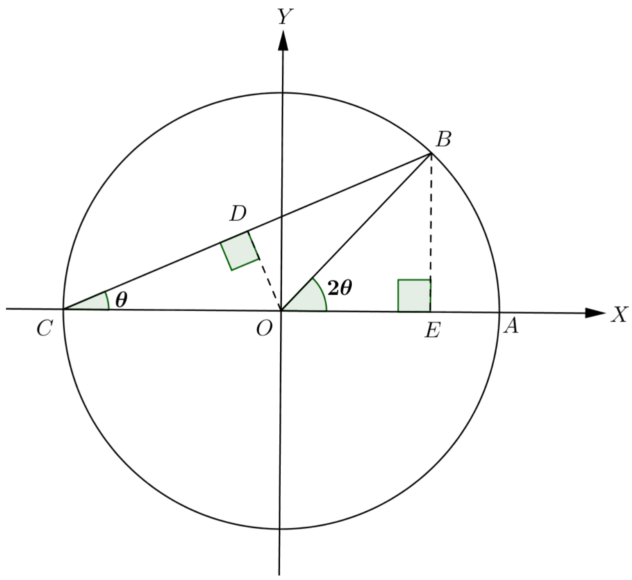
Observação 1.1.4. *$[\triangle ABC]$ denota a área do triângulo $\triangle ABC$.*

1.1.2 Seno e Cosseno do Ângulo Duplo

Como já dito antes, o teorema do ângulo inscrito guarda muitas informações trigonométricas a serem desvendadas, então, vamos continuar o nosso estudo explorando mais dessas informações com o objetivo de deduzir as fórmulas do seno e o cosseno do ângulo duplo.

Consideremos a figura 1.8. Ela mostra um círculo unitário de centro O no sistema cartesiano ortogonal OXY, com origem em O, e os pontos $A(1,0)$ e $C(-1,0)$. Seja B um ponto no círculo que, para fixar ideias, tomamos no primeiro quadrante, o ponto B determina os ângulos $\angle AOB$ e $\angle ACB$, ambos subtendendo o arco $\widehat{\text{AB}}$. Pelo teorema 1.1.1, se $\angle AOB = 2\theta$ então $\angle ACB = \theta$.

Figura 1.8: Prova da fórmula do ângulo duplo aplicando o teorema 1.1.1



Fonte: MAOR (2002)

Aplicando a Lei dos Senos no triângulo $\triangle OCB$, resulta $\dfrac{CB}{sen\,(180^{\circ} - 2\,\theta)} = \dfrac{OB}{sen\,\theta}$. Como

$OB = 1$, $sen\,(180^o - 2\,\theta) = CB\,sen\,\theta$. Por outra parte, $sen\,(180^o - 2\,\theta) = sen\,2\theta$, logo

$$sen\,2\theta = CB\,sen\,\theta \tag{1.11}$$

Agora construímos a perpendicular-bissetriz OD de O a CB. No triângulo retângulo $\triangle ODC$ tem-se $cos\,\theta = \dfrac{CD}{CO} = \dfrac{\frac{CB}{2}}{CO} = \dfrac{CB}{2}$, já que $CO = 1$. Daí,

$$CB = 2\,cos\,\theta \tag{1.12}$$

Substituindo este resultado (1.12) em (1.11) obtemos a fórmula do ângulo duplo:

$$sen\,2\theta = 2\,sen\,\theta\,cos\,\theta. \tag{1.13}$$

Para obter a fórmula do cosseno do ângulo duplo, ainda na figura 1.8, marquemos o ponto E, pé da perpendicular baixada de B até o semieixo positivo $\overrightarrow{OX}$. Segue então do triângulo $\triangle OEB$ que

$$cos\,2\theta = \frac{OE}{OB} = \frac{OE}{1} = OE \tag{1.14}$$

Podemos escrever $OE = CE - CO$. Como $CO = 1$, pois CO é raio do círculo unitário, $OE = CE - 1$. Falta agora calcular CE. Para isso trabalharemos com o triângulo $\triangle CBE$. Deste triângulo tiramos que:

$$cos\,\theta = \frac{CE}{CB} \quad \Longrightarrow \quad CE = CB\,cos\,\theta \tag{1.15}$$

Mas, já vimos anteriormente de (1.12) que $CB = 2\,cos\,\theta$. Então, (1.15) fica:

$$CE = 2\,cos\,\theta\,cos\,\theta = 2cos^2\theta \tag{1.16}$$

Finamente, voltando pra equação (1.14), chegamos ao resultado:

$$cos\,2\theta = OE = CE - CO = CE - 1 = 2\,cos^2\,\theta - 1 \tag{1.17}$$

Que é a fórmula para o cosseno do ângulo duplo.

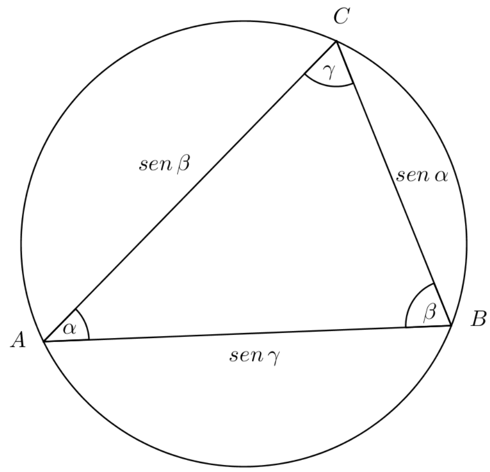
As fórmulas do ângulo metade podem ser obtidas facilmente mediante a substituição de $2\,\theta$ por ϕ em (1.17), escrevendo-as diretamente.

Na próxima seção apresentaremos uma idéia mais geral a respeito do teorema da Lei dos Senos e mostraremos que este pode ser visto como um teorema sobre círculos.

1.1.3 Interpretando a Lei dos Senos no círculo de diâmetro igual a unidade

Dado um triângulo qualquer $\triangle ABC$, sabemos da Geometria Euclidiana que pode ser inscrito num único círculo[4], conforme mostrado na figura 1.9. De fato, dado um triângulo qualquer, seus ângulos internos podem ser considerados como ângulos inscritos num círculo e os seus lados como as cordas determinadas por esses ângulos.

Figura 1.9: A Lei dos Senos vista círculo de diâmetro unitário



Fonte: MAOR (2002)

Aplicando a Lei dos Senos no $\triangle ABC$: $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{b}{sen\,\beta} = \dfrac{c}{sen\,\gamma} = 2r =$ diâmetro do círculo. Se tormarmos $r = \dfrac{1}{2}$ (o diâmetro igual à unidade) resulta que $\dfrac{a}{sen\,\alpha} = \dfrac{b}{sen\,\beta} = \dfrac{c}{sen\,\gamma} = 1$. De onde, $a = sen\,\alpha$, $b = sen\,\beta$ e $c = sen\,\gamma$.

Sob esta perspectiva, a Lei dos Senos poderia ser considerada como um teorema sobre círculos: "Num círculo de diâmetro unitário, cada lado do triângulo inscrito é igual ao seno do ângulo oposto" (MAOR, 2002).

Este resultado permitiria, de fato, definir o seno de um ângulo como o cumprimento da corda que ele subtende no círculo de diâmetro unidade e, aparentemente, seria tão boa quanto a tradicional que define o seno como uma razão entre dois lados num triângulo retângulo. Historicamente, esta interpretação do seno foi utilizada por Ptolomeu na sua tabela de cordas.

A seguir, apresentaremos um outro teorema da Geometria, que assim como o teorema do ângulo inscrito, também guarda muitas informações trigonométricas, as quais discutiremos a partir de agora.

[4]Veja Teorema 3.0.2 no Anexo A.

1.2 O Teorema de Ptolomeu

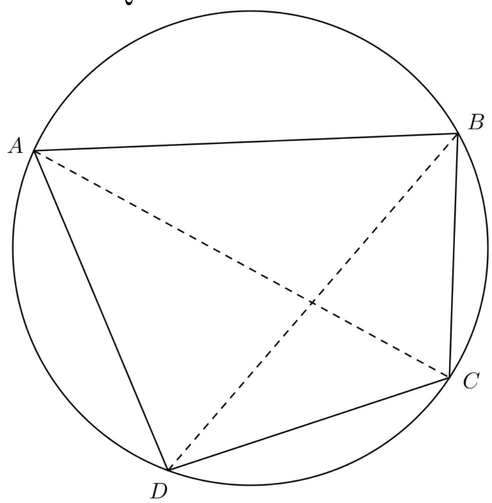
Este teorema, devido a Cláudio Ptolomeu, um matemático e astrônomo grego do século II d.C., é menos conhecido na Geometria do que o teorema relativo à relação entre as medidas do ângulo inscrito e o ângulo central. Nesta seção nos propomos a explorar alguns resultados trigonométricos que dele se podem deduzir, também com elegância e simplicidade. É um teorema sobre quadriláteros inscritíveis, que a seguir enunciamos.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Ptolomeu)**.** *Se ABCD é um quadrlátero inscritível de diagonais AC e BD (*figura 1.10*), então*

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD \tag{1.18}$$

Isto é, o teorema nos diz que num quadrilátero qualquer inscrito num círculo, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

Figura 1.10: Quadrilátero inscrito num círculo



Fonte: Autor

No apêndice B apresentamos uma demonstração para o teorema.

Note que se o quadrilátero ABCD mencionado no teorema fosse um retângulo, então, a equação (1.18) ficaria assim

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \tag{1.19}$$

que é nosso conhecido Teorema de Pitágoras[5]. Continuando a explorar a relação Ge-

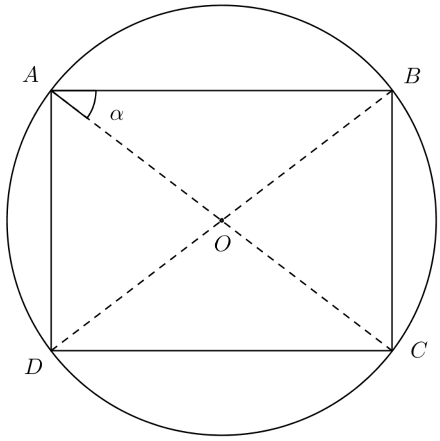
[5]Desde o século 5 a. C. até o século 20 d. C. inúmeras demonstrações do teorema de Pitágoras apareceram. Em 1940, o matemático americano E. S. Loomis publicou 370 demonstrações, mas ainda há mais (LIMA, 2005, p. 65).

ometria – Trigonometria, mostraremos a seguir a dedução da Relação Trigonométrica Fundamental a partir do Teorema de Ptolomeu.

1.2.1 Relação Fundamental da Trigonometria

Consideremos o retângulo ABCD inscrito no círculo de diâmetro unitário da figura 1.11.

Figura 1.11: Retângulo inscrito no círculo de diâmetro unitário.



Fonte: MAOR (2002)

Temos que as diagonais do retângulo coincidem com o diâmetro do círculo.

Demonstração. De fato, pois os ângulos internos do retângulo são ângulos incritos no círculo e como no retângulo os ângulos internos são retos (90 graus) segue da observação 1.1.3. que as diagonais AC e BD são diâmetros do círculo.

□

Referindo-nos à figura 1.11, se fizermos $\angle BAC = \alpha$, temos que

$$\frac{AB}{AC} = cos\alpha$$

Como $AC = 1$, segue que $AB = cos\alpha$. Analogamente, obtem-se que $BC = sen\alpha$. Dessa maneira, a equação (1.19) se transforma em

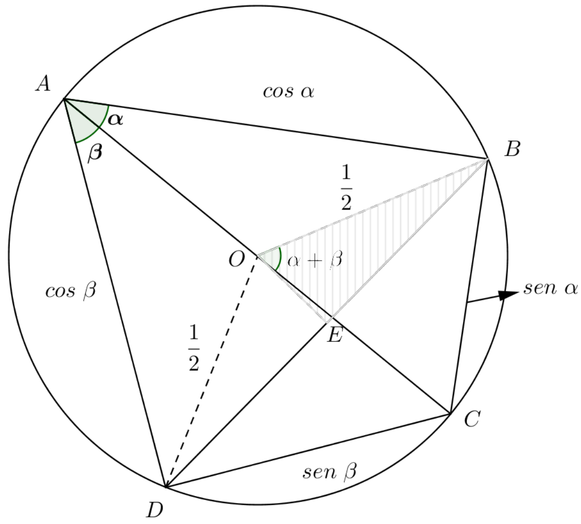
$$cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1 \tag{1.20}$$

A equação obtida em (1.20) é a conhecida relação fundamental da trigogonometria e aqui poderia ser interpretada como um equivalente trigonométrico do Teorema de Pitágoras. E prosseguindo no nosso estudo vamos ver o que mais o Teorema de Ptolomeu tem pra nos revelar de informações trigonométricas.

1.2.2 Uma Interpretação Trigonométrica do Teorema de Ptolomeu: seno da soma e da diferença de dois ângulos

Seja ABCD um quadrilátero inscritível tal que uma de suas diagonais coincida com o diâmetro do círculo de diâmetro unitário que o circunscreve. Suponhamos que AC seja a diagonal coincidente com o diâmetro. Denotemos por α e β os ângulos $\angle BAC$ e $\angle CAD$, respectivamente (cf. figura 1.12).

Figura 1.12: Seno da soma de dois ângulos



Fonte: MAOR (2002)

Observe que os ângulos $\angle ABC$ e $\angle ADC$ são retos, visto que subtendem o diâmetro AC. É imediato dos triângulos $\triangle_{ABD}$ e $\triangle_{ACD}$ que

(i) $BC = sen\ \alpha$

(ii) $AB = cos\ \alpha$

(iii) $CD = sen\ \beta$

(iv) $AD = cos\ \beta$

Vamos mostrar que $BC = sen\ (\alpha + \beta)$.

Demonstração. Note que o triângulo $\triangle_{BOD}$ é isosceles de base BD. Seja E o pé da perpendicular bissetriz baixada de O sobre BD. Obtemos o triângulo $\triangle_{OBE}$ que é retângulo de hipotenusa $OB = \dfrac{1}{2}$ como aparece destacado na figura 1.12. Daí tem-se que $sen\ (\alpha+\beta) = \dfrac{EB}{\frac{1}{2}}$. Mas $EB = \dfrac{BD}{2}$, logo resulta que $sen\ (\alpha + \beta) = BD$. $\square$

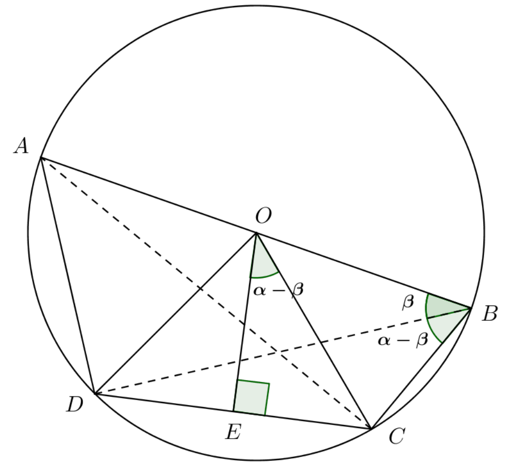
Das identidades (i),...,(v) e do Teorema Ptolomeu no quadrilátero $ABCD$, segue o resultado

$$sen\,(\alpha+\beta) = cos\;\alpha\;sen\;\beta + sen\;\alpha\;cos\;\beta \tag{1.21}$$

Que é a fórmula da adição de arcos para a função seno.

Veremos agora o caso em que um dos lados do quadrilátero ABCD coincide com um diâmetro. Veja a figura

Figura 1.13: Seno da diferença de dois ângulos



Fonte: MAOR (2002)

Veja que os ângulos $\angle ADB$ e $\angle ACB$ são retos, já que subtendem um diâmetro. Dos triângulos $\triangle_{ADB}$ e $\triangle_{ACB}$ tiramos as seguintes relações:

(i) $sen\;\beta = AD$

(ii) $cos\;\beta = BD$

(iii) $sen\;\alpha = AC$

(iv) $cos\;\alpha = BC$

Vamos mostrar que $sen\,(\alpha-\beta) = DC$.

Demonstração. Com referência à figura 1.13, construimos o triângulo $\triangle_{DOC}$ que é isósceles de base DC. Depois, baixamos a perpendicular bissetriz de O sobre DC. Note que $\angle DBC = \alpha-\beta = \dfrac{\angle DOC}{2}$, pois é ângulo inscrito que subtende o ângulo central $\angle DOC$. Como OE é bissetriz de $\angle DOC$, temos que $\angle EOC = \alpha-\beta$. Segue do triângulo $\triangle_{EOC}$ que

$$sen\,(\alpha-\beta) = \frac{EC}{OC} = \frac{\frac{DC}{2}}{\frac{1}{2}} = DC$$

□

Utilizando agora os resultados de (i),...,(v) e o teorema de Ptolomeu, obtemos

$$sen\,(\alpha-\beta) \;=\; sen\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\beta\,cos\,\alpha \qquad (1.22)$$

Que é a fórmula do seno da diferença de dois ângulos.

O resultado que apresentamos na seção seguinte é uma generalização do teorema de Pitágoras para triângulos retângulos e é conhecido como lei dos cossenos.

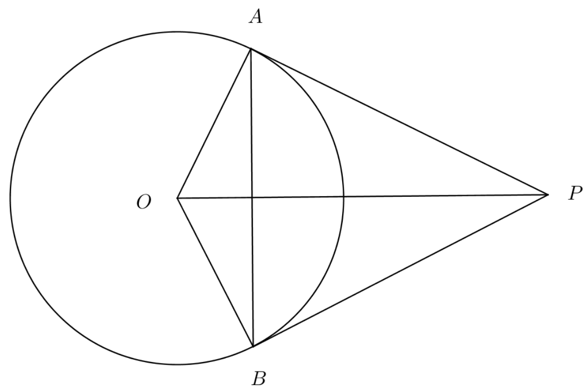
1.3 A Lei dos cossenos obtida a partir do círculo

Nesta seção deduziremos a lei dos cossenos de um modo diferente do que costumamos encontrar na maioria dos livros que trata do assunto. O principal instrumento que usaremos para obter o resultado pretendido é o **círculo inscrito** num triângulo além de outros resultados básicos já vistos anteriormente ou que citaremos no decorrer da demonstração. Vamos, por exemplo, usar o resultado da proposição seguinte que pode ser facilmente verificada.

Proposição 1.3.1. *Seja Γ uma círculo de centro O e P um ponto exterior ao mesmo. Se $A, B \in \Gamma$ são tais que as retas que contêm PA e PB são tangentes a Γ (*Figura 1.14*), então*

$$PA = PB$$

Figura 1.14: Tangentes por um ponto exterior ao círculo.



Fonte: BARBOSA (2006)

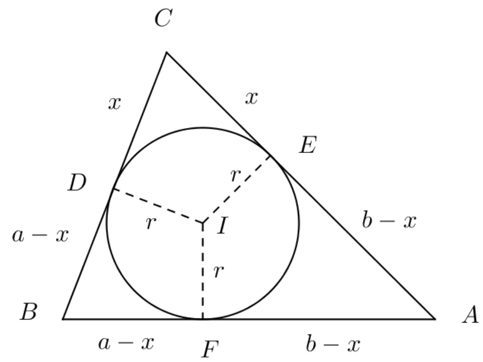
Vejamos então o que diz a lei dos cossenos.

Teorema 1.3.1. *Se ABC é um triângulo qualquer de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, então*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ \angle ACB \tag{1.23}$$

Demonstração. Seja ABC um triângulo qualquer cujos lados são tangentes ao círculo inscrito nos pontos D, E e F conforme mostra a figura 1.15. Considere $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$ e r o raio da circunferência inscrita com incentro I.

Figura 1.15: Círculo inscrito num triângulo



Fonte: HOEHN (2013)

Pela proposição 1.3.1. temos que se fizermos $CD = x$, então teremos $CE = x$, $BD = BF = a - x$ e $AE = AF = b - x$ como está indicado na figura 1.15. Daí, $c = (a - x) + (b - x)$ de modo que

$$x = \frac{1}{2}(a + b - c) \tag{1.24}$$

Do triângulo $\triangle_{CEI}$ destacado na figura 1.16 temos

$$x = r.cotg(\frac{\angle ACB}{2}) \tag{1.25}$$

Substituindo (1.25) em (1.24) e isolando r, obtemos

$$\begin{aligned} r.cotg(\frac{\angle ACB}{2}) &= \frac{1}{2}(a + b - c) \\ r &= \frac{a + b - c}{cotg(\frac{\angle ACB}{2})} \end{aligned} \tag{1.26}$$

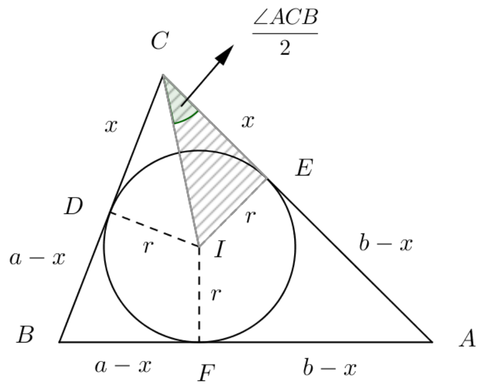
Sabe-se que a área de um triângulo pode ser calculada em função do raio da circunferência inscrita da seguinte forma[6]

$$[\triangle_{ABC}] = p.r, \quad em \;\; que \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Assim a área será

$$[\triangle_{ABC}] = \frac{1}{2}.r.(a+b+c) \tag{1.27}$$

Figura 1.16:



Fonte: HOEHN (2013)

Por outro lado, também podemos calcular a área de um triângulo em função de dois dos seus lados e do ângulo compreendido por eles da seguinte maneira [7]

$$[\triangle_{ABC}] = \frac{b.c.sen\ \angle BAC}{2} = \frac{a.c.sen\ \angle ABC}{2} = \frac{a.b.sen\ \angle ACB}{2} \tag{1.28}$$

Dessa forma, a área do triângulo fica

$$[\triangle_{ABC}] = \frac{1}{2}.a.b.sen\ \angle ACB \tag{1.29}$$

Novamente fazendo a comparação de (1.27) e (1.29), obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}.a.b.sen\ \angle ACB &= \frac{1}{2}.r.(a+b+c) \\ r &= \frac{a.b.sen\ \angle ACB}{a+b+c} \end{aligned} \tag{1.30}$$

[6] Na figura 1.18, somando as áreas dos triângulos $\triangle_{AIB}, \triangle_{BIC}$ e $\triangle_{AIC}$ obtemos a área do triâgulo $\triangle_{ABC}$. Para calcular a área de cada triângulo basta tomar como base os lados e como altura o raio do círculo, dessa forma a área do triângulo $\triangle_{ABC}$ fica: $[\triangle_{ABC}] = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2} = \frac{a+b+c}{2}.r = p.r$.

[7] A demonstração dessa fórmula será apresentada no capítulo 2.

Comparando agora (1.26) e (1.30), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{a+b-c}{2\ cotg\left(\dfrac{\angle ACB}{2}\right)} &= \frac{a.b.sen\ \angle ACB}{a+b+c} \\
(a+b-c)(a+b+c) &= (ab.sen\ \angle ACB)\left(2\ cotg\ \frac{\angle ACB}{2}\right) \\
(a+b)^2-c^2 &= 2ab\ sen\ \angle ACB\ cotg\ \frac{\angle ACB}{2} \qquad (1.31)\\
&= 2ab\left(2sen\ \frac{\angle ACB}{2}cos\ \frac{\angle ACB}{2}\right).\frac{cos\ \dfrac{\angle ACB}{2}}{sen\ \dfrac{\angle ACB}{2}} \qquad (1.32)\\
&= 4ab\ cos^2\ \frac{\angle ACB}{2}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
c^2 &= (a+b)^2-4ab\ cos^2\ \frac{\angle ACB}{2} \\
&= a^2+b^2-2ab\left(2cos^2\ \frac{\angle ACB}{2}-1\right) \qquad (1.33)\\
&= a^2+b^2-2ab\ cos\ \angle ACB \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

□

Note que na passagem de (1.31) para (1.32) usamos o resultado do seno do ângulo duplo visto em (1.13) e na passagem de (1.33) para 1.34 usamos o resultado do cosseno do ângulo duplo visto em (1.17).

Com o resultado obtido nessa seção encerramos este primeiro capítulo.

Capítulo 2

OBTENDO RESULTADOS DA GEOMETRIA A PARTIR DA TRIGONOMETRIA

Neste capítulo, como está bem indicado no título, o nosso intuito é usar a trigonometria para resolvermos problemas de geometria, ou seja, apresentaremos determinado problema da geometria e utilizando-se de ferramentas da trigonometria buscaremos uma solução [1]. O primeiro resultado que iremos apresentar é a fórmula trigonométrica da área de um triângulo.

2.1 Fórmula trigonométrica da área de um triângulo

A área de um triângulo pode ser calculada de várias formas dependendo dos elementos que se conhece desse triângulo. Se conhecemos, por exemplo, um dos lados e a altura relativa a esse lado, então a área é dada por:

$$[\triangle] = \frac{base \times altura}{2}.$$

Não é nosso objetivo, no entanto, discutir todas essas fórmulas, mas apenas a vista em 1.23, pois como dissemos antes, neste capítulo iríamos fazer a demonstração dessa fórmula.

Teorema 2.1.1. *Sejam a,b e c as medidas dos lados BC, CA e AB do triângulo $\triangle ABC$, respectivamente. A área do triângulo $\triangle ABC$ pode ser calculada por*

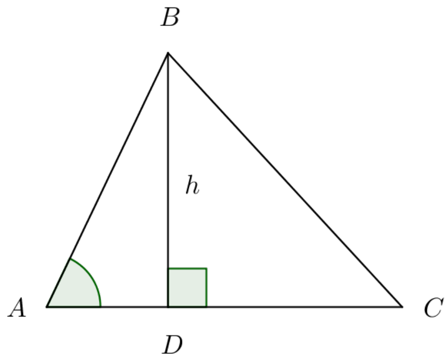
$$[\triangle ABC] = \frac{b.c.sen\ \angle BAC}{2} = \frac{a.c.sen\ \angle ABC}{2} = \frac{a.b.sen\ \angle ACB}{2}$$

[1] Em Matemática a resolução de problemas da geometria com auxílio da trigonometria é conhecido como método trigonométrico.

O teorema nos diz que a área de um triângulo fica determinada quando se conhece dois dos seus lados e o ângulo compreendido entre eles. Vamos a prova.

Demonstração. Considere o triângulo $\triangle ABC$ mostrado na figura 2.1.

Figura 2.1: Demonstração da fórmula trigonométrica da área de um triângulo.



Fonte: Autor

Com as notações presentes na figura 2.1 temos:

$$[\triangle ABC] = \frac{AC.BD}{2} = \frac{b.h}{2}$$

Por outro lado, no triângulo $\triangle ABD$, temos que $sen\angle BAC = \dfrac{h}{c} \Leftrightarrow h = c.sen\angle BAC$, então

$$[\triangle ABC] = \frac{b.c.sen\angle BAC}{2}$$

□

Procedendo de forma semenhante obtemos as outras igualdades.

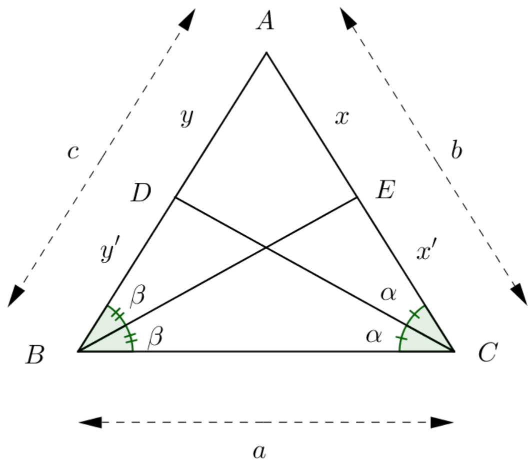
Na seção seguinte veremos uma demonstração do teorema de Steiner-Lehmus usando trigonometria.

2.2 Uma Prova Trigonométrica do Teorema de Steiner-Lehmus

O Teorema de Steiner-Lehmus diz que

Teorema 2.2.1 (Steiner-Lehmus). *Seja $\triangle ABC$ um triângulo qualquer e BE e CD bissetrizes internas desse triângulo. Se BE=CD, então $\triangle ABC$ é isósceles.*

Figura 2.2: Teorema de Steiner-Lehmus



Fonte: HAJJA (2008)

Este teorema foi formulado pelo matemático alemão Daniel Christian Ludolph Lehmus e posteriormente demonstrado por Jakob Steiner, matemático suíço. Segundo HAJJA, "a declaração desafiadora desse teorema tem atraído muita atenção desde 1840, quando o professor Lehmus de Berlin escreveu a Sturm pedindo uma prova puramente geométrica"(HAJJA, 2008) . Hajja diz ainda que, "desde então um grande número de pessoas, incluindo vários matemáticos de renome, teve interesse no problema, resultando em cerca de 80 diferentes provas"(HAJJA, 2008).

Dentre a variedade de provas existentes do teorema optamos por apresentar uma que utiliza recursos da trigonometria, tendo em vista que esse é objetivo deste capítulo. Vamos então à demonstração do teorema.

Demonstração. Sejam BE e CD as bissetrizes dos ângulos internos $\angle ABC$ e $\angle ACB$, respectivamente, do triângulo $\triangle ABC$ cujos lados medem $a = BC$, $b = AC$ e $c = AB$ como mostra a figura 2.2. Podemos, ainda, definir conforme as notações da mesma figura

$$\angle ABC = 2\beta,\ \angle ACB = 2\alpha,\ x = AE,\ x' = EC,\ y = AD,\ y' = DB.$$

Suponhamos $\angle ACB \neq \angle ABC$ e, sem perda de generalidade, podemos supor ainda $\angle ACB > \angle ABC$ (e, portanto, $c > b$) . Fazendo a diferença entre as razões $\dfrac{AC}{AE}$ e $\dfrac{AB}{AD}$, obtemos:

$$\frac{b}{x} - \frac{c}{y} = \frac{x + x'}{x} - \frac{y + y'}{y} = \frac{x'}{x} - \frac{y'}{y} \tag{2.1}$$

Agora, pelo teorema 3.0.4 (bissetriz interna[2]), fazendo referência a figura 2.2, temos da bissetriz BE que

$$\frac{x}{c} = \frac{x'}{a} \implies ax = cx' \implies \frac{a}{c} = \frac{x'}{x} \tag{2.2}$$

e da bissetriz CD

$$\frac{y}{b} = \frac{y'}{a} \implies ay = cy' \implies \frac{a}{b} = \frac{y'}{y} \tag{2.3}$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1) chegamos ao resultado

$$\frac{b}{x} - \frac{c}{y} = \frac{x+x'}{x} - \frac{y+y'}{y} = \frac{x'}{x} - \frac{y'}{y} = \frac{a}{c} - \frac{a}{b} < 0 \tag{2.4}$$

Fazendo agora o quociente entre as razões $\dfrac{AC}{AE}$ e $\dfrac{AB}{AD}$ tem-se que

$$\frac{b}{x} \div \frac{c}{y} = \frac{b}{c} \cdot \frac{y}{x} \tag{2.5}$$

Aplicando o Teorema 1.1.2 (lei dos senos) no triângulo $\triangle ABC$ da figura 2.2

$$\begin{aligned} \frac{b}{sen\,\angle ABC} &= \frac{c}{sen\,\angle ACB} \\ b.sen\,\angle ACB &= c.sen\,\angle ABC \\ \frac{b}{c} &= \frac{sen\,\angle ABC}{sen\,\angle ACB} \end{aligned} \tag{2.6}$$

O resultado obtido em (2.6) substituimos em (2.5), e em seguida usamos a identidade (1.13), resultando

$$\begin{aligned} \frac{b}{x} \div \frac{c}{y} &= \frac{sen\,\angle ABC}{sen\,\angle ACB} \cdot \frac{y}{x} \\ &= \frac{sen\,2\beta}{sen\,2\alpha} \cdot \frac{y}{x} \\ &= \frac{2\cos\beta\,sen\,\beta}{2\cos\alpha\,sen\,\alpha} \cdot \frac{y}{x} \\ &= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{sen\,\beta}{x} \cdot \frac{y}{sen\,\alpha} \\ &= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \cdot \frac{sen\angle BAC}{BE} \cdot \frac{CD}{sen\angle BAC} \\ &= \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} > 1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Fazendo uma análise sobre os resultados obtidos em (2.4) e (2.7) chegamos às seguintes conclusões:

[2]Ver Anexo A.

(a) O resultado obtido em (2.4) nos diz que

$$\frac{b}{x} - \frac{c}{y} < 0 \implies \frac{b}{x} < \frac{c}{y}.$$

(b) Por outro lado, o resultado obtido em em (2.7) nos diz que

$$\frac{b}{x} \div \frac{c}{y} > 1 \implies \frac{b}{x} > \frac{c}{y}.$$

O que é uma contradição. E o teorema fica provado. □

2.3 Uma Prova Trigonométrica do Teorema de Napoleão

O objetivo desta seção é apresentar uma demonstração do conhecido Teorema de Napoleão [3] usando técnicas da trigonometria [4].

Para simplificar o enunciado do Teorema de Napoleão daremos a seguinte:

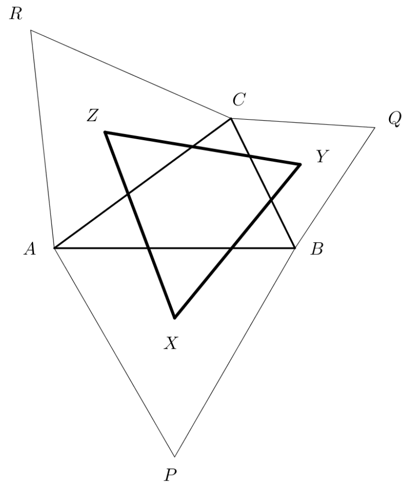
Definição 2.3.1. (a) *Dado um triângulo $\triangle ABC$ qualquer, tomando como base cada um dos seus lados constrói-se um triângulo equilátero, conforme mostrado na figura 2.3. Nesta figura os triângulos construídos são $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle ACR$. Sejam X, Y e Z os centros, respectivamente, dos triângulos $\triangle ABP$, $\triangle BCQ$ e $\triangle ACR$. Chama-se Triângulo Externo de Napoleão associado ao triângulo $\triangle ABC$, ao triângulo cujos vértices são os pontos X, Y e Z.* (b) *Os triângulos equiláteros podem ser construídos tomando seu terceiro vértice no semiplano oposto ao tomado em* (a)*, como aparece na figura 2.4. Seus centros X, Y e Z determinam o denominado Triângulo Interno de Napoleão.*

Observação 2.3.1. *Em Geometria se prova que em todo triângulo equilátero coincidem o incentro, o circuncentro, o ortocentro e o baricentro (centroide). Na definição acima, já que se trata de um triângulo equilátero, utilizamos simplesmente a palavra centro.*

[3] Napoleão Bonaparte, líder político e militar durante os últimos estágios da Revolução Francesa. Lopes (2002), faz uma breve discussão a respeito da autoria desse teorema.

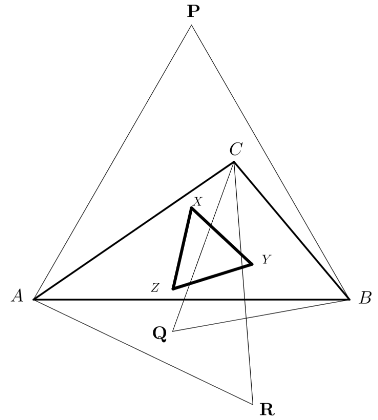
[4] A demonstração desse teorema também pode ser feita utilizando-se a geometria analítica, a geometria sintética, números complexos, transformações no plano, entre outras [Ver (REIS, 2007)].

Figura 2.3: O triângulo externo de Napoleão.



Fonte: REIS (2007)

Figura 2.4: O triângulo interno de Napoleão.

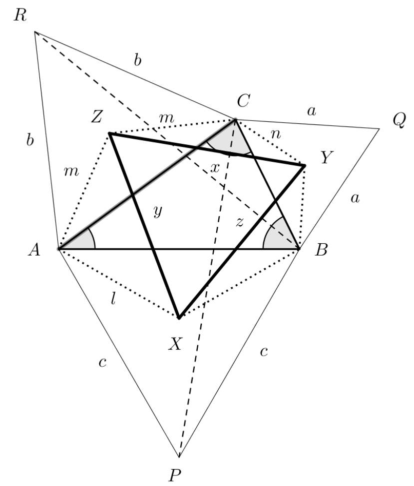


Fonte: REIS (2007)

Teorema 2.3.1. *Dado um triângulo qualquer, os triângulos externo e interno de Napoleão são equiláteros.*

Demonstração. Faremos a demonstração no caso do triângulo externo e adotaremos as notações utilizadas na figura 2.5.

Figura 2.5:



Fonte: REIS (2007)

Sejam l, m e n as medidas dos segmentos AX, AZ e CY, respectivamente, como está mostrado na figura 2.5. Sabe-se que em todo triângulo equilátero a bissetriz, a mediana, a mediatriz e a altura relativas a um mesmo vértice são coincidentes. Como os triângulos $\triangle ABP$ e $\triangle CAR$ são equiláteros e X e Z são seus centros, tem-se

$$\angle XAB = \angle CAZ = 30^{o}$$

Aplicando o teorema 1.3.1 (lei dos cossenos) no triângulo $\triangle AXZ$

$$y^2 = m^2 + l^2 - 2\,m\,l\,cos\,(\angle BAC + 60^{o}). \tag{2.8}$$

Procedendo de forma análoga no triângulo $\triangle CYZ$, obtemos

$$x^2 = m^2 + n^2 - 2\,m\,n\,cos\,(\angle ACB + 60^{o}) \tag{2.9}$$

Tem-se que num triângulo a distância do baricentro a um de seus vértices é igual a $\dfrac{2}{3}$ do comprimento da mediana relativa a este vértice, além disso, como lembrado, no triângulo equilátero o baricentro é também ortocentro (encontro das alturas). Logo, segue daí que:

- No triângulo $\triangle ABP$

$$l = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.c = \frac{c}{\sqrt{3}} \tag{2.10}$$

- E no triângulo $\triangle CAR$

$$m = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.b = \frac{b}{\sqrt{3}} \tag{2.11}$$

Temos da substituição de (2.10) e (2.11) em (2.8) que

$$3y^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\,(\angle BAC + 60^{o}) \tag{2.12}$$

Fazendo também a substituição de (2.10) e (2.11) em (2.9) tem-se que

$$3x^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,(\angle ACB + 60^{o}) \tag{2.13}$$

Vamos calcular agora o comprimento do lado BR nos triângulos $\triangle ABR$ e $\triangle BCR$. Para isso faremos uso do teorema 1.3.1 (lei dos cossenos).

- do triângulo $\triangle ABR$ temos

$$(BR)^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\,(\angle BAC + 60^{o}) \tag{2.14}$$

- e do triângulo $\triangle BCR$ temos

$$(BR)^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,(\angle ACB + 60^o) \tag{2.15}$$

Segue da comparação de (2.14) e (2.15) que

$$b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos\,(\angle BAC + 60^o) = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos\,(\angle ACB + 60^o) \tag{2.16}$$

Veja que o lado esquerdo da igualdade (2.16) é igual ao segundo membro da equação (2.12) e o lado direito de (2.16) é igual ao segundo membro da equação (2.13). Assim, concluimos que

$$3x^2 = 3y^2 \quad \Longrightarrow \quad x = y. \tag{2.17}$$

Trabalhando agora com os triângulos $\triangle AXZ$ e $\triangle BXY$ e procedendo de forma semelhante ao que foi feito nas linhas acima chegamos à igualdade.

$$y = z. \tag{2.18}$$

E, finalmente, de (2.17) e (2.18) chegamos ao resultado pretendido

$$x = y = z. \tag{2.19}$$

O que mostra que o triângulo $\triangle XYZ$ é equilátero, ficando provado o teorema de Napoleão para o caso do triângulo externo. $\square$

Capítulo 3

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS USANDO O MÉTODO GEOMÉTRICO E O MÉTODO TRIGONOMÉTRICO

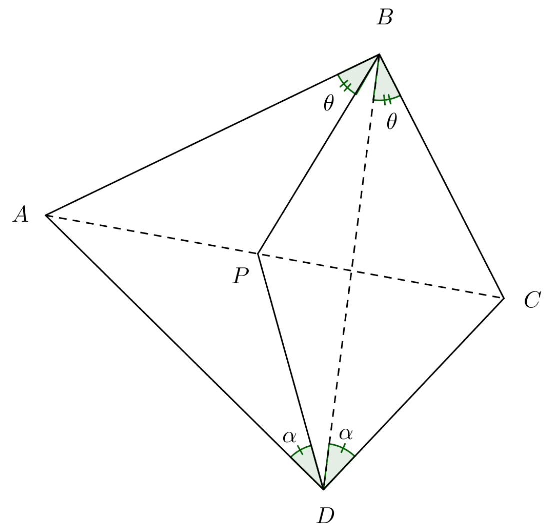
Neste capítulo apresentaremos alguns problemas de geometria cuja solução será dada de duas maneiras: uma por Geometria e a outra por Trigonometria. Visando, com isso, mostrar que essas duas áreas podem ser trabalhadas de forma conjunta e que no processo de resolução de alguns problemas de uma ou de outra área podemos recorrer às ferramentas disponibilizadas por ambas.

Os problemas 3.0.1 e 3.0.2 a seguir foram retirados do site **Sobregeometrias**[1] do post intitulado "Problemas de Geometría resueltos por Trigonometría"cujo endereço será disponibilizado nas referências. Já os problemas 3.0.3 e 3.04 foram retirados do livro Geometria da Coleção PROFMAT (pág. 82). O problema 3.0.5 foi retirado do Exame de Qualificação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT 2013.2. E para finalizar, apresentamos um problema geométrico de maximização que será resolvido com a ajuda da Trigonometria. Este problema pode ser encontrado em (ANDREESCU, 2006, p. 36).

[1]Sobregeometrias é um site onde são propostos problemas-desafios da geometria, que podem ser solucionados com elementos da geometria ou trigonometria.

PROBLEMA 3.0.1. *$ABCD$ é um quadrilátero inscrito e P é um ponto da diagonal AC tal que $\angle ABP = \angle CBD = \theta$ e $\angle CDB = \angle ADP = \alpha$, como mostra a figura 3.1. Calcule* $\dfrac{AP}{PC}$.

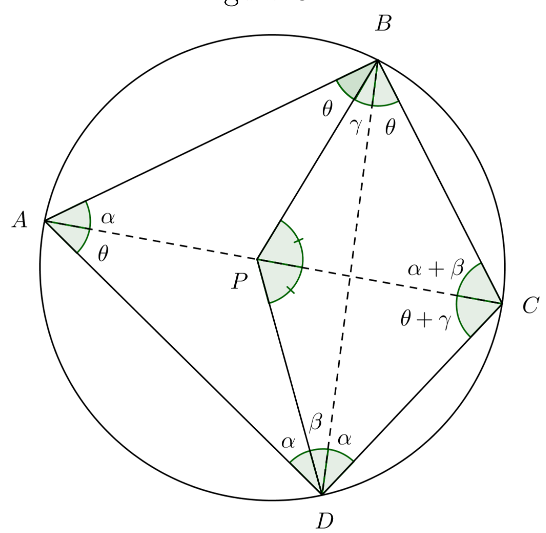
Figura 3.1:



Fonte: CEPREUNI (2012)

(i) **Resolução por Geometria:** Para auxiliar na resolução consideremos o quadrilátero ABCD inscrito num círculo, como mostra a figura 3.2.

Figura 3.2:



Fonte: CEPREUNI (2012)

Pelo corolário 1.1.1 temos que $\angle BAC = \angle BDC = \alpha$ e $\angle CAD = CBD = \theta$. Dessa forma, os triângulos $\triangle APD$ e $\triangle APB$ são semelhantes[2] pelo caso AA (ângulo-ângulo). Segue então que

$$\frac{AP}{PD} = \frac{PB}{AP} \implies AP^2 = PB\,.\,PD \tag{3.1}$$

Se $\angle APD = \angle APB = \delta$, então, $\angle CPD = \angle CPB = 180^{\circ} - \delta$. E novamente pelo corolário 1.1.1, $\angle ACD = \angle ABD = \theta + \gamma$ assim como $\angle ADB = ACB = \alpha + \beta$. Temos assim que os triângulos $\triangle PCD$ e $\triangle PBC$ são semelhantes (pois, $\angle CPD = \angle CPB$, $\angle PCD = \angle PBC$, $\angle PDC = \angle PCB$). Daí,

$$\frac{PC}{PD} = \frac{PB}{PC} \implies PC^2 = PB\,.\,PD \tag{3.2}$$

Dos resultados obtidos em (3.1) e (3.2), chegamos ao resultado pretendido

$$AP^2 = PC^2 \implies \frac{AP}{PC} = 1$$

(ii) Resolução por Trigonometria: Vamos primeiro aplicar o teorema 1.1.2 (lei dos senos) aos triângulos $\triangle APD$ e $\triangle PCD$.
No triângulo $\triangle APB$:

$$\frac{AP}{sen\,\alpha} = \frac{PD}{sen\,\theta} \quad \text{ou} \quad PD = \frac{AP\,.\,sen\,\theta}{sen\,\alpha} \tag{3.3}$$

No triângulo $\triangle PCD$:

$$\frac{PC}{sen\,(\alpha+\beta)} = \frac{PD}{sen\,(\theta+\gamma)} \quad \text{ou} \quad PD = \frac{PC\,.\,sen\,(\theta+\gamma)}{sen\,(\alpha+\beta)} \tag{3.4}$$

Igualando os resultados obtidos para PD em (3.3) e (3.4):

$$\begin{aligned} \frac{AP\,.\,sen\,\theta}{sen\,\alpha} &= \frac{PC\,.\,sen\,(\theta+\gamma)}{sen\,(\alpha+\beta)} \\ AP\,sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta) &= PC\,sen\,\alpha\,sen\,(\theta+\gamma) \\ \frac{AP}{PC} &= \frac{sen\,\alpha\,sen\,(\theta+\gamma)}{sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Aplicando, agora, a lei dos senos aos triângulos $\triangle APB$ e $\triangle PBC$, obtemos os resultados, respectivamente.

$$\frac{AP}{sen\,\theta} = \frac{PB}{sen\,\alpha} \implies PB = \frac{AP\,sen\,\alpha}{sen\,\theta} \tag{3.6}$$

[2]Dizemos que dois triângulos são semelhantes quando existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e outro triângulo, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (NETO, 2013).

e

$$\frac{PC}{sen\,(\gamma+\theta)}=\frac{PB}{sen\,(\alpha+\beta)} \quad\Longrightarrow\quad PB=\frac{PC\,sen\,(\alpha+\beta)}{sen\,(\gamma+\theta)} \tag{3.7}$$

Igualando os resultados encontrados para PB em (3.6) e (3.7):

$$\begin{aligned}
\frac{AP\,sen\,\alpha}{sen\,\theta} &= \frac{PC\,sen\,(\alpha+\beta)}{sen\,(\gamma+\theta)}\\
AP\,sen\,\alpha\,sen\,(\alpha+\theta) &= PC\,sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta)\\
\frac{AP}{PC} &= \frac{sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta)}{sen\,\alpha\,sen\,(\gamma+\theta)}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Mais uma vez comparando os resultados encontrados em (3.5) e (3.8), temos

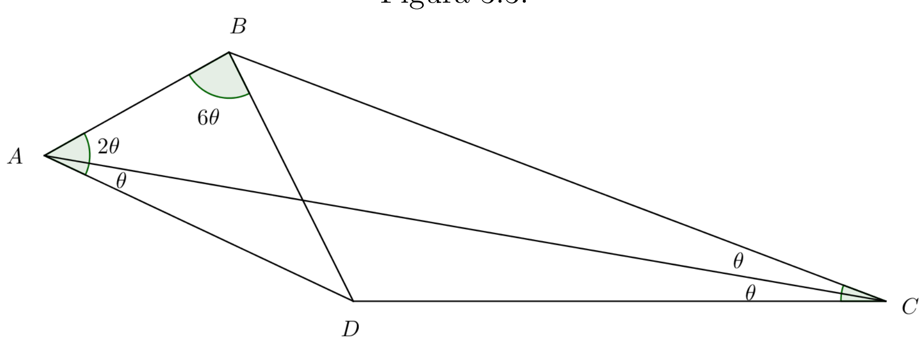
$$\begin{aligned}
\frac{sen\,\alpha\,sen\,(\theta+\gamma)}{sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta)} &= \frac{sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta)}{sen\,\alpha\,sen\,(\gamma+\theta)}\\
(sen\,\alpha\,sen\,(\theta+\gamma))^2 &= ((sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta))^2\\
sen\,\alpha\,sen\,(\theta+\gamma) &= (sen\,\theta\,sen\,(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

Voltando em (3.5) e (3.8) chegamos ao resultado pretendido:

$$\frac{AP}{AC}=1$$

PROBLEMA 3.0.2. *Calcule a medida do ângulo θ na figura abaixo.*

Figura 3.3:



Fonte: CEPREUNI (2012)

(i) Resolução por Geometria:

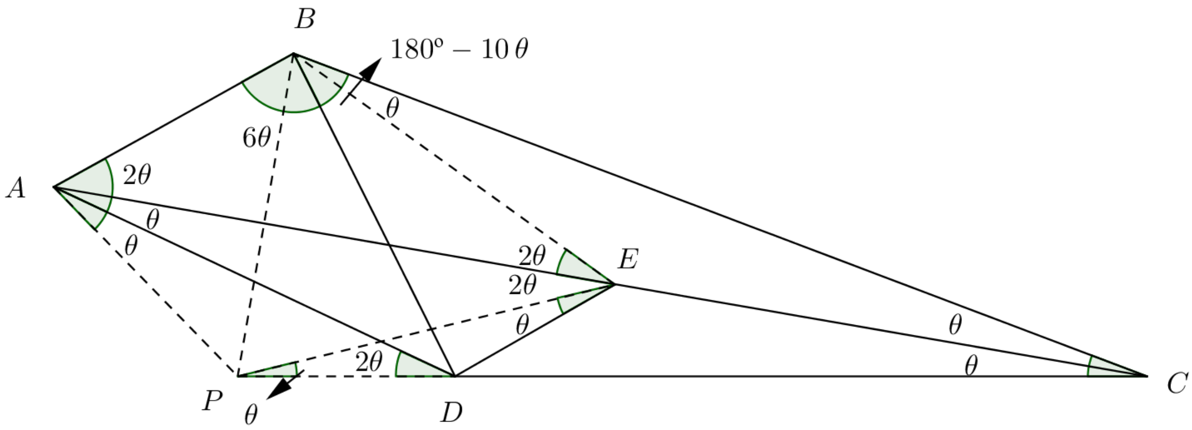
Para auxiliar na resolução vamos considerar a figura 3.4.

Seja P o simétrico de B em relação a AC. No triângulo $\triangle APC$ traçamos PE tal que $\triangle PEC$ seja isósceles. Em seguida ligamos BE.

Como P é simétrico de B em relação a AC, então AC é mediatriz de BP e todo ponto de AC equidista de B e P. Com isso, AC é também bissetriz de $\angle BAP$, resultando que $\angle DAP = \theta$. Os ângulos $\angle ADP$, $\angle AEP$ e $\angle AEB$ são externos aos triângulos $\triangle ADC$, $\triangle PEC$ e $\triangle BEC$, respectivamente, logo cada um deles tem medida 2θ. Note que o quadrilátero $AEDP$ é inscritível, pois $\angle DPE = \angle EAD = \theta$ e $\angle PDA = \angle AEP = 2\theta$. Logo devemos ter $\angle PAD = \angle DEP = \theta$. Como num triângulo a soma dos ângulos internos é 180º, então o que falta para completar o ângulo $\angle ABC$ do triângulo $\triangle ABC$ é $180^o - 10\,\theta$. Temos assim que o triângulo $\triangle BDE$ é isósceles com $BD = BE$. E, por sua vez, $\triangle ABD$ também é isósceles com $AB = BD$. Somando os ângulos internos de $\triangle ABD$, temos

$$3\,\theta + 6\,\theta + 3\,\theta = 180^o \quad \Longrightarrow \quad \theta = 15^o$$

Figura 3.4:



Fonte: CEPREUNI (2012)

(ii) Resolução por Trigonometria:

Aplicando a lei dos senos aos triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BDC$ (figura 3.4) temos,respectivamente:

$$\frac{BD}{sen\,3\theta} = \frac{AD}{sen\,6\theta} \quad \Longrightarrow \quad BD = \frac{AD\,sen\,3\theta}{sen\,6\theta} \tag{3.9}$$

e

$$\frac{BD}{sen\,2\theta} = \frac{DC}{sen\,(180^o - 9\,\theta)} \quad \Longrightarrow \quad BD = \frac{DC\,sen\,2\theta}{sen\,9\,\theta} \tag{3.10}$$

Da igualdade de (3.9) e (3.10) e sabendo que $AD = DC$ (pois o triângulo $\triangle ADC$ é isósceles) segue que

$$\frac{sen3\,\theta}{sen\,6\,\theta} = \frac{sen\,2\theta}{sen\,9\theta} \quad \Longrightarrow \quad sen\,9\theta = \frac{sen\,6\theta\,sen\,2\theta}{sen\,3\theta} \tag{3.11}$$

Fazendo uso da fórmula (1.13) (seno do arco duplo) reescrevemos $sen\,6\theta = sen\,2(3\theta) = 2sen\,3\theta\,cos\,3\theta$ e substituimos em (3.11), obtendo

$$sen\,9\theta = \frac{2sen\,3\theta\,cos\,3\theta\,sen\,2\theta}{sen\,3\theta} = 2\,sen\,2\theta\,cos\,3\theta \tag{3.12}$$

Escrevendo 2θ como $\dfrac{5\theta-\theta}{2}$ e 3θ como $\dfrac{5\theta+\theta}{2}$ e fazendo uso da fórmula de transformação de soma em produto [3], obtemos

$$\begin{aligned} sen\,9\theta &= 2\,sen\left(\frac{5\theta-\theta}{2}\right)cos\left(\frac{5\theta+\theta}{2}\right) \\ sen\,9\theta &= sen\,5\theta - sen\,\theta \\ (sen\,9\theta + sen\,\theta) - sen\,5\theta &= 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Outra vez usando a fórmula de transformação de soma em produto para a expressão de dentro do parênteses a equação (3.13) fica

$$\begin{aligned} 2\,sen\left(\frac{9\theta+\theta}{2}\right)cos\left(\frac{9\theta-\theta}{2}\right) - sen\,5\theta &= 0 \\ 2\,sen\,5\theta\,cos\,4\theta - sen\,5\theta &= 0 \\ sen\,5\theta\,(2\,cos\,4\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

Resultando em duas possibilidades

$$sen\,5\theta = 0 \implies 5\theta = 180^{\text{o}} \implies \theta = 36^{\text{o}} \text{ não satisfaz.} \tag{3.14}$$

ou

$$2\,cos\,4\theta = 1 \implies cos\,4\theta = \frac{1}{2} \implies 4\theta = 60 \implies \theta = 15^{\text{o}} \tag{3.15}$$

Observação 3.0.2. *Veja que se $\theta = 36^o$ o ângulo $\angle DBC$ do triângulo $\triangle BCD$ mediria -144^o o que não faz sentido. Pois, cada ângulo interno de um triângulo deve ser maior que zero, então, o ângulo $\angle DBC = 180^o - 9\theta > 0 \implies \theta < 20^o$.*

PROBLEMA 3.0.3. *Um triângulo $\triangle ABC$ é retângulo em A e tal que $BC = 2AB$. Calcule as medidas em graus de seus ângulos.*

(i) Resolução por Geometria:

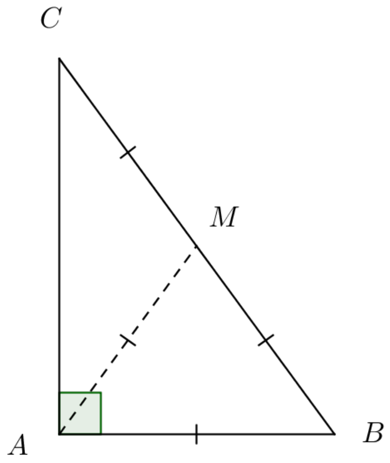
Traçando a mediana AM relativa a hipotenusa, obtemos o triângulo $\triangle ABM$. Como $BC = 2AB$ e $CM = MB = AM$[4] segue que $\triangle ABM$ é equilátero (figura 3.5). Como

[3] Veja teorema 3.0.6 do Anexo A.

[4] A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da mesma. (ver Teorema 3.0.5 do Anexo A.)

no triângulo equilátero os ângulos internos medem 60º temos então que $\angle ABC = 60^o$. Consequentemente, $\angle ACB = 30^o$, dado que $\angle BAC$ é reto.

Figura 3.5:



Fonte: Autor

(ii) Resolução por Trigonometria:

Aplicando a lei dos senos no triângulo $\triangle ABC$

$$\frac{AB}{sen\,\angle ACB} = \frac{2AB}{sen\,BAC} \implies sen\,\angle BAC = 2sen\,\angle ACB$$

Como $\triangle ABC$ é retângulo em $\angle BAC$, isto é, $\angle BAC = 90^o$ segue que

$$2\,sen\,\angle ACB = sen\,90^o = 1 \implies sen\,\angle ACB = \frac{1}{2}$$

De 3.16 concluimos que $\angle ACB = 30^o$ e, consequentemente, $\angle ABC = 60^o$.

PROBLEMA 3.0.4. *Seja ABCD um quadrado de diagonais AC e BD e E um ponto sobre o lado CD, tal que AE=AB+CE. Sendo F o ponto médio do lado CD, prove que* $\angle EAB = 2\,\angle FAD$.

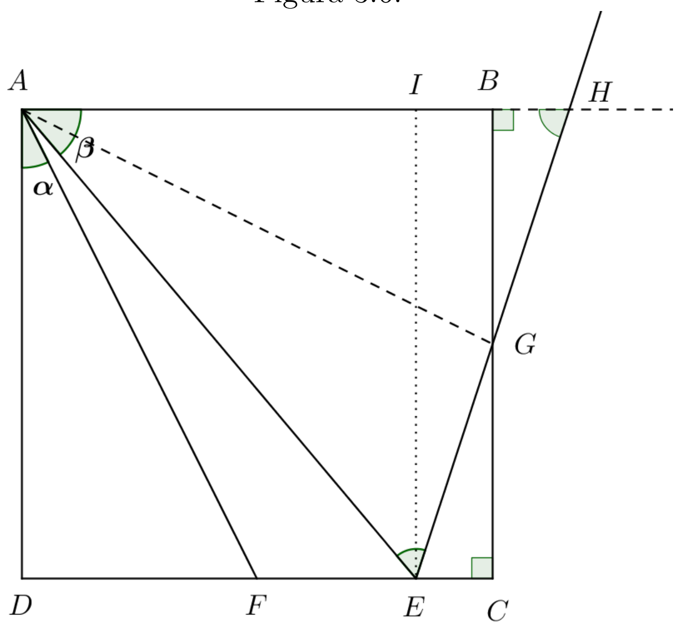
(i) Resolução por Geometria:

Marque G e H pontos médio do lado BC e interseção de AB com EG, respectivamente (figura 3.6).

Veja que os triângulos $\triangle CGE$ e $\triangle BGH$ são congruentes (por ALA). Conclui-se daí que $EG = BH$, logo, tem-se que o $\triangle AEH$ é isósceles de base EH (pois, $AE = AH$) sendo que $\angle AEH = \angle AHE$.

Veja também que os triângulos $\triangle AGB$ e $\triangle ADF$ são congruentes. Pois, $BG = DF$, $AD = AB$ e $AF = AG$ (observe que F e G são os pontos médios de CD e BC, respectivamente). Dessa congruência tiramos que $\angle DAF = \angle BAG \quad (\star)$. Mas, AG é

Figura 3.6:



Fonte: Autor

mediana de $\triangle AEH$ que é isósceles, logo, também é bissetriz. Daí, $\angle BAG = \dfrac{1}{2}\angle EAH = \dfrac{1}{2}\angle EAB$ $(\star\star)$.

Substituindo $(\star\,\star)$ em $(\star)$, obtemos: $\angle DAF = \dfrac{1}{2}\angle EAB \implies \angle EAB = 2\angle DAF$.

(ii) Resolução por Trigonometria:

Por E traçamos o segmento EI paralelo a BC, obemos assim o triângulo $\triangle IAE$ retângulo em I. Escrevendo os lados desse triângulo em termos do lado AB e de EC fica: $EI = AB$, $AI = AB - EC$ e $AE = AB + EC$. Aplicando Pitágoras, obtemos

$$\begin{aligned}(AB+EC)^2 &= (AB-EC)^2 + AB^2\\ AB^2 + 2\,AB\,EC + EC^2 &= AB^2 - 2\,AB\,EC + EC^2 + AB^2\\ 4\,AB\,EC &= AB^2\\ EC &= \frac{AB}{4}\end{aligned}$$

Assim, os lados do $\triangle IAE$ podem ser escritos como: $EI = AB$, $AI = \dfrac{3}{4}AB$ e $AE = \dfrac{5}{4}AB$. Vamos aplicar agora a lei dos cossenos (teorema 1.3.1) no triângulo $\triangle IAE$. Para simplificar notação façamos $\angle EAI = \angle EAB = \beta$.

$$\begin{aligned}
AB^2 &= \frac{9\,AB^2}{16} + \frac{25\,AB^2}{16} - 2\,\frac{3\,AB}{4}\,\frac{5\,AB}{4}\,cos\,\beta \\
30\,AB^2\,cos\,\beta &= 34\,AB^2 - 16\,AB^2 \\
30\,cos\,\beta &= 18 \\
cos\,\beta &= \frac{3}{5} \quad \text{e consequentemente} \quad sen\,\beta = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

No triângulo $\triangle DAF$ se $\angle FAD = \alpha$, então, pela lei dos cossenos teremos

$$\begin{aligned}
\frac{AB^2}{4} &= AB^2 + \frac{5\,AB^2}{4} - 2\,AB\,\frac{\sqrt{5}\,AB}{2}\,cos\,\alpha \\
cos\,\alpha &= \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \text{e consequentemente} \quad sen\,\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}.
\end{aligned}$$

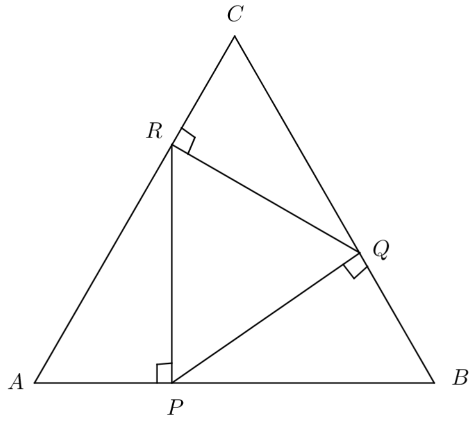
Mas, pela fórmula (1.13) (seno do arco duplo) temos que

$$\begin{aligned}
sen\,2\alpha &= 2\,sen\,\alpha\,cos\,\alpha \\
&= 2\,\frac{\sqrt{5}}{5}\,\frac{2\sqrt{5}}{5} \\
&= \frac{4}{5} \\
&= sen\,\beta.
\end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < 90^o$ e $0 < \beta < 90^o$ concluímos que $\beta = 2\,\alpha$, ou seja, $\angle EAB = 2\angle FAD$.

PROBLEMA 3.0.5. *Na figura 3.7, temos um triângulo equilátero $\triangle ABC$ e um segundo triângulo $\triangle PQR$ cujos lados RP, PQ, QR são, respectivamente, perpendiculares ao lados AB, BC, AC do triângulo $\triangle ABC$.*

Figura 3.7:



Fonte: Exame de Qualificação 2013.2 - PROFMAT

Mostre que o triângulo $\triangle PQR$ é equilátero. Conclua que $AP = BQ = CR$.

(i) Resolução por Geometria:

Parte (a) Como $\triangle ABC$ é equilátero, então, $\angle ABC = \angle ACB = \angle BAC = 60^o$. Os triângulos $\triangle PAR$, $\triangle QPB$, e $\triangle RQC$ possuem um ângulo reto e um ângulo de 60^o, logo o terceiro ângulo, necessariamente, mede 30^o. Agora, no triângulo $\triangle PQR$ cada ângulo interno é igual a $180^o - 90^o - 30^o = 60^o$. Portanto, $\triangle PQR$ é equilátero.

Parte (b) No triângulo $\triangle QPB$ tracemos a mediana QT relativa ao lado PB (figura 3.8). Como no triângulo retângulo a mediana relativa a hipotenusa é metade desta, então, $QT = TB$. Assim o ângulo $\angle BQT$ do triângulo $\triangle BQT$ é igual a 60^o, logo, $\angle QTB$ também é 60^o e o triângulo $\triangle BQT$ é equilátero. Daí, resulta que $PB = 2\,BQ$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao $\triangle QPB$ teremos

$$\begin{aligned} PQ^2 + BQ^2 &= PB^2 \\ PQ^2 &= PB^2 - BQ^2 \\ PQ^2 &= (2\,BQ)^2 - BQ^2 \\ PQ^2 &= 4\,BQ^2 - BQ^2 \\ PQ &= \sqrt{3}\,BQ \end{aligned} \tag{3.16}$$

Procedendo da mesma maneira com os triângulos $\triangle PAR$ e $\triangle RQC$, obtemos

$$PR = \sqrt{3}\,AP \quad \text{e} \quad QR = \sqrt{3}\,CR \tag{3.17}$$

De (3.16) e (3.17) e sabendo que $\triangle PQR$ é equilátero temos

$$\sqrt{3}\,BQ = \sqrt{3}\,AP = \sqrt{3}\,CR \implies BQ = AP = CR$$

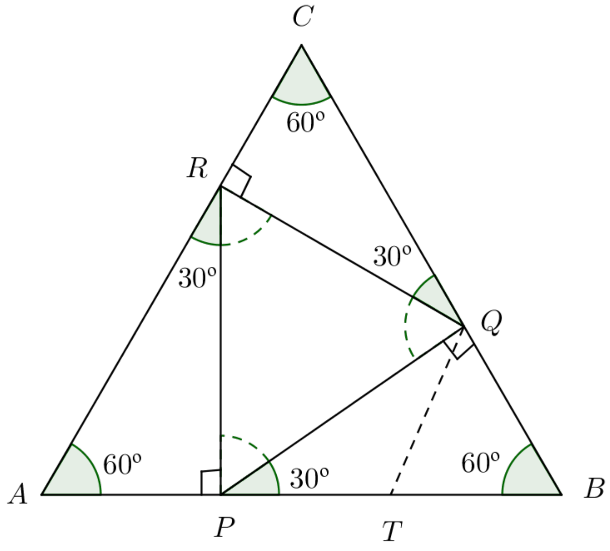
ii) Resolução por Trigonometria:

Vamos considerar os resultados obtidos na parte (a) e faremos a parte (b). Aplicando a lei dos senos ao triângulo $\triangle QPB$ teremos

$$\begin{aligned} \frac{PQ}{sen\,60^o} &= \frac{BQ}{sen\,30^o} \\ PQ\,sen\,30^o &= BQ\,sen\,60^o \\ \frac{PQ}{2} &= \frac{\sqrt{3}\,BQ}{2} \\ PQ &= \sqrt{3}\,BQ \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento para os triângulos $\triangle PRA$ e $\triangle RQC$ encontramos $PR = \sqrt{3}\,AP$ e $QR = \sqrt{3}\,CR$, respectivamente. Como $\triangle PQR$ é equilátero, então, $BQ = AP = CR$.

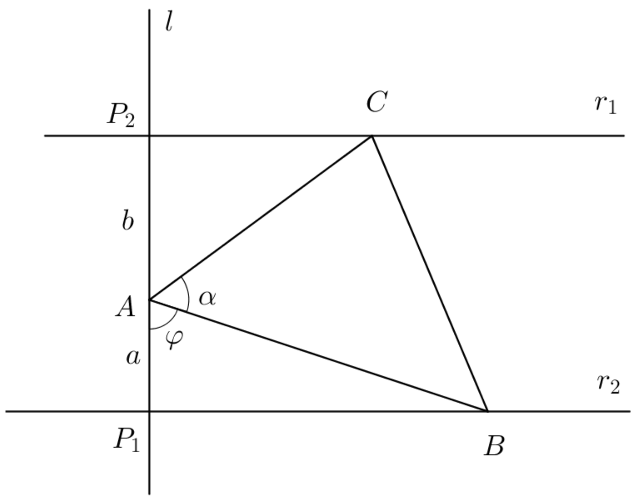
Figura 3.8:



Fonte: Autor

PROBLEMA 3.0.6. *Um ponto A está situado entre duas linhas paralelas r_1 e r_2 a uma distância $AP_1 = a$ de r_1 e $AP_2 = b$ de r_2, medidas na reta l perpendicular a r_1 e r_2, conforme mostrado na figura. Encontre pontos B em r_1 e C em r_2 tais que o triângulo acutângulo $\triangle ABC$ $(0 < \alpha < 90^o)$ tenha área máxima.*

Figura 3.9:



Fonte: ANDREESCU (2006)

(i)**Resolução:**

Denotemos por $[\triangle ABC]$ a área do triângulo ABC, que deve ser maximizada. Sejam $\angle BAC = \alpha$ e $\angle BAP_1 = \varphi$. Então, $\angle CAP2 = 180^o - \alpha - \varphi$. Tem-se no triângulo retângulo

AP_1B que $AB = \dfrac{a}{cos\,\varphi}$ e no triângulo retângulo CP_2A que $CA = \dfrac{b}{cos\,(180^o - \alpha - \varphi)}$. Como $cos\,(180^o - \alpha - \varphi) = -cos\,(\alpha + \beta)$, $CA = -\dfrac{b}{cos(\alpha + \beta)}$. A área do triângulo ABC fica então,

$$[\triangle ABC] = \frac{1}{2} \,.\, sen\,\alpha \,.\, AB \,.\, CA = -\frac{a.b.sen\,\alpha}{2\,cos\,(\alpha + \varphi)} \tag{3.18}$$

Lembrando que a fórmula trigonométrica $cos\,A \,.\, cos\,B = \dfrac{1}{2}\,[cos\,(A - B) + cos\,(A + B)]$ e tomando $A = \alpha + \varphi$ e $B = \varphi$, resulta que $2cos\varphi cos(\alpha + \varphi) = cos\alpha + cos(\alpha + 2\varphi)$ e a equação (3.18) ficará

$$[\triangle ABC] = -\frac{a.b.sen\,\alpha}{cos\,(\alpha) + cos(\alpha + 2\varphi)} \tag{3.19}$$

Como foi dado que $0 < \alpha < 90^o$, resulta que $0 < cos\,\alpha < 1$. Para que o quociente (3.19) seja máximo deve ser $cos\,(\alpha + 2\varphi) = -1$, isto é, deve ser $\alpha + 2\varphi = 180^o$. De onde $\varphi = 90^o - \dfrac{\alpha}{2}$.

O valor máximo da área é $[\triangle ABC] = -\dfrac{a.b.sen\,\alpha}{cos\,\alpha - 1} = ab\,\dfrac{sen\,\alpha}{1 - cos\,\alpha} = ab\,cotg\,\dfrac{\alpha}{2}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho mostramos que há várias possibilidades em que a Trigonometria e a Geometria podem caminhar juntas, colaborando mutuamente na obtenção de resultados, sem serem consideradas áreas relativamente separadas na Matemática. Quando se aplicam métodos e técnicas de ambas as áreas na demonstração de proposições ou na resolução de problemas geométricos ou trigonométricos aumentam-se as alternativas de resolução ou demonstração, podendo-se, às vezes, chegar a uma solução mais prática e mais elegante. No capítulo 1 começamos a apresentar algumas dessas possibilidades. Nele, usamos resultados da Geometria para deduzir proposições da Trigonometria. Um exemplo importante é o teorema do ângulo inscrito, a partir do qual foram deduzidos, em forma simples e natural, a Lei dos Senos e a fórmula para o seno e cosseno do ângulo duplo. No capítulo 2, a ideia foi similar, mas em sentido contrário. Nele, a Trigonometria é que foi utilizada a serviço da Geometria. Usamos resultados como a lei dos senos e o seno do ângulo duplo para demonstrar o teorema de Steiner-Lehmus, um teorema clássico e muito estudado da Geometria. A fim de mostrar que o vínculo entre estas duas áreas pode estar ainda mais próximo, escrevemos o capítulo 3, no qual foram propostos alguns problemas que foram resolvidos usando-se conjuntamente métodos de ambas as áreas. As ideias expostas neste trabalho podem inspirar enfoques interessantes na abordagem didática dos conteúdos da Geometria e da Trigonometria na escola e também na preparação dos alunos para as Olimpíadas de Matemática, contribuindo para mostrar a unidade e a harmonia interna da Matemática.

REFERÊNCIAS

[1] ANDREESCU, Titu; MUSHKAROV, Oleg; STOYANOV, Luchezar. **Geometric Problems on Maxima and Minima**. Editora Birkhauser Boston . United States of America, 2006.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana** – 9ª edição – Rio de Janeiro: SBM, 1995. 224p.

[3] BOYER, Carl B. **História da Matematica**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucler, 1974.

[4] CEPREUNI. **Problemas de Geometría resueltos por Trigonometría**, 2012. Disponível em : <http://cpreuni.blogspot.com.br/2012/09/problemas-de-geometria-resueltos-por.html>. Acesso em: 18 set. 2013.

[5] HAJJA, Mowaffaq. A Short Trigonometric Proof of the Steiner-Lehmus Theorem. **Forum Geom**. v.8, 39-42, 2008.

[6] HOEHN, Larry. Derivation of the Law of Cosines via the Incircle. **Forum Geom**. v.13, 133-134, 2013.

[7] IEZZI, Gelson et al. **Matemática - Ciências e Aplicações**. São Paulo: Ed. Atual, 2010. v.1.

[8] LIMA, E. L. et al. **Temas e Problemas Elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 246p.

[9] LOPES, Silvana Marini Rodrigues. **Complexidade em Geometria Euclidiana Plana**. 2002. 83 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

[10] MAOR, Eli. **Trigonometric Delights**. E-BOOK: Princeton University Press, 2002.

[11] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar: Geometria Euclidiana Plana**. - 2ª edição - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[12] NETO, Antonio Caminha Muniz. **Geometria-Coleção PROFMAT**. - 1ª edição - Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[13] RAYMUNDO, Alexandre et al. **Conexões com a Matemática:** Manual do Professor. São Paulo: Ed. Moderna, 2010. v.2.

[14] REIS, G.A.; TSUCHIYA, L. Y.; AUGUSTINI, E. Complexidade Algébrica em Demonstrações de Geometria Euclidiana Plana: o Teorema de Napoleão e Propriedades. **Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática - FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia - UFU - MG**, Uberlândia, n. 9, p. 231-258, out/2007.

[15] UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA. Biblioteca Central. Manual de Normas para Apresentação dos Trabalhos Técnicos – Científicos da UFRR. Boa Vista, 2012. 102p.

[16] WAGNER, Eduardo. O Triângulo e suas Principais Circunferências. **EUREKA**, Rio de Janeiro, n. 20, p. 17-25, 2004.

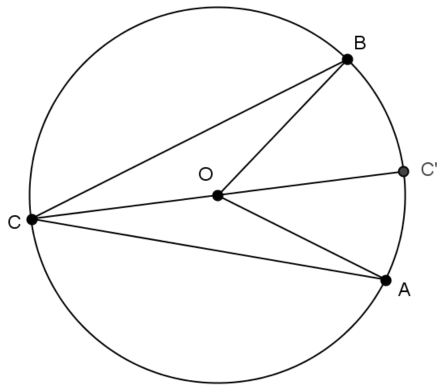
APÊNDICES

APÊNDICE A - Demonstração do Teorema do ângulo inscrito

Vamos agora apresentar a demonstração do teorema do ângulo inscrito enunciado na seção 1.1 que diz o seguinte: "A medida de todo ângulo inscrito numa circunferência é metade da medida do ângulo central correspondente".

Demonstração. Vamos considerar os seguintes casos:
(i) O centro O está no interior do ângulo inscrito $\angle ACB$, conforme figura 3.10 .

Figura 3.10: Ângulo inscrito quando o centro está no seu interior.



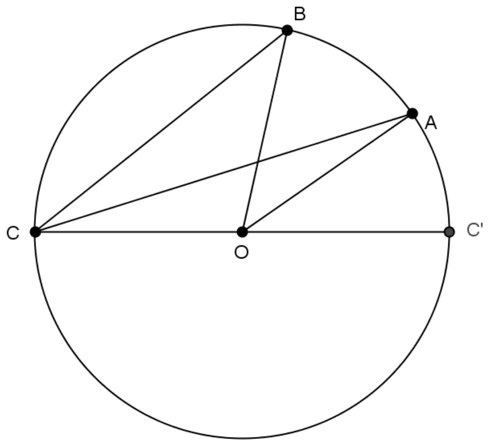
Fonte: NETO (2013)

Veja que os triângulos $\triangle_{AOC}$ e $\triangle_{BOC}$ são isósceles de bases AC e BC, respectivamente, logo temos que $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ e $\angle OBC = \angle OCB = \beta$. Por outro lado, $\angle AOC'$ e $\angle BOC'$ são ângulos externos aos triângulos $\triangle_{AOC}$ e $\triangle_{BOC}$, respectivamente. Segue então que $\angle AOC' = 2\alpha$ e $\angle BOC' = 2\beta$. Mas,

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle AOC' + \angle BOC' \\ &= 2(\alpha + \beta) \\ &= 2\angle ACB. \end{aligned}$$

(ii) O centro O não está no interior do ângulo inscrito $\angle ACB$, conforme figura 3.11. Novamente temos que os triângulos $\triangle_{AOC}$ e $\triangle_{BOC}$ são isósceles de bases AC e BC.

Figura 3.11: Ângulo inscrito quando o centro não está no seu interior.



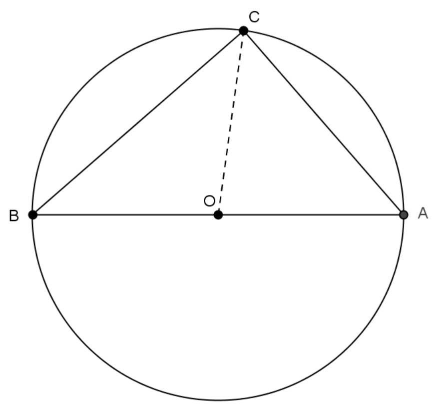
Fonte: NETO (2013)

Fazendo $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ e $\angle OBC = \angle OCB = \beta$ obtemos $\angle ACB = \beta - \alpha$. Como $\angle AOC$ e $\angle BOC$, nessa ordem, são ângulos externos aos triângulos $\triangle_{AOC}$ e $\triangle_{BOC}$, então $\angle AOC = 2\alpha$ e $\angle BOC = 2\beta$. Mas,

$$\begin{aligned} \angle AOB &= \angle BOC - \angle AOC \\ &= 2\beta - 2\alpha \\ &= 2(\beta - \alpha) \\ &= 2\angle ACB. \end{aligned}$$

(iii) O centro O está sobre um dos lados do ângulo inscrito $\angle ACB$, conforme figura 3.12:

Figura 3.12: Ângulo inscrito quando o centro está sobre um dos lados.



Fonte: NETO (2013)

Raciocinando de forma análoga aos dois casos anteriores, temos que os triângulos $\triangle_{AOC}$ e $\triangle_{BOC}$ são isósceles de bases AC e BC. Assim, os ângulos $\angle OAC = \angle OCA = \alpha$ e

$\angle OBC = \angle OCB = \beta$. Observe que o ângulo inscrito $\angle ACB = \angle OCB + \angle OCA = \beta + \alpha$. Como $\angle AOC$ é ângulo externo do triângulo $\triangle_{BOC}$ e $\angle BOC$ é ângulo externo do triângulo $\triangle_{AOC}$, então, $\angle AOC = 2\beta$ e $\angle BOC = 2\alpha$. Mas,

$$
\begin{aligned}
\angle AOC + \angle BOC &= \angle AOB \\
&= \angle BOA \\
&= 2\beta + 2\alpha \\
&= 2(\beta + \alpha) \\
&= 2\angle ACB.
\end{aligned}
$$

□

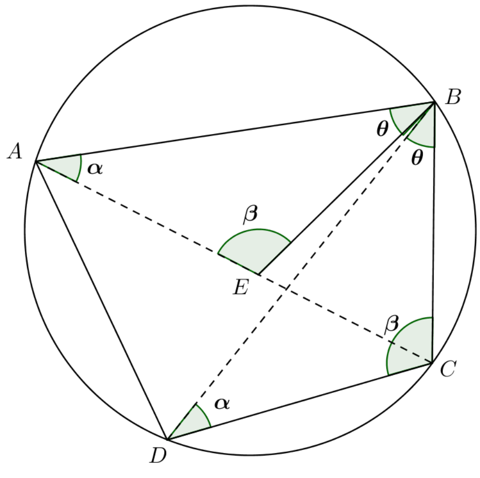
APÊNDICE B - Demonstração do Teorema de Ptolomeu

O teorema de Ptolomeu visto na seção 1.2 diz que "se ABCD é um quadrlátero inscritível de diagonais AC e BD, então $AB.CD + AD.BC = AC.BD$". Vejamos a seguir uma demonstração para o teorema.

Demonstração. Na figura 3.13 o ponto E foi tomado sobre a diagonal AC de tal maneira que $\angle ABE = \angle DBC = \theta$. Veja também que $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$, pois têm a corda BC em comum (corolário 1.1.1). Dessa forma, os triângulos $\triangle_{ABE}$ e $\triangle_{DBC}$ são semelhantes já que têm dois pares de ângulos congruentes. Daí, se infere que

$$\begin{aligned} \frac{AE}{DC} &= \frac{AB}{DB} \\ AE.DB &= AB.DC \end{aligned} \tag{3.20}$$

Figura 3.13: Demonstração geométrica do Teorema de Ptolomeu.



Fonte: MAOR (2002)

Agora se somarmos o ângulo $\angle EBD$ nos dois lados da equação $\angle ABE = \angle DBC$, obtemos

$$\begin{aligned} \angle ABE + \angle EBD &= \angle DBC + \angle EBD \\ \angle ABD &= \angle EBC \end{aligned}$$

Mas, os ângulos $\angle BDA$ e $\angle BCE$ também são iguais porque têm a corda AB em comum. Segue, então, que os triângulos $\triangle_{ABD}$ e $\triangle_{EBC}$ são semelhantes, por terem dois ângulos congruentes. Daí

$$\begin{aligned} \frac{AD}{EC} &= \frac{BD}{BC} \\ EC.BD &= AD.BC \qquad (3.21) \end{aligned}$$

Somando as equações (3.20) e (3.21)

$$\begin{aligned} AE.DB + EC.DB &= AB.DC + AD.CB \\ (AE + EC) &= AB.DC + AD.CB \\ AC.DB &= AB.DC + AD.CB \qquad (3.22) \end{aligned}$$

□

APÊNDICE C - Demonstração da Observação 1.1.3

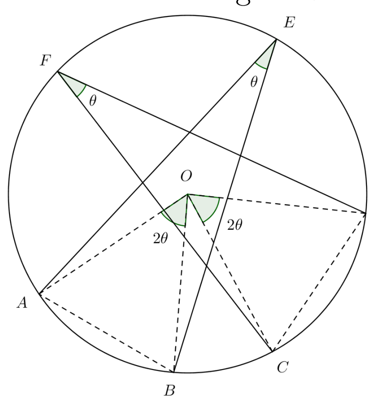
A observação 1.1.3 diz que "ângulos inscritos iguais estão subtendidos a cordas de mesma medida. Diz ainda que se um ângulo inscrito é reto, então, ele subtende um diâmetro do círculo". Segue a demonstração.

Demonstração. **Primeira parte)** Sejam $\angle AEB = \theta$ e $\angle CFD = \theta$ dois ângulos incritos num círculo de centro O (Figura 3.14). Do teorema 1.1.1 temos que os ângulos centrais $\angle AOB$ e $\angle COD$ medem 2θ. Assim, os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle COD$ são congruentes (pelo caso de congruência LAL), resultando daí que $AB = CD$.

Segunda parte) Seja $\angle ABC$ um ângulo reto inscrito num círculo de centro O conforme Fig. 3.15. Sendo D o ponto de interseção das retas r (paralela a AB passando por C) e s (paralela a BC passando por D), temos que o quadrilátero ABCD é um retângulo. Seja M o ponto de interseção das diagonais AC e BD do retângulo. Como no retângulo as diagonais tem mesma medida e se intersectam em seus respectivos pontos médios, então o ponto M equidista dos vétices A, B, C e D do retângulo, ou seja M coincide com o centro O do círculo, logo as diagonais AC e BD coincidem com diâmetros do círculo.

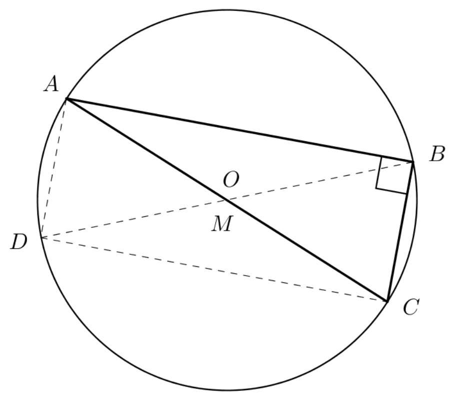
□

Figura 3.14:



Fonte: Autor

Figura 3.15:



Fonte: Autor

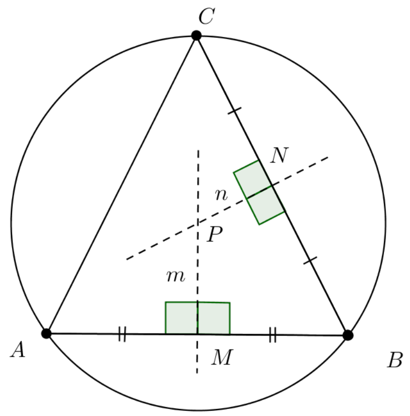
ANEXOS

ANEXO A - Teoremas Auxiliares

Teorema 3.0.2. *Todo triângulo está inscrito em um círculo.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo. Para mostrar que ele está inscrito em um círculo devemos exibir um ponto que seja equidistante de A, B e C. Seja m uma reta perpendicular a BC e passando pelo seu ponto médio M e seja n a reta perpendicular a BC e passando pelo seu ponto médio N. Designe por P o ponto de interseção dessas duas retas. Observe que todo ponto da reta m é equidistante de A e B, e que todo ponto da reta n é equidistante de B e C. Logo o ponto P será equidistante de A, B e C. $\square$

Figura 3.16:

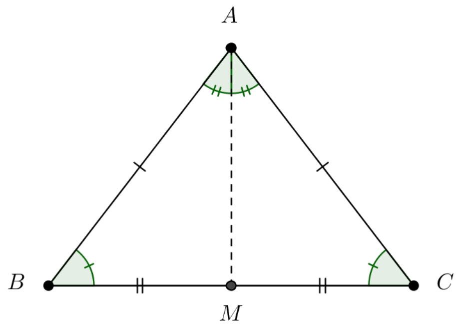


Fonte: BARBOSA (2006)

Teorema 3.0.3. *Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles de base BC. Então, a bissetriz, a mediana e a altura relativas a BC coincidem.*

Demonstração. Seja M o ponto médio do lado BC. Temos que os triângulos $\triangle ABM$ e $\triangle ACM$ são congruentes pelo caso LLL, pois, AM é lado comum aos dois triângulos, $AB = AC$ visto que $\triangle ABC$ é isósceles, BM=CM já que M é ponto médio de BC. Conclui-se daí que AM é bissetriz do ângulo interno $\angle BAC$ (pois, $\angle BAM = \angle MAC$).
Como $\angle BMA = \angle CMA$ e $\angle BMA + \angle CMA = 180^o$, segue então que $\angle BMA = \angle CMA = 90^o$. Logo, AM também é altura. E, por último, AM é mediana, pois M foi tomado como sendo ponto médio de BC. $\square$

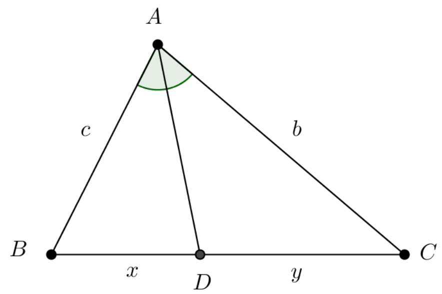
Figura 3.17:



Fonte: Autor

Teorema 3.0.4 (bissetriz interna)**.** *A bissetriz interna de um ângulo interno de um triângulo determina sobre o lado oposto ao ângulo dois segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

Figura 3.18:



Fonte: NETO (2013)

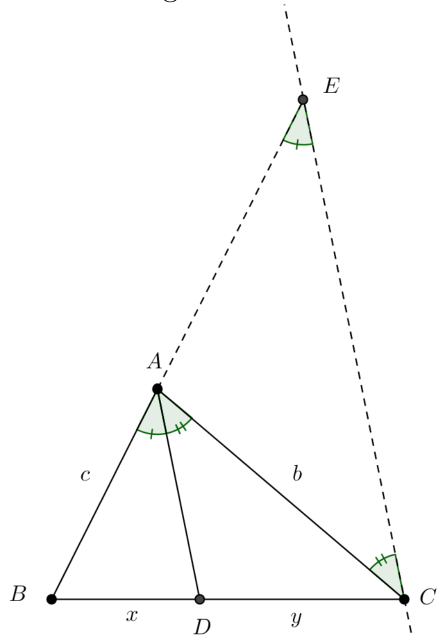
Assim por exemplo, a bissetriz interna do ângulo $\angle BAC$ do triângulo $\triangle ABC$ (fig. 3.18) divide o lado BC em dois segmentos x e y tais que:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

Demonstração. Traçamos por C uma reta paralela a bissetriz interna AD, e seja E a interseção dessa paralela com o prolongamento da reta AB (fig. 3.19). Pela propriedade de paralelismo, temos que $\angle BAD = \angle BEC$ e $\angle DAC = \angle ACE$, como AD é bissetriz concluímos que $\angle ACE = \angle AEC$, portanto $\triangle ACE$ é isósceles, com $AE = AC = b$. Sendo assim, pelo teorema de tales, temos que: $\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$.

□

Figura 3.19:

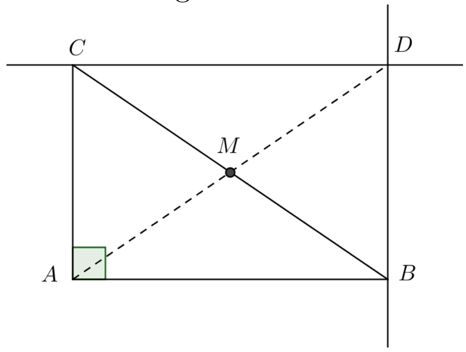


Fonte: NETO (2013)

Teorema 3.0.5. *A mediana relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à metade da mesma.*

Demonstração. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em A (Figura 3.20). Trace, por B, a paralela a AC e, por C, a paralela a AB; seja, ainda, D o ponto de interseção de tais retas. Como $\angle BAC + \angle ABD = 180^o$ e $\angle BAC = 90^o$, segue que $\angle ABD = 90^o$.Analogamente, $\angle ACD = 90^o$ e, como a soma dos ângulos internos de $ABCD$ é 360^o, segue, daí, que $\angle BDC = 90^o$. Portanto, o quadrilátero $ABCD$ é um retângulo, donde $AD = BC$ e o ponto M de interseção de AD e BC é o ponto médio de ambos tais segmentos. Logo, $BC = AD = 2\,AM$. □

Figura 3.20:



Fonte: NETO (2013)

Teorema 3.0.6 (Transformação de Soma em Produto)**.** *Considere dois arcos quaisquer de medidas* α *e* β*, então*

$$sen\,\alpha + sen\,\beta = 2\,sen\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{3.23}$$

Demonstração. Façamos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = \alpha - \beta \end{cases} \tag{3.24}$$

Resolvendo o sistema em termos de α e β

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{a+b}{2} \\ \beta = \dfrac{a-b}{2} \end{cases} \tag{3.25}$$

Calculando agora $sen\,\alpha + sen\,\beta$ em (3.23)

$$\begin{aligned} sen\,\alpha + sen\,\beta &= sen\,\frac{a+b}{2} + sen\,\frac{a-b}{2} \\ &= sen\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right) + sen\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right) \\ &= sen\,\frac{a}{2}\,cos\,\frac{b}{2} + sen\,\frac{b}{2}\,cos\,\frac{a}{2} + sen\,\frac{a}{2}\,cos\,\frac{b}{2} - sen\,\frac{b}{2}\,cos\,\frac{a}{2} \\ &= 2\,sen\,\frac{a}{2}\,cos\,\frac{b}{2} + sen\,\frac{a}{2}\,cos\,\frac{b}{2} \quad \text{substituindo (3.24)} \\ &= 2sen\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,cos\,\frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

$\square$