



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

ADMILSON ALVES DOS SANTOS

**TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA: uma abordagem elementar**

Boa Vista, RR  
2014

ADMILSON ALVES DOS SANTOS

**TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA: uma abordagem elementar**

Dissertação apresentada como trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.

Boa Vista, RR  
2014

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)  
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S237l Santos, Admilson Alves dos.  
Trigonometria Hiperbolica : uma abordagem elementar / Admilson Alves dos Santos. -- Boa Vista, 2014.  
150f : il.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Mestrado em Matemática Profissional - PROFMAT.

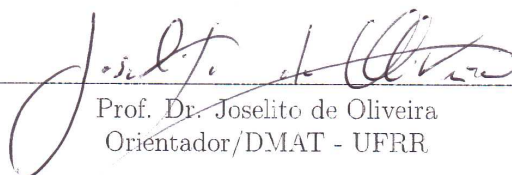
1 – . Trigonometria Hiperbolica. 2 – Trigonometria Circular. 3 – Teorema Fundamental da Trigonometria Hiperbolica.. I – Título. II. – Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU- 514.116

ADMILSON ALVES DOS SANTOS


**TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA: uma abordagem elementar**

Dissertação apresentada como trabalho de conclusão de curso do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROF-MAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR. Defendida em 15 de abril de 2014 e avaliada pela seguinte banca examinadora:



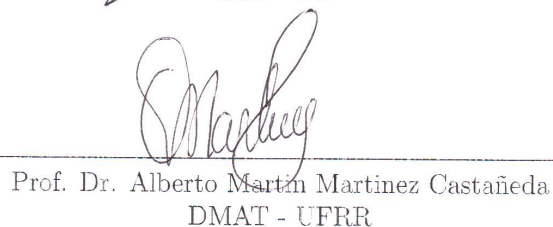
---

Prof. Dr. Joselito de Oliveira  
Orientador/DMAT - UFRR



---

Prof. Dr. Orlando Stanley Juriaans  
IME - USP



---

Prof. Dr. Alberto Martín Martínez Castañeda  
DMAT - UFRR

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida.

Agradeço aos meus familiares e amigos pelo incentivo.

Agradecimento especial à minha prima Marcile Almeida por toda gentileza a mim prestada durante o curso.

Agradeço ao professor Joselito de Oliveira pelas cobranças constantes que ele me fez, algo que me fez progredir, além de sua forte dedicação ao PROFMAT.

Agradeço à CAPES pelo auxílio financeiro, à Universidade Federal de Roraima e ao PROFMAT.

Agradeço a todos os professores que deram suas contribuições a este curso.

Por último, agradeço aos companheiros de curso da turma PROFMAT 2012 Ana Maria, Denis, Eduardo, Jerrimar, José Walter, Rodson e Wender pela parceria que tivemos na troca de conhecimento.

# RESUMO

A meta principal desta dissertação é apresentar uma construção da trigonometria hiperbólica e um estudo das funções trigonométricas hiperbólicas de forma que alunos de iniciação científica e professores do Ensino Médio tenham melhor acesso à referida teoria. A construção da trigonometria hiperbólica será feita priorizando a aplicação de conceitos elementares da matemática. Será utilizado o ramo direito da hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ , fazendo uma comparação com a construção da trigonometria circular e tomando como ponto de partida um setor hiperbólico. Será necessário calcular a área desse setor hiperbólico, o que poderia ser feito através de uma integral definida, porém outros recursos elementares serão adotados, atendendo ao objetivo principal deste trabalho. Apresentar-se-á também uma conexão entre a trigonometria hiperbólica e a trigonometria circular, que é estendida num momento posterior para funções trigonométricas circulares e trigonométricas hiperbólicas. As funções trigonométricas hiperbólicas e suas funções inversas serão estudadas analítica e graficamente. O estudo analítico seguirá de forma completamente elementar, porém o estudo gráfico será feito utilizando alguns elementos da teoria dos limites de funções. Algumas aplicações da trigonometria hiperbólica serão mostradas. Para finalizar, é apresentada a trigonometria hiperbólica no conjunto dos números complexos.

Palavras-chave: Trigonometria Hiperbólica. Trigonometria Circular. Teorema Fundamental da Trigonometria Hiperbólica

# ABSTRACT

The main goal of this dissertation is to present a construction of hyperbolic trigonometry, and a study of hyperbolic trigonometric functions so that undergraduate students and high school teachers have better access to that theory. The construction of hyperbolic trigonometry will be prioritizing the application of elementary concepts of math. Will be used the right branch of the hyperbola  $x^2 - y^2 = 1$ , making a comparison with the construction of circular trigonometry and taking as starting point a hyperbolic trigonometry sector. Will need calculate the area of this hyperbolic sector, which could be done through of a definite integral, but other basic features will be adopted, answering to main objective of this work. Also present a connection between circular trigonometry and hyperbolic trigonometry, which is extended after for circular trigonometric functions and hyperbolic trigonometric functions. The hyperbolic trigonometric functions and their inverse functions will be studied analytically and graphically. The analytical study will follow so completely elementary, however the graphic study will be done using some elements of the theory of limits of functions. Some application of hyperbolic trigonometry are displayed. Finally, the hyperbolic trigonometry is presented in the set of complex numbers.

**Keywords:** Hyperbolic Trigonometry. Circular Trigonometry. Fundamental Theorem of Hyperbolic Trigonometry.

# SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	9
<b>1 TRIGONOMETRIA CIRCULAR</b>	<b>12</b>
1.1 Um breve histórico sobre a trigonometria circular . . . . .	12
1.2 Desenvolvimento da trigonometria circular . . . . .	12
1.2.1 Construção da trigonometria circular: definição e as primeiras propriedades . . . . .	13
1.2.2 Identidade fundamental da trigonometria circular e outras propriedades	19
1.2.3 Representação geométrica da tangente e outras propriedades . . . .	20
1.2.4 Razões trigonométricas circulares da soma e da diferença de argumentos	21
1.2.5 Propriedades das razões trigonométricas circulares do argumento duplo e do argumento metade . . . . .	27
1.3 Funções trigonométricas circulares . . . . .	28
1.3.1 Estudo da função seno . . . . .	29
1.3.2 Estudo da função cosseno . . . . .	30
1.3.3 Estudo da função tangente . . . . .	31
1.3.4 Estudo da função cotangente . . . . .	34
1.3.5 Estudo da função secante . . . . .	37
1.3.6 Estudo da função cossecante . . . . .	39
<b>2 TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA</b>	<b>42</b>
2.1 Um breve histórico sobre a trigonometria hiperbólica . . . . .	42
2.2 Definindo o argumento hiperbólico . . . . .	43
2.3 Definição das razões trigonométricas hiperbólicas . . . . .	45
2.3.1 Definição do seno, do cosseno e da tangente hiperbólicos . . . . .	45
2.3.2 Identidade fundamental da trigonometria hiperbólica . . . . .	47
2.3.3 Interpretação geométrica das razões trigonométricas hiperbólicas . .	47
2.3.4 Conexão entre trigonometria hiperbólica e trigonometria circular . .	50
2.4 Explicitando a função $\alpha$ e as fórmulas para as razões trigonométricas hiperbólicas . . . . .	51
2.4.1 Cálculo da medida do argumento hiperbólico . . . . .	52
2.4.2 Cálculo da área da região $AA'B'B$ . . . . .	53
2.4.3 Fórmulas das razões trigonométricas hiperbólicas . . . . .	61
2.4.4 Razões trigonométricas hiperbólicas da soma e da diferença de argumentos . . . . .	62
2.4.5 Outras propriedades das razões trigonométricas hiperbólicas . . . .	69



2.5	<b>Funções trigonométricas hiperbólicas</b>	71
2.5.1	Estudo da função seno hiperbólico	71
2.5.2	Estudo da função cosseno hiperbólico	76
2.5.3	Estudo da função tangente hiperbólica	79
2.5.4	Estudo da função cotangente hiperbólica	82
2.5.5	Estudo da função secante hiperbólica	86
2.5.6	Estudo da função cossecante hiperbólica	89
2.6	<b>Funções trigonométricas hiperbólicas inversas</b>	92
2.6.1	Função seno hiperbólico inversa	93
2.6.2	Função cosseno hiperbólico inversa	93
2.6.3	Função tangente hiperbólica inversa	94
2.6.4	Função cotangente hiperbólica inversa	94
2.6.5	Função secante hiperbólica inversa	95
2.6.6	Função cossecante hiperbólica inversa	96
2.7	<b>Teoremas complementares</b>	96
2.8	<b>Representação gráfica das funções trigonométricas hiperbólicas</b>	100
2.8.1	Reta tangente e concavidade: definições e propriedades	101
2.8.2	Representação gráfica da função seno hiperbólico	102
2.8.3	Representação gráfica da função cosseno hiperbólico	104
2.8.4	Representação gráfica da função tangente hiperbólica	105
2.8.5	Representação gráfica da função cotangente hiperbólica	107
2.8.6	Representação gráfica da função secante hiperbólica	108
2.8.7	Representação gráfica da função cossecante hiperbólica	111
2.9	<b>Representação gráfica das funções hiperbólicas inversas</b>	113
2.9.1	Representação gráfica da função seno hiperbólico inversa	113
2.9.2	Representação gráfica da função cosseno hiperbólico inversa	114
2.9.3	Representação gráfica da função tangente hiperbólica inversa	114
2.9.4	Representação gráfica da função cotangente hiperbólica inversa	115
2.9.5	Representação gráfica da função secante hiperbólica inversa	115
2.9.6	Representação gráfica da função cossecante hiperbólica inversa	116
2.10	<b>Aplicações da trigonometria hiperbólica</b>	117
2.10.1	Cabos dependurados	117
2.10.2	Ondas do mar	117
2.11	<b>Análise comparativa: trigonometria hiperbólica X trigonometria circular</b>	118
2.11.1	Função seno hiperbólico X função seno circular	118
2.11.2	Função cosseno hiperbólico X função cosseno circular	118
2.11.3	Função tangente hiperbólica X função tangente circular	118
2.11.4	Função cotangente hiperbólica X função cotangente circular	118
2.11.5	Função secante hiperbólica X função secante circular	119
2.11.6	Função cossecante hiperbólica X função cossecante circular	119
2.12	<b>Conexão entre funções trigonométricas circulares e hiperbólicas</b>	119
<b>3</b>	<b>TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA EM <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>122</b>
3.1	Exponencial complexa de base $e$	122
3.2	Razões trigonométricas hiperbólicas e circulares de $z \in \mathbb{C}$	124
3.3	Fórmulas de Euler	131
3.4	Cálculo das razões trigonométricas hiperbólicas e circulares $x + yi$	132

<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>135</b>
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>136</b>
<b>APÊNDICES</b>	<b>138</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>145</b>

# INTRODUÇÃO

Em livros de Cálculo Diferencial e Integral de autores como, por exemplo (LEITHOLD, 1994, v.1) e (STEWART, 2009, v.1), depara-se com a trigonometria hiperbólica de tal forma que primeiramente são apresentadas as duas razões trigonométricas básicas, **seno** e **coseno** hiperbólicos de  $x \in \mathbb{R}$  definidas por:

$$\operatorname{senh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{cosh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

respectivamente, e, posteriormente, utilizando-as para definir a **tangente**, a **cotangente**, a **secante** e a **cossecante** hiperbólicas da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{tgh}x = \frac{\operatorname{senh}x}{\operatorname{cosh}x} & \text{ou} \quad \operatorname{tgh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{cotgh}x = \frac{\operatorname{cosh}x}{\operatorname{senh}x} & \text{ou} \quad \operatorname{cotgh}x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ \operatorname{sech}x = \frac{1}{\operatorname{cosh}x} & \text{ou} \quad \operatorname{sech}x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ \operatorname{cossech}x = \frac{1}{\operatorname{senh}x} & \text{ou} \quad \operatorname{cossech}x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \end{array}$$

onde uma definição para o número  $e$  é:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

e uma aproximação com oito casas decimais para este número é:

$$2,71828182.$$

E ainda nesse contexto é mostrado que um ramo de uma hipérbole pode ser parametrizado pelo **seno** e o **coseno** hiperbólicos.

É feito um comparativo entre equações as  $x^2 - y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 1$ , da hipérbole e da circunferência, respectivamente, percorrendo sobre setores circular e hiperbólico para justificar o nome “trigonometria hiperbólica”. Além disso, é feito um tratamento sobre as identidades trigonométricas hiperbólicas, as quais apresentam uma familiaridade com as identidades trigonométricas circulares.

Em suma, primeiramente define-se o **seno hiperbólico** e o **co-seno hiperbólico** a partir de suas fórmulas matemáticas para então analisar a correspondência com a hipérbole. Por outro lado, há publicação<sup>1</sup> onde a trigonometria hiperbólica é construída a partir da área de um setor hiperbólico, mas utilizando o Segundo Teorema Fundamental do Cálculo<sup>2</sup>. Além disso, McMahon (1906) apresenta uma construção da trigonometria hiperbólica relacionando a área de um setor da elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  com a área de um setor da hipérbole  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

O objetivo desta dissertação é apresentar uma construção da trigonometria hiperbólica a partir do gráfico de uma hipérbole e também utilizando o conceito de área e de logaritmo sem utilizar o teorema mencionado anteriormente, e só então fazer uma investigação à procura das fórmulas matemáticas que as definem. De modo geral, a meta é estudar a trigonometria hiperbólica e as funções trigonométricas hiperbólicas (ou funções hiperbólicas) em  $\mathbb{R}$  utilizando do Cálculo Diferencial Integral apenas o que se refere ao estudo de limite de uma função real.

As funções trigonométricas hiperbólicas têm importantes aplicações em várias ciências como, por exemplo, a física, a engenharia, dentre outras.

(...). As aplicações na ciência e na engenharia ocorre sempre que uma entidade, como a luz, a velocidade, a eletricidade ou a radioatividade, é gradualmente absorvida ou extinguida, pois o decaimento pode ser respresentado por funções hiperbólicas. A aplicação mais famosa é o uso do co-seno hiperbólico para descrever a forma de um fio dependurado (STEWART, 2009, v.1, p. 237).

Daí, serão apresentadas, neste trabalho, algumas aplicações das funções trigonométricas hiperbólicas.

Para melhor compreensão do leitor, decidiu-se organizar este trabalho em três capítulos.

O capítulo 1 é dedicado à **trigonometria circular**, mostrando como essa trigonometria é construída; apresentando e demonstrando proposições e corolários; e finalizando com um estudo analítico e sem representação gráfica das funções trigonométricas circulares seno, co-seno, tangente, cotangente, secante e cossecante.

No capítulo 2 é apresentada a construção da **trigonometria hiperbólica**, objeto de estudo dessa dissertação, com um desenvolvimento semelhante ao do primeiro capítulo; primeiramente, procurou-se definir o argumento hiperbólico e, em seguida, definindo-se as razões trigonométricas hiperbólicas; tendo definidas as razões trigonométricas hiperbólicas, foram estudadas suas primeiras propriedades e a relação entre a trigonometria hiperbólica

<sup>1</sup>Veja publicação de CARVALHO, Sônia Pinto de. **As Funções Hiperbólicas**. Disponível em <<http://www.mat.ufmg.br/comed/2005/b2005/funchiper.pdf>> acesso em 20 de agosto de 2013

<sup>2</sup>Este teorema pode ser encontrado em (STEWART, 2009, v.1)

e a trigonometria circular. Posteriormente, foi calculada a medida genérica do argumento hiperbólico e foram determinadas as fórmulas matemáticas para as razões trigonométricas hiperbólicas. Foi feito um estudo analítico das seis funções trigonométricas hiperbólicas canônicas e a interpretação gráfica de cada uma dessas funções, mas antes da representação gráfica foram determinadas suas funções inversas, isto é, as funções hiperbólicas inversas; fez-se também uma análise comparativa entre as funções trigonométricas hiperbólicas e as funções trigonométricas circulares correspondentes. Este capítulo foi finalizado apresentando duas aplicações das funções trigonométricas hiperbólicas.

No capítulo 3 foi feito um estudo básico da trigonometria hiperbólica no conjunto dos números complexos.

Concluimos a dissertação apresentando dois apêndices: A e B; e três anexos: A, B e C. No apêndice A, é mostrada uma maneira alternativa para esboçar os gráficos das funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico; no apêndice B, apresentamos duas proposições, juntamente com suas demonstrações, referentes à inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função real. O anexo A traz algumas definições de limites de funções reais; algumas propriedades básicas de limites de funções reais são apresentadas no anexo B; por fim, alguns teoremas de limite de funções reais encontram-se no anexo C.

# Capítulo 1

## TRIGONOMETRIA CIRCULAR

Neste capítulo, o objetivo é apresentar a trigonometria circular mostrando os passos de sua construção. Além disso, será apresentado também um pouco da sua história.

### 1.1 Um breve histórico sobre a trigonometria circular

A Trigonometria Circular foi criada no âmbito da matemática grega. E pode-se dizer que ela foi desenvolvida com a finalidade de atender aos trabalhos de Astronomia, da “Navegação e da Geografia” (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

Os estudos da trigonometria “se concentravam na Trigonometria Esférica, que estuda triângulos esféricos, isto é, triângulos construídos sobre uma superfície esférica”, mas para desenvolver a Trigonometria Esférica foi preciso desenvolver a trigonometria plana (trigonometria circular e trigonometria no triângulo retângulo).

A Trigonometria foi fundada por Hiparco de Nicéia, que viveu por volta de até ano 120 a.C. E nessa época não se tinha ideia de seno de um ângulo, mas de cordas trigonométricas, mais precisamente (CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005).

### 1.2 Desenvolvimento da trigonometria circular

A trigonometria circular é definida com base na trigonometria no triângulo retângulo e no fato de que o comprimento e a medida em radianos de um arco de circunferência unitária têm o mesmo valor numérico. Procura-se também não perder as propriedades da trigonometria no triângulo retângulo ao passar para trigonometria circular.

Nesta seção, serão apresentadas a construção da trigonometria circular e suas propriedades básicas.

### 1.2.1 Construção da trigonometria circular: definição e as primeiras propriedades

Na trigonometria circular, as razões trigonométricas de  $\alpha \in \mathbb{R}$  são definidas da seguinte forma: toma-se uma circunferência unitária  $C$  orientada tal que o sentido anti-horário é o positivo, daí, define-se a função  $E$  como mostra a definição a seguir.

**Definição 1.2.1.** *A função  $E : \mathbb{R} \rightarrow C$  é tal que fixada a origem num ponto  $A \in C$ , e dado o número real  $\alpha$ , percorre-se sobre  $C$ , no sentido positivo, se  $\alpha > 0$  e no sentido negativo, se  $\alpha < 0$ , um comprimento  $|\alpha|$ . Daí, sendo  $B$  o ponto cujo comprimento do  $\widehat{AB}$  é  $|\alpha|$ , tem-se:*

$$E(\alpha) = B$$

(CARMO; MORGADO; WAGNER, 2005, p. 26 - 7).

Com essa definição,  $E$  não possui ambiguidade; de fato, se  $B_1 \neq B_2$  são pontos de  $C$  tais que

$$E(\alpha_1) = B_1 \quad \text{e} \quad E(\alpha_2) = B_2,$$

então, no mesmo sentido (positivo ou negativo), os comprimentos dos arcos  $\widehat{AB_1}$  e  $\widehat{AB_2}$  são diferentes, isto é,  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ . Logo,  $E(\alpha) = B$  é um ponto bem definido de  $C$ .

**Proposição 1.2.1.** *Seja  $E$  a função dada na definição 1.2.1, então  $E$  é sobrejetiva.*

*Demonstração.* Devemos mostrar que para todo ponto  $B$  pertencente a uma circunferência unitária, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $E(\alpha) = B$ . Tomemos o ponto  $B$  pertencente a uma circunferência unitária. Relacionado ao ponto  $B$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$ , onde  $|\alpha|$  é o comprimento do arco  $\widehat{AB}$ , e  $A$  é o ponto da definição de  $E$ . Segue deste fato e da definição de  $E$  que  $E(\alpha) = B$ , isto é,  $E$  é sobrejetora.  $\square$

A proposição 1.2.1 garante a sobrejetividade da função  $E$ . Por outro lado, para um mesmo ponto  $B \in C$ , existe uma infinidade de números reais tais que  $B$  é imagem destes.

Sabe-se que o valor da área do círculo unitário é  $\pi$  e o comprimento da sua circunferência é  $2\pi$  (LIMA et al, 2013, cap. 5), onde

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}}$$

com  $n$  radicais (LIMA, 2006, p. 59-63). Logo, segue da definição de  $E$  que:

1. se  $\alpha > 2\pi$ , será necessário dar mais de uma volta no sentido anti-horário sobre  $C$  para localizar  $B$ ;
2. da mesma forma, se  $\alpha < -2\pi$ , precisará dar mais de uma volta no sentido horário para atingir  $B$ .
3. observe também que sendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $E(\alpha) = B$ , então  $E(\alpha + k \cdot 2\pi) = B$  para qualquer que seja  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tomando o sistema de coordenadas cartesianas cuja origem  $O(0, 0)$  é o centro de  $C$ , os pontos  $A(1, 0)$  e  $B(x, y)$  pertencentes a  $C$  e  $\alpha$  é a medida (positiva ou negativa) do arco  $\widehat{AB}$ , define-se:

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \text{abscissa de } B; \\ \sin\alpha &= \text{ordenada de } B; \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ se } \cos\alpha \neq 0.\end{aligned}$$

Da definição acima, vem os seguintes resultados:

1.  $-1 \leq \sin\alpha \leq 1$  e  $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ , pois o ponto  $B(x, y)$  da definição é tal que  $-1 \leq x \leq 1$  e  $-1 \leq y \leq 1$ ;
2.  $\sin 0 = 0$  e  $\cos 0 = 1$  (quando  $B = A$ );
3.  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$  e  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$  (quando  $A\widehat{O}B$  é reto);
4.  $\operatorname{tg}\alpha$  não está definida para  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , visto que  $E(\frac{\pi}{2} + k\pi)$  possui abscissa 0, acarretando  $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$ ;
5.  $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$  e  $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$  já que  $E(\alpha + 2k\pi) = E(\alpha)$ .

Tomando  $k = 1$ , teremos  $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi)$  e  $\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi)$ , ou seja,  $\cos\alpha$  e  $\sin(\alpha)$  possuem periodicidade  $2\pi$ .

**Proposição 1.2.2.** *Dado  $y \in [-1, 1]$ , então existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  com  $\sin\alpha = y$ .*

*Demonstração.* Inicialmente, mostremos que para cada  $y \in [-1, 1]$ , existe  $w \in \mathbb{R}$  tal que  $B(w, y)$  pertença à circunferência unitária de centro  $O(0, 0)$ .

Observe que dado  $-1 \leq y \leq 1$ , então  $1 - y^2 \geq 0$ , ou seja,  $\sqrt{1 - y^2} \in \mathbb{R}$ . Assim, dado  $y \in [-1, 1]$ , então existe  $w \in \mathbb{R}$  de modo que  $y^2 + w^2 = 1$ . De fato. Tomemos  $w = \pm\sqrt{1 - y^2}$ , daí teremos:

$$\begin{aligned}y^2 + w^2 &= y^2 + (\pm\sqrt{1 - y^2})^2 \\ &= y^2 + (1 - y^2) \\ &= 1.\end{aligned}$$



Logo, o ponto  $B(w, y)$  pertence à circunferência unitária de centro  $O(0, 0)$ . Assim, pela proposição 1.2.1, juntamente com a definição de seno, segue o resultado.  $\square$

**Proposição 1.2.3.** *Para cada  $x \in [-1, 1]$  dado, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos\alpha = x$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que dado  $x \in [-1, 1]$ , existe  $w \in \mathbb{R}$  tal que  $B(x, w)$  pertença à circunferência unitária de centro  $O(0, 0)$ .

À luz da demonstração da proposição 1.2.2, tomemos  $w = \pm\sqrt{1-x^2}$ , daí teremos:

$$x^2 + w^2 = 1.$$

Isto é, o ponto  $B(x, w)$  pertence à circunferência unitária centrada em  $O(0, 0)$ . Portanto, pela proposição 1.2.1 e da definição de cosseno, segue o resultado.  $\square$

**Proposição 1.2.4.** *Dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\operatorname{tg}\alpha = y. \quad (1.1)$$

*Demonstração.* Por definição,  $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha}$ . Assim, basta mostrar que dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{cos}\alpha} = y$$

Observe que para todo  $y \in \mathbb{R}$ , temos que  $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \in [-1, 1]$  e  $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \neq 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 &= \frac{1+y^2}{1+y^2} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Assim, dado  $y \in \mathbb{R}$ , tomemos  $w = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$  e  $z = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ . Logo, de 1.2, o ponto  $B(z, w)$  pertence à circunferência unitária de centro  $O(0, 0)$ . Segue da proposição 1.2.1 que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $E(\alpha) = B$ , onde  $E$  é dada na definição 1.2.1. Daí, por definição,

$$\operatorname{cos}\alpha = z \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\alpha = w. \quad (1.3)$$

De sorte que

$$\begin{aligned} \frac{w}{z} &= \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}} \\ &= y, \end{aligned}$$

concluimos que, para cada  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} = y.$$

□

As recíprocas do seno, do cosseno e da tangente são definidas por cossecante, secante e cotangente, respectivamente. E, nesta ordem, escreve-se:

$$\begin{aligned} \text{cotg}\alpha &= \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\alpha}, \text{ se } \text{sen}\alpha \neq 0. \\ \text{sec}\alpha &= \frac{1}{\text{cos}\alpha}, \text{ se } \text{cos}\alpha \neq 0; \\ \text{cosec}\alpha &= \frac{1}{\text{sen}\alpha}, \text{ se } \text{sen}\alpha \neq 0. \end{aligned}$$

**Proposição 1.2.5.** *Dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\text{cotg}\alpha = y.$$

*Demonstração.* Por definição,  $\text{cotg}\alpha = \frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\alpha}$ . Assim, basta provar que, dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\text{cos}\alpha}{\text{sen}\alpha} = y.$$

Observe que para cada  $y \in \mathbb{R}$ , temos que  $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \in [-1, 1]$  e  $\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \neq 0$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2 &= \frac{1+y^2}{1+y^2} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Assim, dado  $y \in \mathbb{R}$ , tomemos  $z = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$  e  $w = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$ . Logo, de 1.4, o ponto  $B(z, w)$  pertence à circunferência unitária de centro  $O(0, 0)$ . Segue da proposição 1.2.1 que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $E(\alpha) = B$ , onde  $E$  é dada na definição 1.2.1. Daí, por definição,

$$\text{cos}\alpha = z \quad \text{e} \quad \text{sen}\alpha = w. \tag{1.5}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{z}{w} &= \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}} \\ &= y.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Concluimos de 1.5 e de 1.6 que, dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = y.$$

□

Nas proposições 1.2.6 e 1.2.7 iremos considerar o seguinte conjunto:

$$A = \{y \in \mathbb{R} : |y| \geq 1\}.$$

**Proposição 1.2.6.** *Dado  $y \in A$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que*

$$\operatorname{sec}\alpha = y.$$

*Demonstração.* Por definição,  $\operatorname{sec}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$ . Assim, basta provar que, dado  $y \in A$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{1}{\cos\alpha} = y.$$

Dado  $y \in \mathbb{R}$ , então  $y^2 - 1 \geq 0$ , isto é,  $\sqrt{y^2 - 1} \in \mathbb{R}$  e  $0 \leq \sqrt{y^2 - 1} < |y|$ .

Assim, segue que:

$$0 \leq \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{|y|} < 1 \quad \text{e} \quad 0 < \frac{1}{|y|} \leq 1.\tag{1.7}$$

Observe que de 1.7, para cada  $y \in A$ , teremos:  $\frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}, \frac{1}{y} \in [-1, 1]$  e  $\frac{1}{y} \neq 0$ . Além disso:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 &= \frac{y^2 - 1 + 1}{y^2} \\ &= 1.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Dessa forma, dado  $y \in A$ , tomemos  $z = \frac{1}{y}$  e  $w = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y}$ . Logo, de 1.8, o ponto  $B(z, w)$  pertence à circunferência unitária de centro  $O(0, 0)$ . Segue da proposição 1.2.1 que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $E(\alpha) = B$ , onde  $E$  é dada na definição 1.2.1. Daí, pela definição de cosseno,

segue que:

$$\cos\alpha = z \neq 0. \quad (1.9)$$

Por outro lado, veja que:

$$\frac{1}{z} = y. \quad (1.10)$$

Portanto, de 1.9 e de 1.10, teremos o seguinte: dado  $y \in A$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  com:

$$\frac{1}{\cos\alpha} = y.$$

□

**Proposição 1.2.7.** *Dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  com*

$$\operatorname{cosec}\alpha = y.$$

*Demonstração.* Da definição de cossecante, temos que:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}.$$

Assim, basta provar que dado  $y$  nas condições da hipótese, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = y.$$

De modo análogo à demonstração da proposição 1.2.6, tomemos:

$$z = \frac{\sqrt{y^2 - 1}}{y} \quad \text{e} \quad w = \frac{1}{y}. \quad (1.11)$$

Daí, o ponto  $B(z, w)$  pertencerá à circunferência unitária de centro  $O(0, 0)$ . Segue deste fato e da proposição 1.2.1 que existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $E(\alpha) = B$ .

Logo, segue da definição de seno que:

$$\operatorname{sen}\alpha = w \neq 0. \quad (1.12)$$

Além disso, 1.11, obteremos

$$\frac{1}{w} = y. \quad (1.13)$$

Portanto, de 1.11 e de 1.12, teremos o seguinte: Para todo  $y \in A$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = y. \quad (1.14)$$

□

## 1.2.2 Identidade fundamental da trigonometria circular e outras propriedades

Dado que para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $|\operatorname{sen}\alpha|$  e  $|\operatorname{cos}\alpha|$  são as medidas dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo 1, ou  $|\operatorname{sen}\alpha| = 1$  e  $|\operatorname{cos}\alpha| = 0$ , ou  $|\operatorname{sen}\alpha| = 0$  e  $|\operatorname{cos}\alpha| = 1$ , já que  $B(\operatorname{cos}\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$  está sobre uma circunferência de raio unitário cujo centro é a origem do sistema cartesiano. Assim, sendo  $|\operatorname{sen}\alpha|^2 = \operatorname{sen}^2\alpha$  e  $|\operatorname{cos}\alpha|^2 = \operatorname{cos}^2\alpha$ , concluímos, via Teorema de Pitágoras, que:

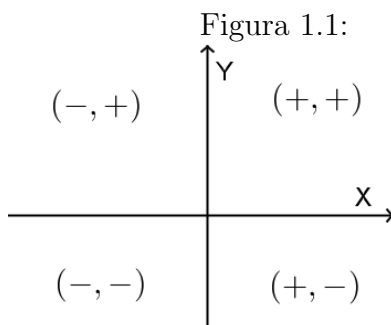
$$\operatorname{cos}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1. \quad (1.15)$$

Essa igualdade é definida como **identidade fundamental da trigonometria circular**. Como consequência dessa propriedade tem-se os seguintes resultados, que podem ser verificados facilmente:

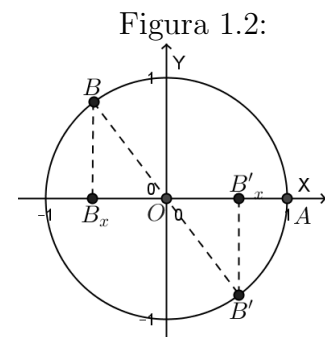
1.  $\sec^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$
2.  $\operatorname{cosec}^2\alpha = \operatorname{cotg}^2\alpha + 1$

Passemos agora a analisar outras propriedades das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, além das suas recíprocas.

Iniciamos analisando as figuras 1.1 e 1.2.



Fonte: Carmo; Morgado; Wagner (2005).



Fonte: Autor

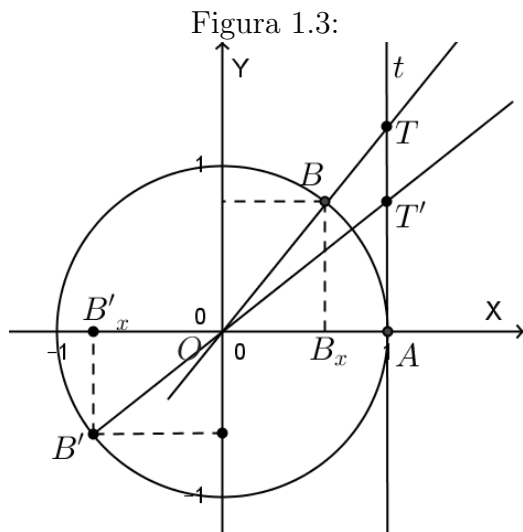
Sejam  $E(\alpha) = B$  e  $E(\alpha + \pi) = B'$ . Pela definição de  $E$  o ângulo  $B\hat{O}B'$  mede  $180^\circ$ , isto é, os pontos  $B$ ,  $O$  e  $B'$  pertencem ao mesmo diâmetro. Assim, sendo  $B_x$  e  $B'_x$  as projeções ortogonais de  $B$  e  $B'$ , respectivamente, em  $OX$ , temos  $B_x\hat{O}B \equiv B'_x\hat{O}B'$  (opostos

pelo vértice),  $OB_x'B' \equiv OB_xB$  (ângulos retos) e  $OB = OB'$  (raio da circunferência). Segue do caso  $LAA_0$  da congruência de triângulos, que  $\triangle OB_xB \equiv \triangle OB_x'B'$ . Daí,  $|\operatorname{sen}\alpha| = |\operatorname{sen}(\alpha + \pi)|$  e  $|\cos\alpha| = |\cos(\alpha + \pi)|$ . Por outro lado, do fato de que  $B$ ,  $O$  e  $B'$  pertencem ao mesmo diâmetro,  $B$  e  $B'$  estão sempre em quadrantes opostos. Segue destes fatos e da análise à figura 1.1, que:

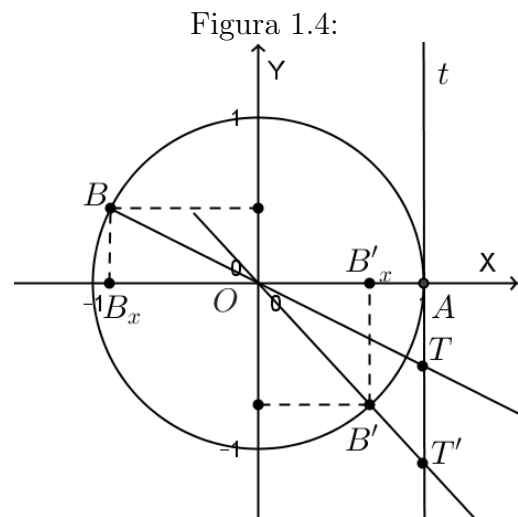
1.  $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(\alpha + \pi)$  e  $\cos\alpha = -\cos(\alpha + \pi)$ ;
2.  $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \pi)$  e  $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg}(\alpha + \pi)$  (que é consequência da anterior), ou seja,  $\operatorname{tg}\alpha$  e  $\operatorname{cotg}\alpha$  possuem período  $\pi$ .

### 1.2.3 Representação geométrica da tangente e outras propriedades

Pretende-se localizar numa reta de números reais os valores relacionados à tangente de um determinado  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Para isso, consideremos a circunferência unitária  $C$  e a reta  $t$  tangente a  $C$  no ponto  $A$  como mostram as figuras 1.3 e 1.4.



Fonte: Autor



Fonte: Autor

Da figura 1.3, sejam  $t \cap \overrightarrow{OB} = \{T\}$  e  $t \cap \overrightarrow{B'O} = \{T'\}$ . Então sendo  $B$  e  $B'$  pontos de  $C$ , e,  $B_x$  e  $B'_x$  suas abscissas, respectivamente, tem-se  $\triangle BB_xO \sim \triangle TAO$  e  $\triangle B'B'_xO \sim \triangle T'AO$ . Logo, se  $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$  são tais que  $E(\alpha) = B$  e  $E(\alpha') = B'$ , quando  $B$  e  $B'$  pertencem ao 1º e ao 3º quadrantes, nesta ordem, tem-se:

1.  $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AT}}{1}$ , isto é,  $\operatorname{tg}\alpha = \overline{AT}$ ;
2.  $\frac{-\operatorname{sen}\alpha'}{-\cos\alpha'} = \frac{\overline{AT'}}{1}$ , isto é,  $\operatorname{tg}\alpha' = \overline{AT'}$ .

E da figura 1.4, de maneira análoga ao caso anterior, verifica-se que sendo  $B$  e  $B'$  pertencente ao 2º e 4º quadrantes, nesta sequência, tem-se:

1.  $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{-\operatorname{cos}\alpha} = \frac{\overline{AT}}{1}$ , isto é,  $\operatorname{tg}\alpha = -\overline{AT}$ ;
2.  $\frac{-\operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{cos}\alpha'} = \frac{\overline{AT'}}{1}$ , isto é,  $\operatorname{tg}\alpha' = -\overline{AT'}$ .

Da análise anterior, observa-se que para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  onde  $\operatorname{tg}\alpha$  está definida, existe  $T \in t$  tal que  $|\operatorname{tg}\alpha| = \overline{AT}$ . Por outro lado, dado  $T \in t$ , existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  de modo que  $|\operatorname{tg}\alpha| = \overline{AT}$ . Ou seja, sendo  $T \in t$ , então  $T(1, \operatorname{tg}\alpha)$ .

Examinando o fato de que  $E(\pi) = E(-\pi)$ , observa-se que sendo  $E(\alpha) = B$  e  $E(-\alpha) = B'$ , então  $B$  e  $B'$  são simétricos com relação ao eixo das abscissas, já que  $|\alpha| = |-\alpha|$  e, além disso,  $|\alpha - \pi| = |\pi - \alpha|$ . A partir daí, teremos as seguintes propriedades:

1.  $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$  e  $\operatorname{cos}\alpha = \operatorname{cos}(-\alpha)$ ;
2.  $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(-\alpha)$  e  $\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg}(-\alpha)$ ;
3.  $\operatorname{sec}\alpha = \operatorname{sec}(-\alpha)$  e  $\operatorname{cosec}\alpha = -\operatorname{cosec}(-\alpha)$

Analisando os pontos  $C$  e  $C'$  tais que  $E(\alpha) = C$  e  $E\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = C'$ , verifica-se que esses são simétricos com relação à reta  $y = x$ . Para melhor compreender, basta observar que dado o ponto  $C_0(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ , as medidas dos arcos  $\widehat{C_0C}$  e  $\widehat{C_0C'}$  são, respectivamente,  $\frac{\pi}{4} + \left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$  e  $-\frac{\pi}{4} - \left|\frac{\pi}{2} - \alpha\right|$  (no sentido anti-horário e horário, nesta sequência). Mas dado  $P(x, y)$  no sistema cartesiano, seu simétrico com relação à reta  $y = x$  é  $P'(y, x)$ . Logo,

1.  $\operatorname{cos}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  e  $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ;
2.  $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  e  $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ;
3.  $\operatorname{sec}\alpha = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$  e  $\operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{sec}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .

#### 1.2.4 Razões trigonométricas circulares da soma e da diferença de argumentos

Pretende-se deduzir as fórmulas para o cálculo das razões trigonométricas da soma e da diferença de dois argumentos, conhecendo as razões trigonométricas de cada argumento.

Tendo em vista as propriedades já conhecidas até então, destas novas que pretende-se encontrar, basta obter uma, e as demais vêm como consequência.

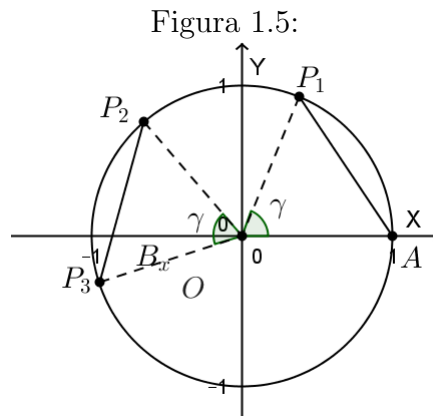
**Proposição 1.2.8.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , vale a seguinte igualdade:*

$$\operatorname{cos}(\beta - \alpha) = \operatorname{cos}\beta \cdot \operatorname{cos}\alpha + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha \quad (1.16)$$

*Demonstração.* Para demonstrar esse resultado, primeiramente, recordemos da geometria analítica que a distância  $d$  entre dois pontos,  $P_1(x_1, y_1)$  e  $P_2(x_2, y_2)$  é:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.17)$$

Sejam os pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  sobre uma circunferência unitária centrada em  $O(0, 0)$  tais que  $E(\gamma) = P_1, E(\alpha) = P_2$  e  $E(\gamma + \alpha) = P_3$  com  $\gamma, \alpha \in \mathbb{R}_+$  (ver figura 1.5). Assim,  $P_1(\cos\gamma, \text{sen}\gamma)$ ;  $P_2(\cos\alpha, \text{sen}\alpha)$ ; e  $P_3[\cos(\gamma + \alpha), \text{sen}(\gamma + \alpha)]$ .



Fonte: Autor

Com isso, os arcos  $\widehat{AP_1}$  e  $\widehat{P_2P_3}$  possuem o mesmo ângulo central, que têm medida  $\gamma$  rad ( $\gamma + \alpha - \alpha = \gamma$ ). Logo, as cordas  $AP_1$  e  $P_2P_3$  possuem a mesma medida. Isto é,

$$d(A, P_1) = d(P_2, P_3) \quad (1.18)$$

Observando as coordenadas dos pontos  $A, P_1, P_2$  e  $P_3$ , das equações 1.17 e 1.18, teremos:

$$\begin{aligned} (\cos\gamma - 1)^2 + (\text{sen}\gamma - 0)^2 &= [\cos(\gamma + \alpha) - \cos\alpha]^2 + [\text{sen}(\gamma + \alpha) - \text{sen}\alpha]^2 \\ 1 + \cos^2\gamma + \text{sen}^2\gamma - 2\cos\gamma &= \cos^2(\gamma + \alpha) + \text{sen}^2(\gamma + \alpha) + \cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha \\ &\quad - 2\cos(\gamma + \alpha).\cos\alpha - 2\text{sen}(\gamma + \alpha).\text{sen}\alpha. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Aplicando a identidade fundamental da trigonometria circular em 1.19, teremos:

$$\begin{aligned} 1 + 1 - 2\cos\gamma &= 1 + 1 - 2.[\cos(\gamma + \alpha).\cos\alpha + \text{sen}(\gamma + \alpha).\text{sen}\alpha] \\ \cos\gamma &= \cos(\gamma + \alpha).\cos\alpha + \text{sen}(\gamma + \alpha).\text{sen}\alpha. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Em 1.20, escrevendo  $\gamma + \alpha = \beta$ , isto é,  $\gamma = \beta - \alpha$ , conclui-se que:

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\beta.\cos\alpha + \text{sen}\beta.\text{sen}\alpha.$$

□



**Corolário 1.2.1.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , então:*

$$\cos(\beta + \alpha) = \cos\beta \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

*Demonstração.* Considere o resultado dado pela proposição 1.2.8; substituindo  $\alpha$  por  $-\alpha$  e considerando os resultados  $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$  e  $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ , obteremos:

$$\begin{aligned}\cos[\beta - (-\alpha)] &= \cos\beta \cdot \cos(-\alpha) + \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}(-\alpha) \\ \cos(\beta + \alpha) &= \cos\beta \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha.\end{aligned}$$

□

**Corolário 1.2.2.** *Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , vale a seguinte igualdade:*

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha - \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha. \quad (1.21)$$

*Demonstração.* Do resultado  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$ , teremos,

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \alpha\right]. \quad (1.22)$$

Aplicando o corolário 1.2.1 em 1.22, obteremos:

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \operatorname{sen}\alpha. \quad (1.23)$$

Novamente, pelo resultado  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$  juntamente com o fato  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ , segue de 1.23 que:

$$\operatorname{sen}(\beta - \alpha) = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha - \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

□

**Corolário 1.2.3.** *Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , teremos:*

$$\operatorname{sen}(\beta + \alpha) = \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

*Demonstração.* Substituindo na fórmula 1.21,  $\alpha$  por  $-\alpha$ , obteremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}[\beta - (-\alpha)] &= \operatorname{sen}\beta \cdot \cos(-\alpha) - \cos\beta \cdot \operatorname{sen}(-\alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta + \alpha) &= \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha + \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha.\end{aligned}$$

□

**Corolário 1.2.4.** *Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então:*

1.  $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\alpha$ ;
2.  $\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos}\alpha$ .

*Demonstração.* Tomemos  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. Mostremos que  $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\alpha$ . Pelo corolário 1.21, temos:

$$\begin{aligned}\text{sen}(\pi - \alpha) &= \text{sen}\pi \cdot \text{cos}\alpha - \text{cos}\pi \cdot \text{sen}\alpha \\ &= 0 \cdot \text{cos}\alpha - (-1) \cdot \text{sen}\alpha \\ &= \text{sen}\alpha.\end{aligned}$$

2. Provemos agora que  $\text{cos}(\pi - \alpha) = -\text{cos}\alpha$ . Segue da proposição 1.2.8, que:

$$\begin{aligned}\text{cos}(\pi - \alpha) &= \text{cos}\pi \cdot \text{cos}\alpha + \text{sen}\pi \cdot \text{sen}\alpha \\ &= (-1) \cdot \text{cos}\alpha + 0 \cdot \text{sen}\alpha \\ &= -\text{cos}\alpha.\end{aligned}$$

□

**Corolário 1.2.5.** *Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi$  e  $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi$  com  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ , então:*

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} \quad (1.24)$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta} \quad (1.25)$$

*Demonstração.* Dado que por definição,

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{sen}(\alpha - \beta)}{\text{cos}(\alpha - \beta)} \quad (1.26)$$

Aplicando, convenientemente, o corolário 1.2.2 e proposição 1.2.8 em 1.26, segue que:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\beta - \text{sen}\beta \cdot \text{cos}\alpha}{\text{cos}\alpha \cdot \text{cos}\beta + \text{sen}\alpha \cdot \text{sen}\beta} \quad (1.27)$$

Dividindo o numerador e denominador do lado esquerdo de 1.27 por  $\text{cos}\alpha \cdot \text{cos}\beta$ , resulta em:

$$\begin{aligned}\text{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} - \frac{\text{sen}\beta}{\text{cos}\beta}}{1 + \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha} \cdot \frac{\text{sen}\beta}{\text{cos}\beta}} \\ \text{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\text{tg}\alpha - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\beta}\end{aligned} \quad (1.28)$$

Aplicando os corolários 1.2.3 e 1.2.1 em 1.25, e procedendo de modo análogo ao caso anterior, obteremos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} \quad (1.29)$$

□

**Corolário 1.2.6.** *Sejam  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $\alpha + \beta \neq k_1\pi$  e  $\alpha - \beta \neq k_2\pi$  com  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ , então:*

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\alpha + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha} \quad (1.30)$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{cotg}\alpha - 1}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha} \quad (1.31)$$

*Demonstração.* Por definição, temos:

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)} \quad (1.32)$$

Aplicando, convenientemente, o corolário 1.2.2 e proposição 1.2.8 no denominador e no numerador, respectivamente, do lado esquerdo de 1.32, segue que:

$$\operatorname{cotg}(\alpha - \beta) = \frac{\cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha} \quad (1.33)$$

Dividindo o numerador e denominador do lado esquerdo de 1.33 por  $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$ , resulta em:

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) &= \frac{\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \cdot \frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} + 1}{\frac{\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta} - \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}} \\ \operatorname{cotg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{cotg}\alpha + 1}{\operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha} \end{aligned} \quad (1.34)$$

Aplicando os corolários 1.2.3 e 1.2.1 em 1.31, e procedendo de modo análogo ao caso anterior, obteremos:

$$\operatorname{cotg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\beta \cdot \operatorname{cotg}\alpha - 1}{\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\alpha} \quad (1.35)$$

□

**Corolário 1.2.7.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , então:*

1.  $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$

$$2. \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$3. \operatorname{cos}\alpha.\operatorname{cos}\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$4. \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2.\operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{cos}\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$5. \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2.\operatorname{cos}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$6. \operatorname{cos}\alpha + \operatorname{cos}\beta = 2.\operatorname{cos}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{cos}\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$7. \operatorname{cos}\alpha - \operatorname{cos}\beta = -2.\operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2}$$

*Demonstração.* Para demonstrar as afirmações de 1 a 3, considere que:

$$\operatorname{cos}\alpha.\operatorname{cos}\beta - \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha + \beta) \quad (1.36)$$

$$\operatorname{cos}\alpha.\operatorname{cos}\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha - \beta) \quad (1.37)$$

$$\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{cos}\beta - \operatorname{cos}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \sin(\alpha - \beta) \quad (1.38)$$

$$\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{cos}\beta + \operatorname{cos}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \sin(\alpha + \beta) \quad (1.39)$$

A partir das identidades dadas de 1.36 a 1.39, teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{cos}\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{cos}\beta &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{cos}\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \\ \operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}\alpha.\operatorname{cos}\beta + \operatorname{cos}\alpha.\operatorname{cos}\beta &= \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \\ \operatorname{cos}\alpha.\operatorname{cos}\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \end{aligned} \quad (1.42)$$

Já os resultados de 4 a 7, para demonstrá-los, primeiramente, consideremos que:

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.43)$$

Daí, pelos corolários 1.2.3, 1.2.2 e 1.2.1, e pela proposição 1.2.8, vem, respectivamente:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{cos}\frac{\alpha - \beta}{2} + \operatorname{cos}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.44)$$

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{cos}\frac{\alpha - \beta}{2} - \operatorname{cos}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.45)$$

$$\operatorname{cos}\alpha = \operatorname{cos}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{cos}\frac{\alpha - \beta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.46)$$

$$\operatorname{cos}\beta = \operatorname{cos}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{cos}\frac{\alpha - \beta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2}.\operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.47)$$

Somando membro a membro 1.44 e 1.45, segue que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} + \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \\ \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}\quad (1.48)$$

De modo análogo, ainda de 1.44 e 1.45, e de 1.46 e 1.47, concluímos que:

$$\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.49)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.50)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (1.51)$$

□

### 1.2.5 Propriedades das razões trigonométricas circulares do argumento duplo e do argumento metade

Neste tópico, o objetivo é apresentar algumas relações trigonométricas circulares que são consequentes dos resultados já apresentados nas proposições e corolários dados até então. Estas relações, que serão mostradas são referentes a razões trigonométricas do argumento metade e do argumento duplo, como são conhecidas. Dessa forma, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sempre que existir a referida razão trigonométrica circular, valem as seguintes relações.

1.  $\operatorname{sen}2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$
2.  $\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$
3.  $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$
4.  $\operatorname{cotg}2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$
5.  $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$
6.  $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$
7.  $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$
8.  $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$

*Demonstração.* Para demonstrar as relações 2 e 1, basta considerar os corolários 1.2.1 e 1.2.3, respectivamente, e substituir  $\beta$  por  $\alpha$ . Quanto às propriedades 3 e 4, aplica-se os corolários 1.2.5 (igualdade 1.25) e 1.2.6 (igualdade 1.31), nesta ordem, substituindo  $\beta$  por  $\alpha$ .

Da propriedade fundamental da trigonometria circular, temos:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = 1. \quad (1.52)$$

Por outro lado, da propriedade 2, temos:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha. \quad (1.53)$$

Somando as equações, membro a membro, 1.52 e 1.53, obteremos:

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \text{ isto é, } \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (1.54)$$

Subtraindo a equação 1.53 da equação 1.52, teremos:

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \text{ isto é, } \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}. \quad (1.55)$$

E das propriedades 5 e 6, ou simplesmente dos dois últimos resultados, teremos:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad (1.56)$$

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \quad (1.57)$$

□

### 1.3 Funções trigonométricas circulares

O objetivo nesta seção é apresentar um estudo das funções trigonométricas circulares canônicas de domínio  $\mathbb{R}$  ou o maior subconjunto possível de  $\mathbb{R}$ . Nesse sentido, a função trigonométrica circular canônica aqui tratada é definida como sendo a função  $f$  formada pelo conjunto dos pares ordenados  $(x, f(x))$ , onde  $x, f(x) \in \mathbb{R}$  e  $f(x)$  é uma razão trigonométrica circular de  $x$ . Serão omitidos os termos “trigonométrica” e “circular”, como por exemplo, ao tratar a “função seno”, estará se referindo à “função trigonométrica seno circular”.

### 1.3.1 Estudo da função seno

Como foi visto na seção 1.2, da construção da trigonometria circular, temos que a razão trigonométrica  $\text{sen}\alpha$  ficou definida para quaisquer que seja o  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dessa forma faz sentido dar a definição 1.3.1.

**Definição 1.3.1.** A função seno  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{sen}x$$

**Proposição 1.3.1.** Sendo  $f$  a função dada na definição 1.3.1, então:

1.  $f$  é uma função ímpar;
2. a função é periódica de período  $2\pi$ ;
3. a imagem de  $f$  é  $\text{Im}(f) = [-1, 1]$ .

*Demonstração.* Seja  $f$  a função seno, então, da definição 1.3.1, dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \text{sen}x$ .

1.  $f$  é ímpar. Devemos mostrar que para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

Observe que, dado  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(-x) = \text{sen}(-x). \tag{1.58}$$

Por outro lado, na subseção 1.2.3, vimos que, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sen}\alpha = -\text{sen}(-\alpha)$ . Assim, dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sen}(-x) = -\text{sen}x$ . Segue deste fato e de 1.58 que:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\text{sen}x \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é ímpar.

2.  $f$  é periódica de período  $2\pi$ . Devemos mostrar que para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x+2\pi) = f(x)$ .

Por definição, temos:

$$f(x+2\pi) = \text{sen}(x+2\pi). \tag{1.59}$$

Além disso, na subseção 1.2.1, foi visto que dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\text{sen}(\alpha+2\pi) = \text{sen}\alpha$ . Segue deste resultado e de 1.59, que:

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \text{sen}x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é uma função periódica cujo período é  $2\pi$ .

3.  $Im(f) = [-1, 1]$ . Devemos mostrar que:

*i)*  $-1 \leq f(x) \leq 1$ . Provemos que, dado  $x \in \mathbb{R}$ , então  $-1 \leq f(x) \leq 1$ . Da definição de seno, apresentada na subseção 1.2.1, viu-se que dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se  $-1 \leq \text{sen}\alpha \leq 1$ . Segue deste fato que para cada  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$-1 \leq \text{sen}x \leq 1. \quad (1.60)$$

Da definição 1.3.1 e de 1.60, temos:

$$-1 \leq f(x) \leq 1.$$

*ii)* dado  $y \in [-1, 1]$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ . Da proposição 1.2.2, se  $y \in [-1, 1]$ , então existe  $x \in \mathbb{R}$  com  $\text{sen}x = y$ , isto é,  $f(x) = y$ . Portanto, de *i)* e de *ii)*, a imagem de  $f$  é  $Im(f) = [-1, 1]$ .

□

### 1.3.2 Estudo da função cosseno

Na trigonometria Circular, como se viu na seção 1.2 a razão trigonométrica  $\text{coss}\alpha$  foi definida para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Assim, da mesma forma que foi definida a função seno, será definida a função cosseno.

**Definição 1.3.2.** A função cosseno  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \text{coss}x$$

.

**Proposição 1.3.2.** Seja  $f$  a função dada na definição 1.3.2, então:

1.  $f$  é uma função par;
2.  $f$  é uma função periódica de período  $2\pi$ ;
3. e a imagem de  $f$  é  $Im(f) = [-1, 1]$ .

*Demonstração.* Seja  $f$  a função cosseno, então, da definição 1.3.2, dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \text{coss}x$ .

1.  $f$  é par. Devemos mostrar que, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = f(x)$ .

Observe que, dado  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(-x) = \text{coss}(-x). \quad (1.61)$$



Por outro lado, na subseção 1.2.3, vimos que, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ . Assim, para cada  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se  $\cos(-x) = \cos x$ . Segue deste fato e de 1.61 que:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é par.

2.  $f$  é periódica de período  $2\pi$ . Devemos provar que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Por definição, temos:

$$f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi). \quad (1.62)$$

Além disso, na subseção 1.2.1, foi visto que, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$ . Segue deste resultado e de 1.62, que:

$$\begin{aligned} f(x + 2\pi) &= \cos x \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é uma função periódica cujo período é  $2\pi$ .

3. Para mostrar que a imagem de  $f$  é  $Im(f) = [-1, 1]$ , devemos provar que:
- i)* dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq f(x) \leq 1$ . Na subseção 1.2.1, viu-se que para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se  $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ . Segue deste fato que, dado  $x \in \mathbb{R}$ , então:

$$-1 \leq \cos x \leq 1. \quad (1.63)$$

Da definição 1.3.2 e de 1.63, temos:

$$-1 \leq f(x) \leq 1.$$

- ii)* Dado  $y \in [-1, 1]$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ . Da proposição 1.2.3, dado  $y \in [-1, 1]$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cos x = y$ , isto é,  $f(x) = y$ . Portanto, de *i)* e de *ii)*, a imagem de  $f$  é  $Im(f) = [-1, 1]$ .

□

### 1.3.3 Estudo da função tangente

Seja  $A = \{w \in \mathbb{R} : w \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \forall k \in \mathbb{Z}\}$ . Da definição de cosseno, temos que para cada  $\alpha \in A$ ,  $\cos\alpha \neq 0$ . Isto é, dado  $\alpha \in A$ , então existe  $\operatorname{tg}\alpha$ . A partir daí, motivou-se a definição dada em 1.3.3.

**Definição 1.3.3.** A função tangente  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$\forall x \in A, f(x) = \operatorname{tg}x$$

**Proposição 1.3.3.** A função  $f$  dada na definição 1.3.3 é tal que:

1.  $f$  é ímpar;
2.  $f$  é sobrejetiva;
3.  $f$  é periódica de período  $\pi$ ;
4. dado  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $f$  é crescente no intervalo  $I = (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi)$ .

*Demonstração.* Seja a função  $f$  dada na definição 1.3.3. Pela definição de tangente,  $f(x)$  pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x} \quad (1.64)$$

1.  $f$  é ímpar. Precisa-se provar que dado  $x \in A$ ,  $f(-x) = -f(x)$ . Tomemos  $x \in A$ . Daí, de 1.64

$$f(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\operatorname{cos}(-x)} \quad (1.65)$$

Visto que a função seno é ímpar,  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x$ ; e a função cosseno é par,  $\operatorname{cos}(-x) = \operatorname{cos}x$ . Assim, de 1.65, temos:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{cos}x} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é ímpar.

2.  $f$  é sobrejetiva. Devemos provar que para cada  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Da proposição 1.2.4, dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  de modo que  $\operatorname{tg}x = y$ , isto é,

$$f(x) = y.$$

3.  $f$  é periódica de período  $\pi$ . Basta mostrar que, dado  $x \in A$ ,  $f(x + \pi) = f(x)$ . Observe que, da subseção 1.2.2, para cada  $x \in A$ ,

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}x,$$

ou seja,

$$f(x + \pi) = f(x).$$

4.  $f$  é crescente no intervalo  $I$ . Basta mostrar que dados  $x_1, x_2 \in I$  com  $x_1 < x_2$ ,  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Tomemos  $x_1, x_2 \in I$  tais que  $x_1 < x_2$ . Daí, de 1.64,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{\operatorname{sen}x_1}{\operatorname{cos}x_1} - \frac{\operatorname{sen}x_2}{\operatorname{cos}x_2} \\ &= \frac{\operatorname{sen}x_1 \cdot \operatorname{cos}x_2 - \operatorname{sen}x_2 \cdot \operatorname{cos}x_1}{\operatorname{cos}x_1 \cdot \operatorname{cos}x_2} \end{aligned} \quad (1.66)$$

Pelo corolário 1.2.2, segue de 1.77 que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\operatorname{sen}(x_1 - x_2)}{\operatorname{cos}x_1 \cdot \operatorname{cos}x_2} \quad (1.67)$$

O fato de que  $x_1, x_2 \in I$ , implica que existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$x_1 = a + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \text{e} \quad x_2 = b + \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \text{ onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, pelo corolário 1.2.1 e considerando que  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$ , teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}x_1 &= \operatorname{cosa} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= -\operatorname{sena} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \end{aligned} \quad (1.68)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}x_2 &= \operatorname{cosb} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \operatorname{senb} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= -\operatorname{senb} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right). \end{aligned} \quad (1.69)$$

De 1.68 e 1.69, e do fato  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1$ , teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}x_1 \cdot \operatorname{cos}x_2 &= \operatorname{sena} \cdot \operatorname{senb} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \\ &= \operatorname{sena} \cdot \operatorname{senb} \end{aligned} \quad (1.70)$$

Por outro lado, do fato  $\frac{\pi}{2} + k\pi < x_1 < x_2 < \frac{3\pi}{2} + k\pi$ , teremos:

$$0 < a < b < \pi, \quad \text{isto é,} \quad -\pi < a - b < 0.$$

De  $0 < a < b < \pi$ , segue que:

$$\operatorname{sena} > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{senb} > 0,$$

isto é,

$$\operatorname{sen}a \cdot \operatorname{sen}b > 0 \quad (1.71)$$

Daí, de 1.70 e de 1.71, teremos:

$$\operatorname{cos}x_1 \cdot \operatorname{cos}x_2 > 0. \quad (1.72)$$

De  $-\pi < a - b < 0$ , e considerando que  $x_1 - x_2 = a - b$ , teremos:

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) < 0. \quad (1.73)$$

Logo, de 1.72 e de 1.73,

$$\frac{\operatorname{sen}(x_1 - x_2)}{\operatorname{cos}x_1 \cdot \operatorname{cos}x_2} < 0 \quad (1.74)$$

Portanto, de 1.67 e de 1.74, cocluimos que:

$$f(x_1) - f(x_2) < 0,$$

isto é,

$$f(x_1) < f(x_2).$$

□

### 1.3.4 Estudo da função cotangente

Da definição de seno, tem-se que  $\operatorname{sen}\alpha = 0$  se, e somente se,  $\alpha = k\pi$ , onde  $k$  é um inteiro dado. A partir daí e da definição de cotangente, viu-se na subseção 1.2.1 que sendo  $A = \{w \in \mathbb{R} : w \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ , para cada  $\alpha \in A$ , existe  $\operatorname{cotg}\alpha$ . Consequentemente, faz sentido a definição da dada a seguir para a função cotangente, tomando  $A$  como domínio.

**Definição 1.3.4.** *A função cotangente  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:*

$$\forall x \in A, f(x) = \operatorname{cotg}x$$

.

**Proposição 1.3.4.** *Seja  $f$  a função cotangente, dada pela definição 1.3.4, então:*

1.  $f$  é uma função ímpar;
2. a função  $f$  é sobrejetiva;

3.  $f$  é periódica de período  $\pi$ ;

4. dado  $k \in \mathbb{Z}$ , então  $f$  é decrescente no intervalo  $I = (k\pi, (k+1)\pi)$ .

*Demonstração.* Seja a função  $f$  dada na definição 1.3.4. Pela definição de cotangente,  $f(x)$  pode ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad (1.75)$$

1.  $f$  é ímpar. Basta provar que para cada  $x \in A$ ,  $f(-x) = -f(x)$ . Tomemos  $x \in A$ . Daí, de 1.75

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{\operatorname{sen}(-x)} \quad (1.76)$$

Visto que a função seno é ímpar,  $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ ; e a função cosseno é par,  $\cos(-x) = \cos x$ . Assim, de 1.76, teremos:

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Logo,  $f$  é ímpar.

2.  $f$  é sobrejetiva. É suficiente provar que para cada  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . Da proposição 1.2.5, dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  de modo que  $\cotg x = y$ , isto é,

$$f(x) = y.$$

3.  $f$  é periódica de período  $\pi$ . Basta mostrar que, dado  $x \in A$ , então  $f(x + \pi) = f(x)$ . Observe que, da subseção 1.2.2, para cada  $x \in A$ ,

$$\cotg(x + \pi) = \cotg x,$$

ou seja,

$$f(x + \pi) = f(x).$$

4.  $f$  é decrescente no intervalo  $I$ . Basta provar que para quaisquer  $x_1, x_2 \in I$  tais que  $x_1 < x_2$ ,  $f(x_1) > f(x_2)$ .

Tomemos  $x_1, x_2 \in I$  de modo que  $x_1 < x_2$ . Daí, de 1.75,

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{\cos x_1}{\operatorname{sen} x_1} - \frac{\cos x_2}{\operatorname{sen} x_2} \\ &= \frac{\cos x_1 \cdot \operatorname{sen} x_2 - \cos x_2 \cdot \operatorname{sen} x_1}{\operatorname{sen} x_1 \cdot \operatorname{sen} x_2} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Pelo corolário 1.2.2, segue de 1.77 que:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{\operatorname{sen}(x_2 - x_1)}{\operatorname{sen} x_1 \cdot \operatorname{sen} x_2} \quad (1.78)$$

O fato de que  $x_1, x_2 \in I$ , temos que existem  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que

$$x_1 = a + k\pi \quad \text{e} \quad x_2 = b + k\pi, \text{ onde } k \in \mathbb{Z}.$$

Logo, pelo corolário 1.2.1 e considerando que  $\operatorname{sen}(k\pi) = 0$ , teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x_1 &= \operatorname{sen} a \cdot \cos(k\pi) + \cos a \cdot \operatorname{sen}(k\pi) \\ &= \operatorname{sen} a \cdot \cos(k\pi) \end{aligned} \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x_2 &= \operatorname{sen} b \cdot \cos(k\pi) + \cos b \cdot \operatorname{sen}(k\pi) \\ &= \operatorname{sen} b \cdot \cos(k\pi) \end{aligned} \quad (1.80)$$

De 1.79 e 1.80, e do fato  $\cos(k\pi) = \pm 1$ , teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x_1 \cdot \operatorname{sen} x_2 &= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos^2(k\pi) \\ &= \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \end{aligned} \quad (1.81)$$

Por outro lado, do fato  $k\pi < x_1 < x_2 < (k+1)\pi$ , temos:

$$0 < a < b < \pi, \quad \text{isto é,} \quad 0 < b - a < \pi.$$

De  $0 < a < b < \pi$ , segue que:

$$\operatorname{sen} a > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} b > 0,$$

isto é,

$$\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b > 0 \quad (1.82)$$

Daí, de 1.81 e de 1.82, teremos:

$$\operatorname{sen} x_1 \cdot \operatorname{sen} x_2 > 0. \quad (1.83)$$

De  $0 < b - a < \pi$ , e considerando que  $x_2 - x_1 = b - a$ , teremos:

$$\text{sen}(x_2 - x_1) > 0. \quad (1.84)$$

Logo, de 1.83 e de 1.84,

$$\frac{\text{sen}(x_2 - x_1)}{\text{sen}x_1 \cdot \text{sen}x_2} > 0 \quad (1.85)$$

Portanto, de 1.78 e de 1.85, concluímos que:

$$f(x_1) - f(x_2) > 0,$$

isto é,

$$f(x_1) > f(x_2).$$

□

### 1.3.5 Estudo da função secante

Seja  $A = \{w \in \mathbb{R} : w \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ . Da definição de secante, tem-se que para cada  $\alpha \in A$ , existe  $\text{sec}\alpha$ , um vez que sendo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\cos\alpha \neq 0$  se, e somente se  $\alpha \in A$ . Dessa forma, pode-se dar a seguinte definição para a função secante, determinando o conjunto  $A$  como domínio.

**Definição 1.3.5.** A função secante  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in A, f(x) = \text{sec}x$$

**Proposição 1.3.5.** Seja  $f$  a função secante, dada pela definição 1.3.5, então:

1.  $f$  é uma função par;
2. a imagem de  $f$  é  $\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ;
3.  $f$  é periódica de período  $2\pi$ .

*Demonstração.* Seja  $f$  a função secante, dada pela definição 1.3.5. Então pela definição de secante,  $f(x)$  pode ser escrita sob a forma:

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}. \quad (1.86)$$

1. Para provar que  $f$  é par, basta mostrar que para cada  $x \in A$ ,

$$f(-x) = f(x).$$

Observe que, de 1.86,

$$f(-x) = \frac{1}{\cos(-x)}. \quad (1.87)$$

Além disso, a função cosseno é par, isto é: para cada  $x \in \mathbb{R}$  dado,

$$\cos(-x) = \cos x. \quad (1.88)$$

Logo, de 1.87 e de 1.88, dado  $x$  no domínio de  $f$ ,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1}{\cos x} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

2. Para provar que a imagem de  $f$  é  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ , basta mostrar que dado  $x \in A$ :

*i)*  $f(x) \geq 1$  ou  $f(x) \leq -1$ .

Como já foi visto, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , isto é:

$$-1 \leq \cos x \leq 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \cos x \leq 1.$$

Por outro lado,  $\cos x = 0$  se, e somente se,  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\cos x = -1$  se, e somente se,  $x = k\pi$  e  $k$  é um inteiro ímpar; e  $\cos x = 1$  se, e somente se,  $x = k\pi$  e  $k$  é um inteiro par. Destes fatos, teremos que dado  $x \in A$ , então:

$$-1 \leq \cos x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \cos x \leq 1.$$

De  $-1 \leq \cos x < 0$ , teremos:

$$\frac{1}{\cos x} \leq -1. \quad (1.89)$$

De  $0 < \cos x \leq 1$ , teremos:

$$\frac{1}{\cos x} \geq 1. \quad (1.90)$$

Aplicando 1.86 em 1.89 e em 1.90, conclui-se, respectivamente, que, dado  $x \in A$ ,  $f(x) \leq -1$  ou  $f(x) \geq 1$ .



ii) e dado  $y \leq -1$  ou  $y \geq 1$ , existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ , isto é,  $\sec x = y$ .

Tomemos  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $|y| \geq 1$ . Logo, pela proposição 1.2.6, existe  $x \in \mathbb{R}$  de forma que:

$$\sec x = y.$$

3. Tomemos  $x \in A$ . Observe que a função cosseno é periódica de período  $2\pi$ . Daí,

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x. \quad (1.91)$$

Segue de 1.86 e de 1.91 que  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Portanto,  $f$  é periódica de período  $2\pi$ .

□

### 1.3.6 Estudo da função cossecante

Tem-se, da definição de cossecante, que dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe  $\cossec \alpha$  se, e somente se,  $\alpha \in A$  onde  $A = \{w \in \mathbb{R} : w \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ , já que, como foi visto,  $\sen \alpha \neq 0$  se, e somente se,  $\alpha \in A$ . Daí, observando tais restrições, define-se a função cossecante, tomando o conjunto  $A$  como domínio.

**Definição 1.3.6.** A função cossecante  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in A, f(x) = \cossec x$$

.

**Proposição 1.3.6.** Seja  $f$  a função cossecante, dada pela definição 1.3.6, então:

1.  $f$  é ímpar;
2.  $f$  é uma função periódica de período  $2\pi$ ;
3. a imagem de  $f$  é  $Im(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ .

*Demonstração.* Seja  $f$  a função cossecante, dada pela definição 1.3.6. Então pela definição de cossecante,  $f(x)$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{1}{\sen x}. \quad (1.92)$$

1. Para mostrar que  $f$  é ímpar, basta provar que para cada  $x \in A$ ,

$$f(-x) = -f(x).$$

Veja que, de 1.92,

$$f(-x) = \frac{1}{\text{sen}(-x)}. \quad (1.93)$$

Além disso, a função seno é ímpar, isto é: dado  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x. \quad (1.94)$$

Portanto, de 1.93 e de 1.94, para cada  $x \in A$ ,

$$\begin{aligned} f(-x) &= -\frac{1}{\text{sen}x} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

2. Tomemos  $x \in A$ . Observe que a função seno é periódica de período  $2\pi$ . Assim,

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}x. \quad (1.95)$$

Segue de 1.92 e de 1.95 que  $f(x + 2\pi) = f(x)$ . Portanto,  $f$  é periódica de período  $2\pi$ .

3. Para mostrar que a imagem de  $f$  é  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ , basta provar que para cada  $x \in A$ :

*i)*  $f(x) \geq 1$  ou  $f(x) \leq -1$ .

Como já foi visto, dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$ , isto é:

$$-1 \leq \text{sen}x \leq 0 \quad \text{ou} \quad 0 \leq \text{sen}x \leq 1.$$

Por outro lado,  $\text{sen}x = 0$  se, e somente se,  $x = k\pi$  e  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\text{sen}x = -1$  se, e somente se,  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  e  $k$  é um inteiro ímpar; e  $\text{sen}x = 1$  se, e somente se,  $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$  e  $k$  é um inteiro par. Destes fatos, teremos que para cada  $x \in A$ :

$$-1 \leq \text{sen}x < 0 \quad \text{ou} \quad 0 < \text{sen}x \leq 1.$$

De  $-1 \leq \text{sen}x < 0$ , teremos:

$$\frac{1}{\text{sen}x} \leq -1. \quad (1.96)$$

De  $0 < \text{sen}x \leq 1$ , teremos:

$$\frac{1}{\text{sen}x} \geq 1. \quad (1.97)$$

Aplicando 1.92 em 1.96 e em 1.97, conclui-se, respectivamente, que, dado  $x \in A$ ,

$$f(x) \leq -1 \text{ ou } f(x) \geq 1.$$

*ii)* e dado  $y \leq -1$  ou  $y \geq 1$ , existe  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ , isto é,  $\operatorname{cosec} x = y$ .  
Tomemos  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $|y| \geq 1$ . Logo, pela proposição 1.2.7, existe  $x \in \mathbb{R}$  de forma que:

$$\operatorname{cosec} x = y.$$

□

## Capítulo 2

# TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA

Neste capítulo, como já foi mencionado, será feito um tratamento da trigonometria hiperbólica mostrando uma das maneiras como ela pode ser construída. Mas a trigonometria hiperbólica foi tema de estudos de matemáticos do século XVII, por isso é apresentado uma breve histórico a respeito, o que será feito a seguir.

### 2.1 Um breve histórico sobre a trigonometria hiperbólica

Para Robinson (2005), a trigonometria hiperbólica começou a ser estudada formalmente por volta do século 18 por Johann Heinrich Lambert (1728-1777), porém estudos envolvendo suas aplicações foram trabalhados quase 2 séculos antes, onde uma de suas mais importantes aplicações é creditada ao “geógrafo flamengo Gerhard Kremer (ou Krämer) (1512-1594)” mais conhecido como “Gerhardus Mercator”, que, em 1569, publicou um mapa chamado projeções de Mercator. A partir daí, a navegação teve um grande avanço. Mas nos trabalhos de Mercator não estava explícita a trigonometria hiperbólica, sendo esta evidenciada tempos depois por aqueles que deram continuidade aos trabalhos de Mercator, e um destes seguidores pode-se citar Christoph Gudermann (1798-1852), que, em 1832, publicou um importante artigo a respeito das equações<sup>1</sup> de Mercator empregando a notação *gd* para as chamadas funções guder manniana.

O estudo formal da trigonometria hiperbólica, segundo Maor (2008), teve inspiração no problema “a corrente suspença”, ou problema da “catenária”, que em “notação moderna tem como resultado final a seguinte equação  $y = (e^{ax} + e^{-ax})/2a$ ”. E Vincenzo

---

<sup>1</sup>Essas equações relacionam a trigonometria circular com a trigonometria hiperbólica

Riccati (1707 - 1775) é considerado o inventor da trigonometria hiperbólica, pois ele foi primeiro a notar as semelhanças existentes entre  $(e^x + e^{-x})/2$  e  $(e^x - e^{-x})/2$  com as funções Trigonométricas circulares  $\cos x$  e  $\sin x$ , respectivamente. Além disso, provou que  $[(e^x + e^{-x})/2]^2 - [(e^x - e^{-x})/2]^2 = 1$ . “Ele introduziu as notações  $\text{Ch}x$  e  $\text{Sh}x$  e excreveu as seguintes identidades” (MAOR, 2008, p. 39):

$$\text{Ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \text{Sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2.1)$$

Robinson, afirma que o objetivo de Riccati era obter as raízes de determinados tipos de equações, especialmente as cúbicas. E dois anos depois, Daviet de Foncenex (1734 - 1799) estabeleceu uma conexão entre funções trigonométricas circulares e funções trigonométricas hiperbólicas fazendo uso de  $\sqrt{-1}$ . Para tal feito, Foncenex embasou-se nos trabalhos de De Moivre e Euler<sup>2</sup>. De fato, Euler deu contribuição para tal feito, pois esse matemático juntamente com sua ousadia com as séries de potência<sup>3</sup> de  $e^x$ , de  $\cos x$  e de  $\sin x$ , séries bem conhecidas na época, chegou às seguintes identidades (MAOR, 2008, p. 39):

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

## 2.2 Definindo o argumento hiperbólico

Antes de definir as razões trigonométricas hiperbólicas, primeiramente faz-se necessário a definição do argumento hiperbólico, cuja medida denotaremos por  $\alpha$ . Para tanto, é feita uma analogia ao processo de definição do argumento de medida  $\alpha$  na trigonometria circular.

Dada uma circunferência de raio medindo  $r$ , por definição, um arco comprimento  $l$  dessa circunferência possui medida  $\alpha$  radianos com  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se  $\alpha = \frac{l}{r}$ . Daí, numa circunferência unitária (de raio 1) temos  $\alpha = l$ , como vimos capítulo 1. Por outro lado, foi visto também que o comprimento dessa circunferência é  $2\pi$ . Além disso, a área de um setor circular é diretamente proporcional ao comprimento do arco referente a esse setor, conseqüentemente, diretamente proporcional à medida deste arco. Com isso, localizando a circunferência unitária num sistema cartesiano  $XOY$  com centro em  $O(0, 0)$ , fixando o ponto  $A(1, 0)$ , tomando  $B$ , um ponto sobre a circunferência e denotando a área do setor circular  $AOB$  por  $A_{(AOB)}$ , sendo  $\alpha$  radianos a medida do ângulo  $\widehat{AOB}$ , temos:

$$\begin{aligned} A_{(AOB)} &\longleftrightarrow \alpha rad \\ \pi &\longleftrightarrow 2\pi rad \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>2</sup>Leonhard Euler, matemático suíço que viveu de 1707 a 1783 (BOYER, MERZERBACH, 2012, p. 303).

<sup>3</sup>Veja séries de potências em Stewart (2009, v.2, p. 752 - 64).

Logo, de 2.2

$$\alpha = 2.A_{(AOB)} \quad (2.3)$$

Motivado pela igualdade 2.3, daremos a seguinte definição para o argumento hiperbólico:

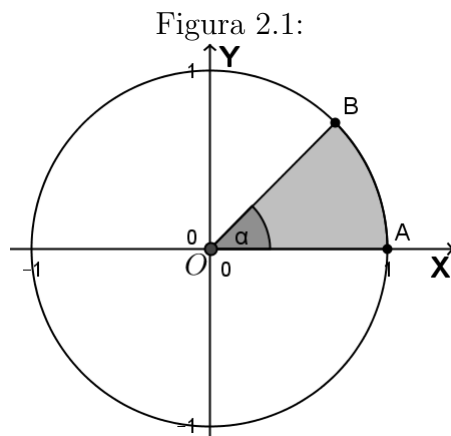
**Definição 2.2.1.** *Sejam  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$  e  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 - y^2 = 1, x \geq 0\}$ , definimos o argumento hiperbólico (ou ângulo hiperbólico) pela função  $\alpha : H \mapsto \mathbb{R}$  tal que para todo ponto  $B(x, y) \in H$ , temos:*

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 2A_{[OA(x,y)]} & \text{se } y \geq 0 \\ -2A_{[OA(x,y)]} & \text{se } y < 0 \end{cases}$$

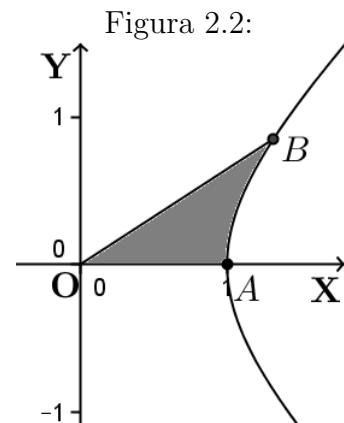
onde  $A_{[OA(x,y)]}$  é a medida da área do setor  $OAB$  limitado por  $OA$ ,  $OB$  e  $H$ .

Observa-se que enquanto na trigonometria circular o argumento  $\alpha$  é definido de tal forma que um ponto  $B$  sobre a circunferência unitária é função de  $\alpha$ , na trigonometria hiperbólica ocorre o inverso, ou seja, nessa nova trigonometria o argumento  $\alpha$  é uma função do ponto  $B$  sobre o ramo hiperbólico considerado na definição 2.2.1.

Quando  $B = A$ ,  $\alpha = 0$ . Veja os gráficos a seguir, onde a figura 2.1 mostra o setor angular circular, e a figura 2.2, um setor angular hiperbólico.



Fonte: Autor



Fonte: Autor

Portanto, dessa forma, a medida do “ângulo hiperbólico” está bem definida, uma vez que cada setor hiperbólico  $OAB$  possui uma única medida de área.

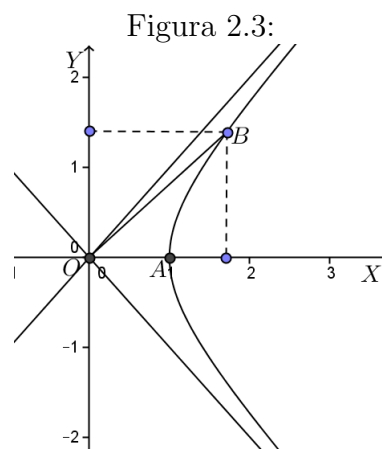
Dado que o ramo hiperbólico considerado na figura 2.2 é uma curva simétrica com relação ao eixo  $OX$ , a função  $\alpha$  possui a seguinte propriedade: para todo  $y \in \mathbb{R}$  tal que o ponto  $B(x, y) \in D(\alpha)$ ,  $\alpha(x, y) = -\alpha(x, -y)$ .

## 2.3 Definição das razões trigonométricas hiperbólicas

Definiremos a seguir as razões trigonométricas hiperbólicas do argumento  $\alpha$  dado na definição 2.2.1.

### 2.3.1 Definição do seno, do cosseno e da tangente hiperbólicos

Para definirmos as razões trigonométricas hiperbólicas, consideremos o ramo direito da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$  e um ponto  $B$  sobre esse ramo da hipérbole mostrados na figura 2.3.



Fonte: Autor

Definimos as razões trigonométricas seno hiperbólico, cosseno hiperbólico e tangente hiperbólica ( $\sinh$ ,  $\cosh$  e  $\tanh$ , como se segue) da seguinte forma: Dado o argumento  $\alpha$ , definido através da área do setor hiperbólico  $AOB$  (ver figura 2.3), então:

$$\begin{aligned} \cosh \alpha &= \text{abscissa de } B; \\ \sinh \alpha &= \text{ordenada de } B; \\ \tanh \alpha &= \frac{\sinh \alpha}{\cosh \alpha} \quad (\cosh \alpha \neq 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

**Proposição 2.3.1.** *Segue da definição de seno e cosseno hiperbólicos que:*

1.  $\cosh \alpha = 1$  e  $\sinh \alpha = 0$  se, e somente se,  $\alpha = 0$ ;
2. se  $\alpha > 0$ , então  $\sinh \alpha > 0$ , e se  $\alpha < 0$ , então  $\sinh \alpha < 0$ ;
3. para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\cosh \alpha \geq 1$ ;
4. para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\cosh \alpha = \cosh(-\alpha)$  e  $\sinh \alpha = -\sinh(-\alpha)$ .

*Demonstração.* Tomemos  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então  $\alpha = \alpha(x, y)$ , onde  $B(x, y)$  é um ponto do ramo direito da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$ .

1. Provemos que  $\cosh\alpha = 1$  e  $\sinh\alpha = 0$ . Dado que por definição,  $\alpha(x, y) = 0$  se, e somente se,  $x = 1$  e  $y = 0$ , segue da definição de seno e cosseno hiperbólicos, que  $\cosh\alpha = 1$  e  $\sinh\alpha = 0$  se, e somente se,  $\alpha = 0$ .
2. *i)* Mostremos que se  $\alpha > 0$ , então  $\sinh\alpha > 0$ . Tomemos  $\alpha > 0$ . Logo, da definição de  $\alpha$ , temos que  $\alpha(x, y)$  é tal que  $y > 0$ . Assim, da definição de seno hiperbólico, segue que  $\sinh\alpha > 0$ .  
*ii)* Provemos que se  $\alpha < 0$ , então  $\sinh\alpha < 0$ . Tomemos  $\alpha < 0$ . Logo, da definição de  $\alpha$ , temos que  $\alpha(x, y)$  é tal que  $y < 0$ . Assim, da definição de seno hiperbólico, segue que  $\sinh\alpha < 0$ .
3.  $\cosh\alpha \geq 1$ . Por definição, temos que dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , então  $\alpha(x, y)$  é tal que  $x \geq 1$ . Segue deste fato e da definição de cosseno hiperbólico que  $\cosh\alpha \geq 1$ .
4. Como foi visto na seção anterior, para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha(x, y) = -\alpha(x, -y)$ . Assim, temos:
  - i)*  $\cosh(-\alpha) = \cosh\alpha$ . De fato, pois sendo, por definição,  $\cosh\alpha = x$ , então  $\cosh(-\alpha) = x$ ;
  - ii)*  $\sinh(-\alpha) = -\sinh\alpha$ . De fato, pois sendo, por definição,  $\sinh\alpha = y$ , então  $\sinh(-\alpha) = -y$ .

□

Além das três razões trigonométricas hiperbólicas definidas e mostradas anteriormente, define-se outras três, no caso, a cossecante, a secante e a cotangente hiperbólicas (cossech, sech e cotgh), nesta ordem, pelo inverso multiplicativo do seno, do cosseno e da tangente hiperbólicos, respectivamente. Ou seja:

$$\begin{aligned} \cotgh\alpha &= \frac{\cosh}{\sinh} \text{ se } \alpha \neq 0 \\ \text{sech}\alpha &= \frac{1}{\cosh\alpha} \\ \text{cossech}\alpha &= \frac{1}{\sinh\alpha} \text{ se } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

A partir da definição, constata-se que dessas três últimas razões trigonométricas hiperbólicas, a cossech $\alpha$  e a cotgh $\alpha$  estão definidas, se  $\alpha \neq 0$ , enquanto que a sech $\alpha$  está definida para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . De modo geral, as propriedades da cossecante, da secante e da cotangente hiperbólicas são analisadas a partir das propriedades do seno, do cosseno e da tangente hiperbólicos, respectivamente.



### 2.3.2 Identidade fundamental da trigonometria hiperbólica

Dado que o ponto  $B(x, y)$  pertence à hipébole  $x^2 - y^2 = 1$ , temos, imediatamente da definição, que:

$$\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1 \quad (2.4)$$

Como se nota, ao passo em que a identidade fundamental da trigonometria circular temos a soma dos quadrados das razões trigonométricas  $\cos$  e  $\sin$ , na trigonometria hiperbólica sua identidade fundamental é dada pela diferença dos quadrados das razões trigonométricas  $\cosh$  e  $\sinh$ , nesta ordem.

De posse da igualdade dada em 2.4, conclui-se que para cada  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $\cosh \alpha > |\sinh \alpha|$ . Com esse resultado, segue da definição de tangente hiperbólica, que  $|\operatorname{tgh} \alpha| < 1$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Como consequência desta propriedade tem-se os resultados a seguir, que podem ser verificados facilmente:

1.  $\operatorname{sech}^2 \alpha = 1 - \operatorname{tgh}^2 \alpha$
2.  $\operatorname{cossech}^2 \alpha = \operatorname{cotgh}^2 \alpha - 1$

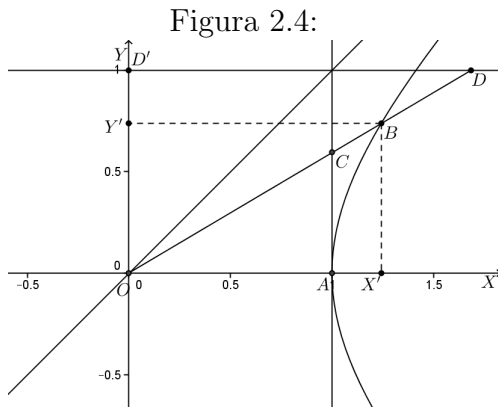
### 2.3.3 Interpretação geométrica das razões trigonométricas hiperbólicas

Tem-se neste tópico o objetivo de localizar numa reta, ou melhor, fazer uma correspondência entre o argumento hiperbólico  $\alpha$  e um ponto da reta que represente a razão trigonométrica deste argumento. Ressalta-se que o seno e o cosseno hiperbólico, por definição, já estão localizados geometricamente no eixo  $OY$  e  $OX$ , respectivamente. A representação geométrica de cada razão trigonométrica será dada em dois casos: quando o argumento for menor do que 0 e quando for não negativo.

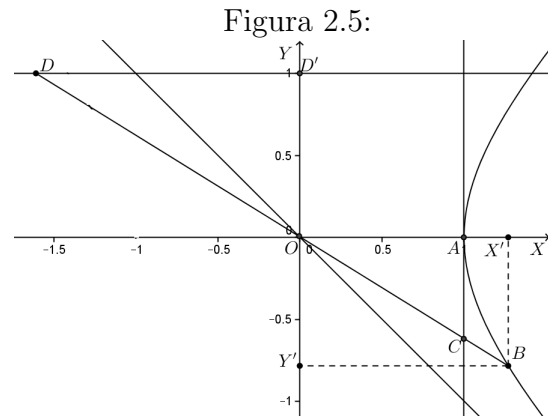
#### **Representação geométrica da $\operatorname{tgh} \alpha$ e $\operatorname{cotgh} \alpha$**

Seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha = \alpha(B)$ . Sejam também as retas  $r_1 : x = 1$  e  $r_2 : y = 1$ ; os pontos  $A, C, D$  e  $D'$  são tais que  $A(1, 0)$ ,  $r_1 \cap \overleftrightarrow{OB} = \{C\}$ ,  $r_2 \cap \overleftrightarrow{OB} = \{D\}$  e  $D(0, 1)$ . Além disso, toma-se  $X'$  e  $Y'$  tais que  $X'(\cosh \alpha, 0)$  e  $Y'(0, \sinh \alpha)$ . Ver figura 2.4, que mostra o caso  $\alpha > 0$ , e 2.5, que mostra o caso  $\alpha < 0$ .

Dessa forma, tem-se, então, que  $C(1, \operatorname{tgh} \alpha)$  e  $D(\operatorname{cotgh} \alpha, 1)$ . De fato, primeiramente, temos  $\overline{OA} = 1$ ,  $\overline{BX'} = |\sinh \alpha|$  e  $\overline{OX'} = \cosh \alpha$ . Agora observe que  $O\hat{A}C \equiv O\hat{X}'B = 90^\circ$  e  $A\hat{O}C \equiv X'\hat{O}B$  (possuem lados comuns). Daí, temos que  $\triangle X'OB \sim \triangle AOC$ . Logo,



Fonte: Autor



Fonte: Autor

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BX'}} = \frac{1}{\overline{AX'}}, \text{ isto é, } \overline{AC} = \frac{|\operatorname{senh}\alpha|}{\operatorname{cosh}\alpha}. \quad (2.5)$$

Por outro lado,  $X'\widehat{O}B \equiv O\widehat{D}D'$  (ângulos alternos internos) e  $O\widehat{X}'B \equiv O\widehat{D}'D$  (ângulos retos). Ou seja,  $\triangle X'OB \sim \triangle DD'O$ . Com isso,

$$\frac{\overline{D'D}}{\overline{OX'}} = \frac{1}{\overline{BX'}}, \text{ isto é, } \overline{D'D} = \frac{\operatorname{cosh}\alpha}{|\operatorname{senh}\alpha|}. \quad (2.6)$$

De 2.5 e 2.6, conclui-se que  $\operatorname{tgh}\alpha = \overline{AC}$  e  $\operatorname{cotgh}\alpha = \overline{D'D}$ , se  $\alpha > 0$ ;  $\operatorname{tgh}\alpha = -\overline{AC}$  e  $\operatorname{cotgh}\alpha = -\overline{D'D}$ , se  $\alpha < 0$ .

### Representação geométrica da cossech e da sech

Para representar geometricamente essas duas últimas razões trigonométricas hiperbólicas, também será feita uma análise em dois casos ( $\alpha > 0$  e  $\alpha < 0$ ).

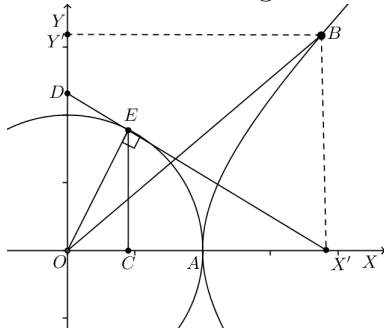
Toma-se, arbitrariamente,  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha = \alpha(B)$ . Consideremos a circunferência unitária  $C^1$  com centro em  $O(0,0)$ ; os pontos  $X'(\operatorname{cosh}\alpha, 0)$  e  $Y'(\operatorname{sech}\alpha, 0)$ ;  $D \in OY$  tal que  $X'D$  tangencia  $C^1$  em  $E$ ; e  $C \in OX$  de modo que  $EC$  seja a altura do  $\triangle OEX'$  com relação  $OX'$ . A figura 2.6 ilustra o caso  $\alpha > 0$  e a figura 2.7 mostra o caso  $\alpha < 0$ .

Das informações anteriores, segue que:

$$\overline{OC} = \operatorname{sech}\alpha \quad \text{e} \quad \overline{DE} = |\operatorname{cossech}\alpha|. \quad (2.7)$$

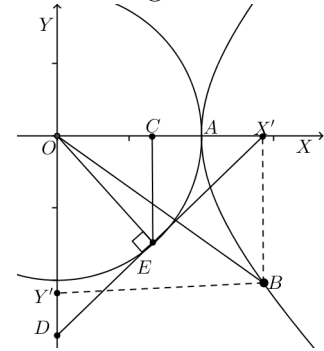
E para mostrar esse fato, primeiramente, mostremos que  $\overline{EX'} = |\operatorname{senh}\alpha|$ . De fato, pois  $DX' \perp CE$ , já que  $DX'$  tangencia  $C^1$  em  $E$ , e  $\overline{OE} = 1$ ; além disso,  $\overline{OX'} = \operatorname{cosh}\alpha$ . Assim,

Figura 2.6:



Fonte: Autor

Figura 2.7:



Fonte: Autor

pele Teorema de Pitágoras,

$$\overline{EX'}^2 + 1^2 = \overline{OX'}^2, \text{ isto é, } \overline{EX'}^2 = \cosh^2 \alpha - 1. \quad (2.8)$$

Aplicando a identidade fundamental da trigonometria hiperbólica em 2.8, obtemos:

$$\overline{EX'}^2 = \sinh^2 \alpha, \text{ isto é, } \overline{EX'} = |\sinh \alpha|. \quad (2.9)$$

Visto que  $X'\widehat{O}D$  é reto, e  $OE \perp DX'$ , temos que  $\overline{DE} \cdot \overline{EX'} = \overline{OE}^2 = 1$ . Segue deste fato e de 2.9 que:

$$\overline{DE} = \frac{1}{|\sinh \alpha|} \quad (2.10)$$

Os ângulos  $O\widehat{E}C$  e  $C\widehat{E}X'$  são tais que  $C\widehat{E}X' + C\widehat{E}X' = 90^\circ$  ( $O\widehat{E}X'$  é reto); por outro lado,  $C\widehat{E}X' + C\widehat{X}'E = 90^\circ$  (são ângulos complementares). Logo,  $C\widehat{X}'E \equiv O\widehat{E}XC$ . Como os  $\triangle OCE$  e  $\triangle OEX'$  retos e  $C$  e  $E$ , respectivamente, conclui-se que  $\triangle OCE \sim \triangle OEX'$ . Daí,

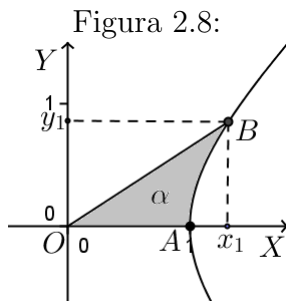
$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OE}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OX'}}, \text{ isto é, } \frac{\overline{OC}}{1} = \frac{1}{\cosh \alpha} \quad (2.11)$$

Portanto, dos resultados obtidos em 2.10 e em 2.11, respectivamente, conclui-se que:

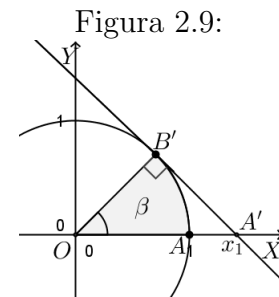
$$\overline{DE} = |\operatorname{cosech}| \text{ e } \overline{CE} = \operatorname{sech} \alpha.$$

### 2.3.4 Conexão entre trigonometria hiperbólica e trigonometria circular

Neste item, tem-se o objetivo de identificar uma conexão entre a trigonometria hiperbólica e a trigonometria circular. Para tanto, inicialmente, considere o ramo direito da hipérbole  $H^1 : x^2 - y^2 = 1$  e os pontos  $O(0,0)$ ,  $A(1,0)$  e  $B(x_1, y_1)$  com  $x_1 > 1$ . Consideremos o caso  $y_1 > 0$ ; o caso  $y_1 < 0$  segue de modo análogo. O dobro da medida da área do setor hiperbólico  $AOB$  segue com a mesma denotação  $\alpha$ . Veja que  $\alpha > 0$ . Considere agora a circunferência  $S^1 : x^2 + y^2 = 1$  e  $B'$  no primeiro quadrante, o ponto de intersecção da reta tangente a  $S^1$  que passa por  $A'(x_1, 0)$ . Seja  $\beta$  o dobro da medida da área do setor circular  $AOB'$ . Observe que  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  e a medida, em radianos, de  $\widehat{AOB}$  é  $\beta$ . A primeira e a segunda situações estão ilustradas, nesta ordem, pelas figuras 2.8 e 2.9.



Fonte: Autor



Fonte: Autor

Da definição de cosseno hiperbólico,

$$x_1 = \cosh \alpha. \quad (2.12)$$

Por outro lado, da trigonometria no triângulo retângulo, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} &= \cos \beta \\ x_1 &= \frac{1}{\cos \beta} \\ &= \sec \beta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

De 2.12 e 2.13, teremos

$$\cosh \alpha = \sec \beta \quad (2.14)$$

Observe que

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \beta + \sen^2 \beta \\ \sec^2 \beta &= 1 + \tg^2 \beta \\ \sec^2 \beta - 1 &= \tg^2 \beta \end{aligned} \quad (2.15)$$

e

$$\sinh^2\alpha = \cosh^2\alpha - 1. \quad (2.16)$$

De 2.14, 2.15 e 2.16, segue que

$$\sinh^2\alpha = \operatorname{tg}^2\beta, \text{ isto é, } \operatorname{senh}\alpha = \operatorname{tg}\beta. \quad (2.17)$$

Segue de 2.14 e 2.17, que

$$\operatorname{tgh}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{sec}\beta}, \text{ isto é, } \operatorname{tgh}\alpha = \operatorname{sen}\beta \quad (2.18)$$

e

$$\operatorname{cotgh}\alpha = \frac{\operatorname{sec}\beta}{\operatorname{tg}\beta}, \text{ isto é, } \operatorname{cotgh}\alpha = \operatorname{cossec}\beta. \quad (2.19)$$

Por fim, de 2.14

$$\operatorname{sech}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sec}\beta}, \text{ isto é, } \operatorname{sech}\alpha = \operatorname{cos}\beta. \quad (2.20)$$

e de 2.17

$$\operatorname{cossech}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}, \text{ isto é, } \operatorname{cossech}\alpha = \operatorname{cotg}\beta. \quad (2.21)$$

As igualdades obtidas em 2.14, 2.17, 2.18, 2.19, 2.20 e 2.21 apresetam uma conexão entre a trigonometria hiperbólica e a trigonometria circular. Mais precisamente, relaciona a área de um setor hiperbólico com a área de um setor circular.

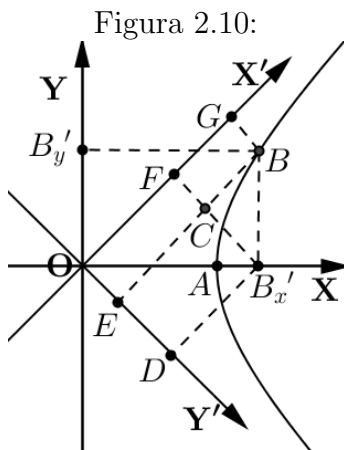
Ainda neste capítulo estaremos tratando esta conexão entre as funções trigonométricas hiperbólicas e circulares, e no capítulo 3 serão vistas outras conexões entre trigonometria hiperbólica e trigonometria circular.

## 2.4 Explicitando a função $\alpha$ e as fórmulas para as razões trigonométricas hiperbólicas

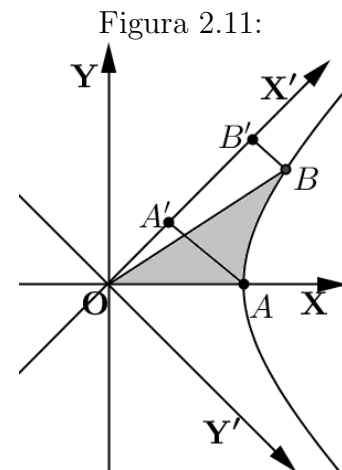
Nesta seção pretendemos determinar uma lei que faz associar a medida do setor hiperbólico  $AOB$  às coordenadas de  $B$ , isto é, uma equação envolvendo  $\alpha(x, y)$ ,  $x$  e  $y$ .

### 2.4.1 Cálculo da medida do argumento hiperbólico

Dado o sistema usual de coordenadas cartesianas  $OXY$ , tomemos o sistema  $X'OY'$  tal que uma a rotação de  $45^\circ$  deste segundo sistema faz coincidir  $OX'$  com  $OY$  e  $OY'$  com  $OX$ . Assim, seja  $B \in H$ , onde  $H$  é o ramo direito da hipérbole  $x^2 - y^2 = 1$ , tal que as coordenadas de  $B$  seja  $(x, y)$  no sistema  $OXY$  e  $(x', y')$  no sistema  $OX'OY'$ . Sejam  $B'_x$  e  $B'_y$  pertencentes aos eixos  $OX$  e  $OY$ , respectivamente, tais que  $\overline{OB'_x} = x$  e  $\overline{OB'_y} = |y|$ ;  $F$  e  $D$  são as projeções de  $B'_x$  em  $X'$  e  $Y'$  nesta ordem;  $E$  e  $G$ , as projeções de  $B$  em  $Y'$  e  $X'$ , respectivamente; e  $C$  é o ponto de intersecção de  $B'_x F$  e  $BE$ . As figuras 2.10 e 2.11 mostram a situação descrita anteriormente e a região do setor angular hiperbólico cuja área deve ser calculada.



Fonte: Autor



Fonte: Autor

Da figura 2.10, temos  $\overline{B'_x F} = \overline{B'_x D}$  e  $\overline{B'_x C} = \overline{BC}$ , pois  $B'_x \hat{O} F = 45^\circ$ , o que leva a  $B'_x \hat{O} F = 45^\circ$ . Por consequência

$$\overline{B'_x C} = \overline{BC} = \overline{FG} = \overline{ED} = \frac{\sqrt{2}}{2}y \quad \text{e} \quad \overline{B'_x D} = \overline{OF} = \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad (2.22)$$

Sendo  $\overline{OE} = y'$  e  $\overline{OG} = x'$ , segue das equações em 2.22 que

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = x' \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = y' \end{cases} \quad (2.23)$$

Do sistema de equações 2.23, teremos:

$$\begin{aligned} x'.y' &= \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ x'.y' &= \frac{1}{2}(x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Como  $x^2 - y^2 = 1$ , segue de 2.24 que

$$x'.y' = \frac{1}{2}. \quad (2.25)$$

Ou seja, no sistema  $OX'Y'$ ,  $H = \{(x', y') | x'.y' = \frac{1}{2}\}$ .

Voltemos à figura 2.11. Tomando  $A'$  e  $B'$  como sendo as projeções de  $A$  e  $B$ , respectivamente, no eixo  $OX'$ , tem-se  $\overline{OA'} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{A'A}$ . Daí, a área do triângulo retângulo  $AA'O$  mede  $\frac{1}{4}$ . Por outro lado, uma análise à figura 2.10 mostra que  $\overline{BB'} = y'$ . Sendo  $\overline{AB'} = x'$ , temos de 2.25 que a área do triângulo retângulo  $OBB'$  mede:

$$\frac{x'.y'}{2} = \frac{1}{4}. \quad (2.26)$$

Ou seja,  $AA'O$  e  $OBB'$  possuem áreas iguais. Além disso, denotando por

$$A_{(AA'B'B)}, A_{(AOB'B)}, A_{(AOB)}, A_{(AOA')} \text{ e } A_{(BOB')}$$

as áreas das regiões limitadas por:  $H$  e a poligonal aberta  $AA'B'B$ ; por  $H$  e a poligonal aberta  $AOB'B$ ; por  $H$  e a poligonal aberta  $AOB$ ; pelo triângulo  $AOA'$ ; e pelo triângulo  $BOB'$ , respectivamente, temos:

$$\begin{cases} A_{(AOA')} + A_{(AA'B'B)} = A_{(AOB'B)} \\ A_{(AOB)} + A_{(BOB')} = A_{(AOB'B)} \end{cases} \quad (2.27)$$

Portanto, dado que  $A_{(AOA')} = A_{(BOB')}$ , segue de 2.27 o resultado a seguir

$$A_{(AOB)} = A_{(AA'B'B)} \quad (2.28)$$

Agora, precisa-se calcular a medida da área da região  $AA'B'B$  descrita anteriormente.

## 2.4.2 Cálculo da área da região $AA'B'B$

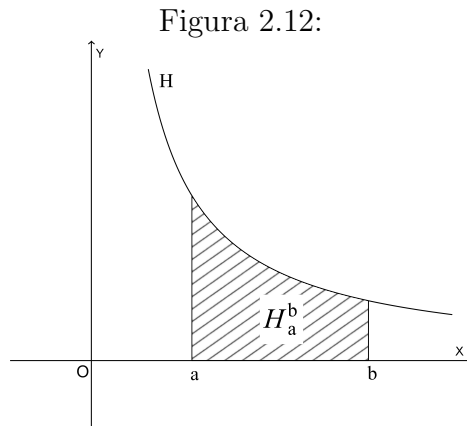
Inicialmente, vamos considerar o lugar geométrico

$$H = \left\{ \left( x, \frac{1}{x} \right); x > 0 \right\}, \quad (2.29)$$

que é o ramo positivo da hipérbole equilátera  $xy = 1$ , e estudar a área da região limitada por esse ramo hiperbólico, pelo eixo  $OX$  e por duas retas paralelas ao eixo das ordenadas. Veja o estudo original apresentado em Lima et. al (2006, v.1, p. 218 - 25).

Sejam  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , definimos como faixa de hipérbole o conjunto  $H_a^b$ , que é o conjunto

dos pontos do plano limitado lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , superiormente por  $H$  e inferiormente pelo eixo das abscissas como mostra a figura 2.12.



Fonte: Lima et al (2006).

Daremos uma orientação à área da faixa  $H_a^b$ , pois é conveniente dar sinal a essa área, sendo positivo quando  $a < b$ , negativo, se  $b < a$  e, naturalmente, zero, se  $a = b$ .

Escreveremos com letras maiúsculas para indicar que a área possui sinal. E a área usual, que possui valores não negativos, será escrita com letra minúsculas. Isto é,

$$\text{ÁREA}H_a^b = \text{área}H_a^b, \text{ se } a < b; \quad (2.30)$$

$$\text{ÁREA}H_a^b = -\text{área}H_a^b, \text{ se } b < a; \quad (2.31)$$

$$\text{ÁREA}H_a^a = 0, \text{ que é caso } b = a. \quad (2.32)$$

A partir de uma análise gráfica, é imediato perceber que se  $a < b < c$ , então

$$\text{área}H_a^b + \text{área}H_b^c = \text{área}H_a^c. \quad (2.33)$$

Por outro lado, segue da orientação das áreas, especificamente da igualdade 2.31, que

$$\text{ÁREA}H_a^b = -\text{ÁREA}H_b^a. \quad (2.34)$$

já que as faixas  $H_a^b$  e  $H_b^a$  são regiões congruentes, o que leva a possuírem áreas iguais.

Daí, verifica-se, que

$$\text{ÁREA}H_a^b + \text{ÁREA}H_b^c = \text{ÁREA}H_a^c \quad (2.35)$$

para quaisquer que sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ , não importando a ordem destes números. Provaremos 2.35 para o caso  $b \leq a \leq c$  e os demais casos (obtidos na permutação de  $a, b$  e  $c$ ) têm



provas análogas.

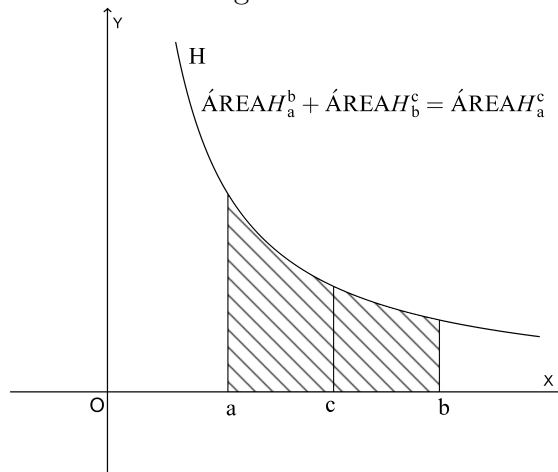
Dado que  $b \leq a \leq c$ , tem-se de 2.33 que

$$\begin{aligned} \text{área}H_b^a + \text{área}H_a^c &= \text{área}H_b^c \\ \text{ÁREA}H_b^a + \text{ÁREA}H_a^c &= \text{ÁREA}H_b^c \\ \text{ÁREA}H_a^c &= -\text{ÁREA}H_b^a + \text{ÁREA}H_b^c. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aplicando 2.34 em 2.36, obteremos o seguinte resultado

$$\text{ÁREA}H_a^c = \text{ÁREA}H_a^b + \text{ÁREA}H_b^c.$$

Figura 2.13:



Fonte: Lima et al (2006).

Fixando  $a > 0$ , tem-se que dado  $b > 0$ , então  $0 < b \leq a$  ou  $b \geq a$  sempre que  $a, b \in \mathbb{R}$ . Segue daí, que para qualquer que seja  $b > 0$ , existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$\beta = \text{ÁREA}H_a^b.$$

Além disso, suponha  $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$  tais que

$$\beta_1 = \text{ÁREA}H_a^b \text{ e } \beta_2 = \text{ÁREA}H_a^b,$$

daí, teremos

$$\beta_1 - \beta_2 = \text{ÁREA}H_a^b - \text{ÁREA}H_a^b. \quad (2.37)$$

Aplicando 2.34 e, em seguida, 2.35 em 2.37, resulta

$$\beta_1 - \beta_2 = \text{ÁREAH}_a^a \quad (2.38)$$

De 2.38 e 2.32, concluímos que  $\beta_1 - \beta_2 = 0$ , isto é  $\beta_1 = \beta_2$ .

Do exposto anteriormente, sendo  $a > 0$  fixo, existe uma função  $\beta$  que associa  $x \in \mathbb{R}_+^*$  a  $\beta(x) \in \mathbb{R}$  tal  $\beta(x) = \text{ÁREAH}_a^x$ .

Tomando  $x_1 < x_2$ , tem-se de 2.34 e 2.35, nesta ordem

$$\begin{aligned} \text{ÁREAH}_a^{x_2} - \text{ÁREAH}_a^{x_1} &= \text{ÁREAH}_a^{x_2} + \text{ÁREAH}_{x_1}^a \\ \text{ÁREAH}_a^{x_2} - \text{ÁREAH}_a^{x_1} &= \text{ÁREAH}_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dado que  $x_1 < x_2$ , segue de 2.30

$$\text{ÁREAH}_{x_1}^{x_2} > 0. \quad (2.40)$$

Portanto,

$$\text{ÁREAH}_a^{x_2} > \text{ÁREAH}_a^{x_1}. \quad (2.41)$$

Logo, de 2.41,  $\beta$  é uma função crescente.

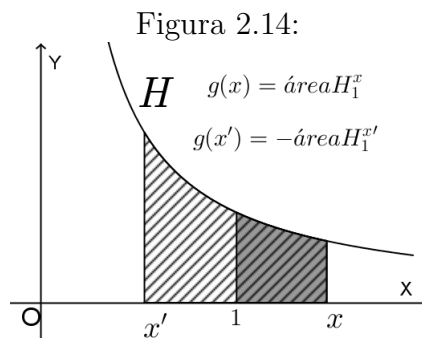
Assim, definamos a função  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$g(x) = \text{ÁREAH}_1^x$$

Dessa forma, de acordo com a definição, sendo  $x', x \in D(g)$  com  $0 < x' < 1$  e  $x > 1$ ,

$$g(x') = -\text{área}H_1^{x'}, \quad g(x) = \text{área}H_1^x \quad \text{e} \quad g(1) = 0$$

Uma análise gráfica está mostrada na figura 2.14.



Fonte: Lima et al (2006).

Como já foi mostrado, a função  $g$  é crescente e, além disso:

$$\begin{cases} g(x) < 0 & \Leftrightarrow 0 < x < 1, \text{ pois } \text{ÁREAH}_1^x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1; \\ g(x) > 0 & \Leftrightarrow x > 1, \text{ pois } \text{ÁREAH}_1^x > 0 \Leftrightarrow x > 1; \\ g(1) & = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Sejam  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$ , então

$$g(x_1.x_2) = \text{ÁREAH}_1^{x_1.x_2} \quad (2.43)$$

Aplicando 2.35 na igualdade dada em 2.43, teremos

$$\begin{aligned} g(x_1.x_2) &= \text{ÁREAH}_1^{x_1} + \text{ÁREAH}_{x_1}^{x_1.x_2} \\ g(x_1.x_2) &= \text{ÁREAH}_1^{x_1} + \text{ÁREAH}_{1.x_1}^{x_2.x_1} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Como a transformação geométrica que leva a faixa  $H_1^{x_2}$  na faixa  $H_{1.x_1}^{x_2.x_1}$  é do tipo  $T(x, y) = \left(kx, \frac{y}{k}\right)$ , já que  $y = \frac{1}{x} \implies \frac{y}{k} = \frac{1}{x/k} = \frac{1}{kx}$ , e  $k\frac{1}{k}$ , então  $\text{ÁREAH}_1^{x_2} = \text{ÁREAH}_{1.x_1}^{x_2.x_1}$  (LIMA, 2006, p. 33)<sup>4</sup>. Consequentemente,

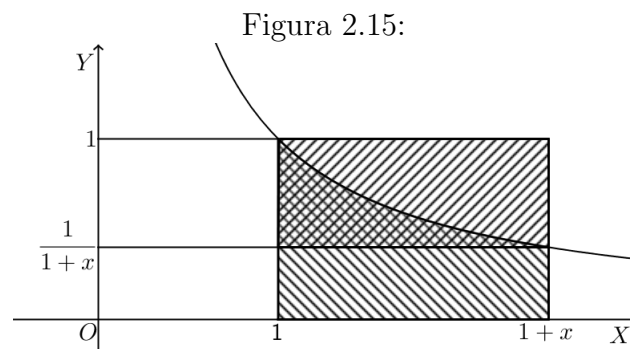
$$\begin{aligned} g(x_1.x_2) &= \text{ÁREAH}_1^{x_1} + \text{ÁREAH}_1^{x_2} \\ g(x_1.x_2) &= g(x_1) + g(x_2) \end{aligned} \quad (2.45)$$

De 2.42 e 2.45, concluímos pelo Teorema da Caracterização das funções logarítmicas que existe  $a \in \mathbb{R}_+^*$  tal que

$$g(x) = \log_a x$$

com  $a > 1$ , pois  $f$  é crescente (LIMA et. al, 2006, v.1, p. 212 e 215).

Para completar o estudo da função  $g$ , precisamos determinar o valor da constante  $a$ . Para tanto, considere a figura 2.15.



Fonte: Lima et al (2006).

<sup>4</sup>Veja o exercício 9 da referência citada.

Na figura 2.15, temos os retângulos de larguras  $x$ , e alturas  $\frac{1}{1+x}$  e  $1$ , onde o primeiro está contido na faixa  $H_1^{1+x}$ , que por sua vez está contida no retângulo maior. Comparando as áreas dessas três regiões descritas e considerando que

$$\text{ÁREA}H_1^{1+x} = \log_a(1+x),$$

pode-se afirmar que para todo  $x \in \mathbb{R}_+^*$ :

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{1}{1+x} &< \log_a(1+x) < x \cdot 1 \\ \frac{x}{1+x} &< \log_a(1+x) < x \end{aligned} \quad (2.46)$$

Multiplicando os membros da desigualdade de 2.46 por  $\frac{1}{x}$  e fazendo  $x = \frac{1}{n}$ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{n}{1+n} &< n \cdot \log_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \\ a^{\frac{n}{1+n}} &< \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < a \end{aligned} \quad (2.47)$$

para qualquer que seja  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ , segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{n}{n+1}} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} a$ . Portanto, aplicando o Teorema do Confronto para o limite de seqüências em 2.47 obtém-se

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2.48)$$

Mas o limite em 2.48 define número  $e$ , como foi visto no início deste capítulo. Assim, podemos resumir o estudo feito anteriormente na seguinte proposição:

**Proposição 2.4.1.** *Dado o lugar geométrico  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* | x \cdot y = 1\}$  e definindo por faixa hipérbólica  $H_a^b$  a região limitada superiormente por  $H$ , inferiormente por  $OX$  e lateralmente pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , então a área da região  $H_1^x$  é dada pela função  $f$  tal que*

$$f(x) = \ln x, \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

onde  $\ln x = \log_e x$ .

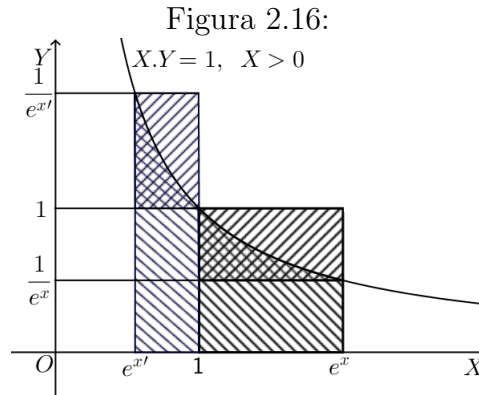
**Teorema 2.4.1.** *(Teorema Fundamental Exponencial - TFE<sup>5</sup>)* *Seja  $e$  o número real definido na subseção 2.4.2, então:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

*Demonstração.* Para demonstrar esse teorema, primeiramente consideremos a figura 2.16,

<sup>5</sup>Veja exercício 3 em Lima (2013, p. 110)

que mostra o ramo superior da hipérbole  $X.Y = 1$  e a faixa hiperbólica  $H_1^{e^x}$ . Observe que  $e^x > 1$ , se  $x > 0$ ; e  $0 < e^x < 1$ , se  $x < 0$ .



Fonte: Autor

Pela proposição 2.4.1, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\text{área}H_1^{e^x} = |\ln e^x|$ , isto é  $\text{área}H_1^{e^x} = |x|$ . Assim, observa-se, a partir da figura 2.16, que:

1. se  $x > 0$ , então:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - 1}{e^x} < x < (e^x - 1).1 \\ \frac{1}{e^x} < \frac{x}{e^x - 1} < 1 \\ 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \end{aligned} \quad (2.49)$$

2. se  $x < 0$ , então:

$$\begin{aligned} (1 - e^x).1 < -x < \frac{1 - e^x}{e^x} \\ 1 < \frac{-x}{1 - e^x} < \frac{1}{e^x} \\ e^x < \frac{-(e^x - 1)}{-x} < 1 \\ e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1 \end{aligned} \quad (2.50)$$

Visto que  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} 1$ , pelo Teorema do Confronto<sup>6</sup>, segue de 2.49 e de 2.50, respectivamente, que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (2.51)$$

<sup>6</sup>Veja o ANEXO C

Visto que os limites laterais<sup>7</sup> em 2.51 são iguais, concluímos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

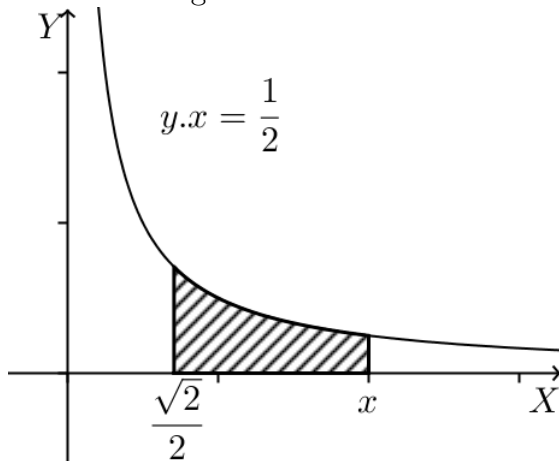
□

Agora estamos pronto para calcular a área de região  $AA'B'B$ . Para isso, consideremos o lugar geométrico

$$H' = \left\{ \left( x, \frac{1}{2x} \right); x > 0 \right\},$$

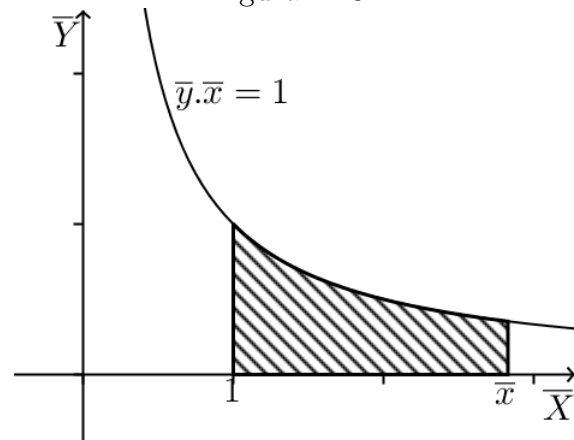
e tomemos a faixa  $H'^x_{\sqrt{2}/2}$ , da qual deseja-se calcular a área em termos de  $x$ . Seja também a faixa  $H^{\bar{x}}_1$  na hipérbole  $\bar{x} \cdot \bar{y} = 1$ , onde  $\bar{x} = \sqrt{2}x$  e  $\bar{y} = \sqrt{2}y$ . Sendo assim, observa-se que  $H^{\bar{x}}_1$  é uma transformação (ampliação) da faixa  $H'^x_{\sqrt{2}/2}$ . O fator de ampliação é  $\sqrt{2}$ . Isto é,  $H'^x_{\sqrt{2}/2}$  e  $H^{\bar{x}}_1$  representam figuras semelhantes de razão de semelhança igual a  $\sqrt{2}$ . Ver figuras 2.17 e 2.18

Figura 2.17:



Fonte: Autor

Figura 2.18:



Fonte: Autor

Nomeando por  $A$  e  $\bar{A}$  as áreas das faixas da  $H'^x_{\sqrt{2}/2}$  e  $H^{\bar{x}}_1$ , respectivamente e considerando que “a razão entre áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança” (LIMA, 2006, p. 106), tem-se que:

$$\frac{A}{\bar{A}} = \frac{1}{2}, \text{ isto é, } A = \frac{1}{2} \cdot \bar{A}.$$

Por outro lado, pela Proposição 2.4.1,  $\bar{A} = \ln \bar{x}$ . Além disso,  $\bar{x} = \sqrt{2}x$ .

<sup>7</sup>Veja teorema sobre limites laterais no ANEXO C

Logo,

$$A = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{2} x. \quad (2.52)$$

Retomando a subseção anterior, conclui-se que

$$A_{(AA'B'B)} = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{2} x', \text{ isto é, } A_{[AO(x,y)]} = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{2} x'. \quad (2.53)$$

E se o ponto  $B(x, y)$  estiver abaixo do eixo  $OX$ , verifica-se que

$$A_{[AOB(x,y)]} = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{2} y'. \quad (2.54)$$

Assim, de 2.23, 2.53 e 2.54, teremos:

$$\begin{cases} A_{[AO(x,y)]} = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y \right) = \frac{1}{2} \ln (x + y), \text{ se } y \geq 0 \\ A_{[AO(x,y)]} = \frac{1}{2} \cdot \ln \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y \right) = \frac{1}{2} \ln (x - y), \text{ se } y < 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Voltando à função  $\alpha$ , definida na seção 2.2, segue 2.55 que

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \ln(x + y), & \text{se } y \geq 0 \\ -\ln(x - y), & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

### 2.4.3 Fórmulas das razões trigonométricas hiperbólicas

Pretende-se determinar as fórmulas matemáticas das razões trigonométricas hiperbólicas em função do argumento  $\alpha$ . Para isso, retomemos 2.56, que apresenta  $\alpha$  em termos de  $x = \cosh \alpha$  e de  $y = \sinh \alpha$ . Além disso, consideremos que:

1.  $\ln \beta^k = k \cdot \ln \beta$  para todo  $k, \beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\beta > 0$ ;
2. se  $(x, y) \in D(\alpha)$ , então  $(x + y)^{-1} = (x - y)$ ;
3. a exponencial de base  $e$  é a função inversa do logaritmo natural,  $\ln$ .

Daí, pode-se afirmar que:

$$\begin{cases} \ln(x + y) = \alpha \\ \ln(x - y) = -\alpha \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} \cosh \alpha + \sinh \alpha = e^\alpha \\ \cosh \alpha - \sinh \alpha = e^{-\alpha} \end{cases} \quad (2.57)$$

Resolvendo o sistema de equações da direita dado em 2.57, obteremos:

$$\cosh \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad (2.58)$$

A partir das igualdades dadas em 2.58, tem-se que as fórmulas para a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante hiperbólicas são:

$$\operatorname{tgh}\alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{tgh}\alpha = \frac{e^{2\alpha} - 1}{e^{2\alpha} + 1} \quad (2.59)$$

$$\operatorname{cotgh}\alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{cotgh}\alpha = \frac{e^{2\alpha} + 1}{e^{2\alpha} - 1} \quad (2.60)$$

$$\operatorname{sech}\alpha = \frac{2}{e^\alpha + e^{-\alpha}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{sech}\alpha = \frac{2e^\alpha}{e^{2\alpha} + 1} \quad (2.61)$$

$$\operatorname{cossech}\alpha = \frac{2}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \quad \text{ou} \quad \operatorname{cossech}\alpha = \frac{2e^\alpha}{e^{2\alpha} - 1} \quad (2.62)$$

#### 2.4.4 Razões trigonométricas hiperbólicas da soma e da diferença de argumentos

O objeto deste problema é a determinação das razões trigonométricas hiperbólicas da soma ou da diferença de dois argumentos quaisquer em termos das razões trigonométricas dos argumentos dados.

Enfatizamos, inicialmente, o cosseno e seno hiperbólicos -  $\operatorname{senh}$  e  $\operatorname{cosh}$ .

**Proposição 2.4.2.** *Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se:*

$$\operatorname{cosh}(\alpha + \beta) = \operatorname{cosh}\alpha \cdot \operatorname{cosh}\beta + \operatorname{senh}\alpha \cdot \operatorname{senh}\beta.$$

*Demonstração.* Considere a fórmula para o cosseno hiperbólico dada em 2.58 e as relações dadas no sistema da direita dado em 2.57, daí teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh}(\alpha + \beta) &= \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2} \\ &= \frac{1}{2}[e^\alpha \cdot e^\beta + e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta}] \\ &= \frac{1}{2}[(\operatorname{cosh}\alpha + \operatorname{senh}\alpha) \cdot (\operatorname{cosh}\beta + \operatorname{senh}\beta) \\ &\quad + (\operatorname{cosh}\alpha - \operatorname{senh}\alpha) \cdot (\operatorname{cosh}\beta - \operatorname{senh}\beta)] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Aplicando a distributiva em 2.63 e simplificando os termos semelhantes, teremos:

$$\operatorname{cosh}(\alpha + \beta) = \operatorname{cosh}\alpha \cdot \operatorname{cosh}\beta + \operatorname{senh}\alpha \cdot \operatorname{senh}\beta.$$

□

**Corolário 2.4.1.** *Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dados, tem-se:*

$$\operatorname{cosh}(\alpha - \beta) = \operatorname{cosh}\alpha \cdot \operatorname{cosh}\beta - \operatorname{senh}\alpha \cdot \operatorname{senh}\beta.$$



*Demonstração.* Considere a proposição 2.4.2, substituindo  $\beta$  por  $-\beta$ , daí teremos:

$$\cosh(\alpha - \beta) = \cosh\alpha \cdot \cosh(-\beta) + \sinh\alpha \cdot \sinh(-\beta). \quad (2.64)$$

Dado que  $\cosh(-\beta) = \cosh\beta$  e  $\sinh(-\beta) = -\sinh\beta$ , segue de 2.64, que:

$$\cosh(\alpha - \beta) = \cosh\alpha \cdot \cosh\beta - \sinh\alpha \cdot \sinh\beta.$$

□

**Proposição 2.4.3.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se:*

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha \cdot \cosh\beta + \sinh\beta \cdot \cosh\alpha.$$

*Demonstração.* Considere a fórmula para o seno hiperbólico dada em 2.58 e as relações dadas no sistema da direita dado em 2.57, daí teremos:

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha + \beta) &= \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-\alpha-\beta}}{2} \\ &= \frac{1}{2}[e^\alpha \cdot e^\beta - e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta}] \\ &= \frac{1}{2}[(\cosh\alpha + \sinh\alpha) \cdot (\cosh\beta + \sinh\beta) \\ &\quad - (\cosh\alpha - \sinh\alpha) \cdot (\cosh\beta - \sinh\beta)] \end{aligned} \quad (2.65)$$

Aplicando a distributiva em 2.65 e simplificando os termos semelhantes, teremos:

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha \cdot \cosh\beta + \sinh\beta \cdot \cosh\alpha.$$

□

**Corolário 2.4.2.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se:*

$$\sinh(\alpha - \beta) = \sinh\alpha \cdot \cosh\beta - \sinh\beta \cdot \cosh\alpha.$$

*Demonstração.* Considere a proposição 2.4.2, substituindo  $\beta$  por  $-\beta$ , daí teremos:

$$\sinh(\alpha - \beta) = \sinh\alpha \cdot \cosh(-\beta) + \sinh(-\beta) \cdot \cosh\alpha \quad (2.66)$$

Por outro lado,  $\cosh(-\beta) = \cosh\beta$  e  $\sinh(-\beta) = -\sinh\beta$ . Assim, segue de 2.66, que:

$$\sinh(\alpha - \beta) = \sinh\alpha \cdot \cosh\beta - \sinh\beta \cdot \cosh\alpha.$$

□

**Corolário 2.4.3.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , então:*

$$\operatorname{tgh}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tgh}\alpha + \operatorname{tgh}\beta}{1 + \operatorname{tgh}\alpha \cdot \operatorname{tgh}\beta} \quad (2.67)$$

$$\operatorname{tgh}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tgh}\alpha - \operatorname{tgh}\beta}{1 - \operatorname{tgh}\alpha \cdot \operatorname{tgh}\beta} \quad (2.68)$$

*Demonstração.* A demonstração segue primeiro para a soma.

Por definição, temos:

$$\operatorname{tgh}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{senh}(\alpha + \beta)}{\operatorname{cosh}(\alpha + \beta)} \quad (2.69)$$

Aplicando as proposições 2.4.3 e 2.4.2 no numerador e no denominador, respectivamente, do lado direito de 2.69, obteremos:

$$\operatorname{tgh}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{senh}\alpha \cdot \operatorname{cosh}\beta + \operatorname{senh}\beta \cdot \operatorname{cosh}\alpha}{\operatorname{cosh}\alpha \cdot \operatorname{cosh}\beta + \operatorname{senh}\alpha \cdot \operatorname{senh}\beta} \quad (2.70)$$

Dividindo o numerador e o denominador do lado direito de 2.70 por  $\operatorname{cosh}\alpha \cdot \operatorname{cosh}\beta$ , teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\operatorname{senh}\alpha}{\operatorname{cosh}\alpha} + \frac{\operatorname{senh}\beta}{\operatorname{cosh}\beta}}{1 + \frac{\operatorname{senh}\alpha}{\operatorname{cosh}\alpha} \cdot \frac{\operatorname{senh}\beta}{\operatorname{cosh}\beta}} \\ &= \frac{\operatorname{tgh}\alpha + \operatorname{tgh}\beta}{1 + \operatorname{tgh}\alpha \cdot \operatorname{tgh}\beta}. \end{aligned}$$

Para o caso da diferença, considerando 2.67 e substituindo  $\beta$  por  $-\beta$ , teremos:

$$\operatorname{tgh}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tgh}\alpha + \operatorname{tgh}(-\beta)}{1 + \operatorname{tgh}\alpha \cdot \operatorname{tgh}(-\beta)} \quad (2.71)$$

Dado que  $\operatorname{tgh}(-\beta) = -\operatorname{tgh}\beta$ , segue de 2.71 que:

$$\operatorname{tgh}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tgh}\alpha - \operatorname{tgh}\beta}{1 - \operatorname{tgh}\alpha \cdot \operatorname{tgh}\beta}.$$

□

**Corolário 2.4.4.** *Dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  obedecendo as condições de existência da  $\operatorname{cotgh}$ , então:*

$$\operatorname{cotgh}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{cotgh}\alpha \cdot \operatorname{cotgh}\beta + 1}{\operatorname{cotgh}\alpha + \operatorname{cotgh}\beta} \quad (2.72)$$

$$\operatorname{cotgh}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{cotgh}\alpha \cdot \operatorname{cotgh}\beta - 1}{\operatorname{cotgh}\alpha - \operatorname{cotgh}\beta} \quad (2.73)$$

*Demonstração.* Aqui também será demonstrado o caso da soma primeiro.

Da definição de cotangente hiperbólica, temos:

$$\cotgh(\alpha + \beta) = \frac{\cosh(\alpha + \beta)}{\sinh(\alpha + \beta)} \quad (2.74)$$

Aplicando as proposições 2.4.2 e 2.4.3 no numerador e no denominador, respectivamente, do lado direito de 2.74, teremos:

$$\cotgh(\alpha + \beta) = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha.\sinh\beta}{\sinh\alpha.\cosh\beta + \sinh\beta.\cosh\alpha} \quad (2.75)$$

Dividindo o numerador e o denominador do lado direito de 2.75 por  $\sinh\alpha.\sinh\beta$ , teremos:

$$\begin{aligned} \cotgh(\alpha + \beta) &= \frac{\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} \cdot \frac{\cosh\beta}{\sinh\beta} + 1}{\frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} + \frac{\cosh\beta}{\sinh\beta}} \\ &= \frac{\cotgh\alpha.\cotgh\beta + 1}{\cotgh\alpha + \cotgh\beta}. \end{aligned}$$

□

**Corolário 2.4.5.** *Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , valem os seguintes resultados:*

1.  $\sinh\alpha.\cosh\beta = \frac{1}{2}[\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta)];$
2.  $\cosh\alpha.\cosh\beta = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta)];$
3.  $\sinh\alpha.\sinh\beta = \frac{1}{2}[\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)].$

*Demonstração.* Das proposições 2.4.3 e 2.4.2, temos:

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta) &= 2.\sinh\alpha.\cosh\beta \\ \sinh\alpha.\cosh\beta &= \frac{1}{2}[\sinh(\alpha + \beta) + \sinh(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Da proposição 2.4.2 e do corolário 2.4.1, temos:

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta) &= 2.\cosh\alpha.\cosh\beta \\ \cosh\alpha.\cosh\beta &= \frac{1}{2}[\cosh(\alpha + \beta) + \cosh(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

Novamente, pela proposição 2.4.2 e pelo corolário 2.4.1, temos:

$$\begin{aligned} \cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta) &= 2.\sinh\alpha.\sinh\beta \\ \sinh\alpha.\sinh\beta &= \frac{1}{2}[\cosh(\alpha + \beta) - \cosh(\alpha - \beta)]. \end{aligned}$$

**Corolário 2.4.6.** Para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , são válidas as seguintes afirmações:

1.  $\operatorname{senh}\alpha + \operatorname{senh}\beta = 2 \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2}$ ;
2.  $\operatorname{senh}\alpha - \operatorname{senh}\beta = 2 \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2}$ ;
3.  $\operatorname{cosh}\alpha + \operatorname{cosh}\beta = 2 \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2}$ ;
4.  $\operatorname{cosh}\alpha - \operatorname{cosh}\beta = 2 \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2}$ .

*Demonstração.* Para mostrar as igualdades dadas pelo corolário 2.4.6, primeiramente, consideremos que:

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ e } \beta = \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.76)$$

Daí, pelas proposições 2.4.3 e 2.4.2, respectivamente, e de 2.76, teremos:

$$\operatorname{senh}\alpha = \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2} + \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.77)$$

$$\operatorname{cosh}\alpha = \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2} + \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.78)$$

Além disso, pelos corolários 2.4.1 e 2.4.2, e de 2.76 segue que:

$$\operatorname{cosh}\beta = \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2} - \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.79)$$

$$\operatorname{senh}\beta = \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2} - \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2} \quad (2.80)$$

Somando membro a membro 2.77 e 2.80, segue que:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}\alpha + \operatorname{senh}\beta &= \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2} + \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= 2 \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Subtraindo membro a membro 2.80 de 2.77, obteremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}\alpha - \operatorname{senh}\beta &= \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2} + \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= 2 \cdot \operatorname{cosh}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

De modo análogo, a partir das igualdades dadas em 2.78 e 2.79, conclui-se que:

$$\begin{aligned}\cosh\alpha + \cosh\beta &= 2.\cosh\frac{\alpha + \beta}{2}.\cosh\frac{\alpha - \beta}{2} \\ \cosh\alpha - \cosh\beta &= 2.\sinh\frac{\alpha + \beta}{2}.\sinh\frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.4.7.** *Relativo à soma e à subtração de tangentes e cotangentes hiperbólicas, valem os resultados a seguir:*

1.  $\operatorname{tgh}\alpha + \operatorname{tgh}\beta = \frac{\sinh(\alpha + \beta)}{\cosh\alpha.\cosh\beta};$
2.  $\operatorname{tgh}\alpha - \operatorname{tgh}\beta = \frac{\sinh(\alpha - \beta)}{\cosh\alpha.\cosh\beta};$
3.  $\operatorname{cotgh}\alpha + \operatorname{cotgh}\beta = \frac{\sinh(\alpha + \beta)}{\sinh\alpha.\sinh\beta};$
4.  $\operatorname{cotgh}\alpha - \operatorname{cotgh}\beta = \frac{\sinh(\beta - \alpha)}{\sinh\alpha.\sinh\beta}.$

*Demonstração.* Pela definição de tangente hiperbólica, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh}\alpha + \operatorname{tgh}\beta &= \frac{\sinh\alpha}{\cosh\alpha} + \frac{\sinh\beta}{\cosh\beta} \\ &= \frac{\sinh\alpha.\cosh\beta + \sinh\beta.\cosh\alpha}{\cosh\alpha.\cosh\beta}.\end{aligned}\tag{2.81}$$

Da proposição 2.4.2 e de 2.81, segue que:

$$\operatorname{tgh}\alpha + \operatorname{tgh}\beta = \frac{\sinh(\alpha + \beta)}{\cosh\alpha.\cosh\beta}.$$

De maneira análoga, obteremos:

$$\operatorname{tgh}\alpha - \operatorname{tgh}\beta = \frac{\sinh\alpha.\cosh\beta - \sinh\beta.\cosh\alpha}{\cosh\alpha.\cosh\beta}\tag{2.82}$$

Daí, pelo corolário 2.4.2, segue de 2.82 que:

$$\operatorname{tgh}\alpha - \operatorname{tgh}\beta = \frac{\sinh(\alpha - \beta)}{\cosh\alpha.\cosh\beta}.$$

Pela definição de cotangente hiperbólica, obteremos:

$$\begin{aligned}\cotgh\alpha + \cotgh\beta &= \frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} + \frac{\cosh\beta}{\sinh\beta} \\ &= \frac{\cosh\alpha.\sinh\beta + \cosh\beta.\sinh\alpha}{\sinh\alpha.\sinh\beta}\end{aligned}\quad (2.83)$$

Analogamente, teremos:

$$\cotgh\alpha - \cotgh\beta = \frac{\cosh\alpha.\sinh\beta - \cosh\beta.\sinh\alpha}{\sinh\alpha.\sinh\beta}\quad (2.84)$$

Aplicando a proposição 2.4.3 e o corolário 2.4.2 em 2.83 e 2.84, nesta ordem, teremos:

$$\begin{aligned}\cotgh\alpha + \cotgh\beta &= \frac{\sinh(\alpha + \beta)}{\sinh\alpha.\sinh\beta} \\ \cotgh\alpha - \cotgh\beta &= \frac{\sinh(\beta - \alpha)}{\sinh\alpha.\sinh\beta}.\end{aligned}$$

□

**Corolário 2.4.8.** *A respeito da secante e da cossecante hiperbólicas valem as relações:*

$$\begin{aligned}1. \operatorname{sech}\alpha + \operatorname{sech}\beta &= \frac{2.\cosh\frac{\alpha + \beta}{2}.\cosh\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cosh\alpha.\cosh\beta}; \\ 2. \operatorname{sech}\alpha - \operatorname{sech}\beta &= \frac{2.\sinh\frac{\beta + \alpha}{2}.\sinh\frac{\beta - \alpha}{2}}{\cosh\alpha.\cosh\beta}; \\ 3. \operatorname{cosech}\alpha + \operatorname{cosech}\beta &= \frac{2.\sinh\frac{\alpha + \beta}{2}.\cosh\frac{\alpha - \beta}{2}}{\sinh\alpha.\sinh\beta}; \\ 4. \operatorname{cosech}\alpha - \operatorname{cosech}\beta &= \frac{2.\sinh\frac{\beta - \alpha}{2}.\cosh\frac{\beta + \alpha}{2}}{\sinh\alpha.\sinh\beta}.\end{aligned}$$

*Demonstração.* Da definição de secante hiperbólica, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}\alpha + \operatorname{sech}\beta &= \frac{1}{\cosh\alpha} + \frac{1}{\cosh\beta} \\ &= \frac{\cosh\beta + \cosh\alpha}{\cosh\alpha.\cosh\beta}.\end{aligned}\quad (2.85)$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}\alpha - \operatorname{sech}\beta &= \frac{1}{\cosh\alpha} - \frac{1}{\cosh\beta} \\ &= \frac{\cosh\beta - \cosh\alpha}{\cosh\alpha.\cosh\beta}.\end{aligned}\quad (2.86)$$

Aplicando os itens 3 e 4 do corolário 2.4.6 em 2.85 e 2.86, respectivamente, conclui-se que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}\alpha + \operatorname{sech}\beta &= \frac{2.\cosh\frac{\alpha+\beta}{2}.\cosh\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cosh\alpha.\cosh\beta} \\ \operatorname{sech}\alpha - \operatorname{sech}\beta &= \frac{2.\sinh\frac{\beta+\alpha}{2}.\sinh\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cosh\alpha.\cosh\beta}.\end{aligned}$$

Da definição de cossecante hiperbólica, teremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{cossech}\alpha + \operatorname{cossech}\beta &= \frac{1}{\operatorname{senh}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{senh}\beta} \\ &= \frac{\operatorname{senh}\beta + \operatorname{senh}\alpha}{\operatorname{senh}\alpha.\operatorname{senh}\beta}\end{aligned}\tag{2.87}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{cossech}\alpha - \operatorname{cossech}\beta &= \frac{1}{\operatorname{senh}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{senh}\beta} \\ &= \frac{\operatorname{senh}\beta - \operatorname{senh}\alpha}{\operatorname{senh}\alpha.\operatorname{senh}\beta}.\end{aligned}\tag{2.88}$$

Aplicando os itens 1 e 2 do corolário 2.4.6 em 2.87 e 2.88, nesta ordem, teremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{cossech}\alpha + \operatorname{cossech}\beta &= \frac{2.\sinh\frac{\alpha+\beta}{2}.\cosh\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{senh}\alpha.\operatorname{senh}\beta} \\ \operatorname{cossech}\alpha - \operatorname{cossech}\beta &= \frac{2.\sinh\frac{\beta-\alpha}{2}.\cosh\frac{\beta+\alpha}{2}}{\operatorname{senh}\alpha.\operatorname{senh}\beta}\end{aligned}$$

□

## 2.4.5 Outras propriedades das razões trigonométricas hiperbólicas

Dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , sempre que existir a referida razão trigonométrica hiperbólica, valem as seguintes relações.

1.  $\operatorname{senh}2\alpha = 2.\operatorname{senh}\alpha.\cosh\alpha$ ;
2.  $\cosh2\alpha = \cosh^2\alpha + \operatorname{senh}^2\alpha$ ;
3.  $\operatorname{tgh}2\alpha = \frac{2\operatorname{tgh}\alpha}{1 + \operatorname{tgh}^2\alpha}$ ;
4.  $\operatorname{cotgh}2\alpha = \frac{1 + \operatorname{cotgh}^2\alpha}{2\operatorname{cotgh}\alpha}$ ;
5.  $\operatorname{senh}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{senh}\alpha - 1}{2}}$ ;

$$6. \cosh \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sinh \alpha + 1}{2}};$$

$$7. \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sinh \alpha - 1}{\sinh \alpha + 1}};$$

$$8. \operatorname{cotgh} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\sinh \alpha + 1}{\sinh \alpha - 1}};$$

*Demonstração.* Para demonstrar as relações 1 e 2, basta considerar as proposições 2.4.2 e 2.4.3, substituindo  $\beta$  por  $\alpha$ . Quanto a 3 e a 4, aplica-se o corolário 2.4.4, especificamente a equação 2.72.

Da identidade fundamental da trigonometria hiperbólica, teremos:

$$\cosh^2 \frac{\alpha}{2} - \sinh^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \quad (2.89)$$

Por outro lado, do item 2, teremos:

$$\cosh^2 \frac{\alpha}{2} + \sinh^2 \frac{\alpha}{2} = \cosh \alpha \quad (2.90)$$

Somando as identidades 2.89 e 2.90, obteremos:

$$\cosh^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cosh \alpha + 1}{2}, \text{ isto é, } \cosh \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cosh \alpha + 1}{2}}.$$

Subtraindo 2.90 de 2.89 e considerando o fato de que a razão trigonométrica seno hiperbólico assume qualquer valor real, teremos:

$$\sinh^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cosh \alpha - 1}{2}, \text{ isto é, } \sinh \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{\cosh \alpha - 1}{2}}.$$

□

A proposição que será apresentada a seguir trata-se de uma potência inteira da soma e da diferença das razões trigonométricas seno e cosseno hiperbólicos. As fórmulas dessa proposição são análogas à primeira fórmula de MOIVRE<sup>8</sup>, que permite calcular uma potência inteira qualquer de um número complexo escrito na forma polar.

**Proposição 2.4.4.** *Dados  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $n \in \mathbb{Z}$  dados, valem as seguintes igualdades:*

$$1. (\cosh \alpha + \sinh \alpha)^n = \cosh n\alpha + \sinh n\alpha;$$

$$2. (\cosh \alpha - \sinh \alpha)^n = \cosh n\alpha - \sinh n\alpha.$$

<sup>8</sup>Abraham Moivre (1667-1754), matemático francês que fez carreira na Inglaterra (BOYER, MERZER-BACH, 2012, p. 280).



*Demonstração.* Primeiramente, consideremos que dado  $\beta \in \mathbb{R}$ , valem as igualdades:

$$\cosh\beta + \sinh\beta = e^\beta \quad (2.91)$$

$$\cosh\beta - \sinh\beta = e^{-\beta}. \quad (2.92)$$

Segue de 2.91 e de 2.92, respectivamente, que:

$$(\cosh\alpha + \sinh\alpha)^n = e^{n\alpha} \quad (2.93)$$

$$(\cosh\alpha - \sinh\alpha)^n = e^{-n\alpha}. \quad (2.94)$$

Novamente, considerando 2.91 e 2.92, concluímos, de 2.93 e de 2.94, que:

$$(\cosh\alpha + \sinh\alpha)^n = \cosh n\alpha + \sinh n\alpha$$

e

$$(\cosh\alpha - \sinh\alpha)^n = \cosh n\alpha - \sinh n\alpha.$$

□

## 2.5 Funções trigonométricas hiperbólicas

Nesta seção, o objetivo é apresentar um estudo das funções trigonométricas hiperbólicas canônicas de domínio  $\mathbb{R}$  ou o maior subconjunto possível de  $\mathbb{R}$ . Nesse sentido, a função trigonométrica hiperbólica canônica aqui tratada é definida como sendo a função  $f$ , formada pelo conjunto dos pares ordenados  $(x, f(x))$ , onde  $x, f(x) \in \mathbb{R}$  e  $f(x)$  é uma razão trigonométrica hiperbólica de  $x$ . Em cada caso, a função  $f$  terá notação específica.

### 2.5.1 Estudo da função seno hiperbólico

Dado que para qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R}$  existe a razão trigonométrica hiperbólica  $\sinh\alpha$ , temos a definição a seguir.

**Definição 2.5.1.** A função trigonométrica seno hiperbólico  $\sinh(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

.

**Proposição 2.5.1.** A função seno hiperbólico é:

1. uma função ímpar;

2. é bijetora;

3. é uma função crescente.

*Demonstração.* A prova da proposição segue a ordem de apresentação dos itens.

1. Mostremos que  $\sinh(\cdot)$  é ímpar. Observe que dado  $x \in \mathbb{R}$ , teremos:

$$\begin{aligned}\sinh(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{2} \\ &= -\frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ &= -\sinh(x).\end{aligned}$$

Logo, a função seno hiperbólico é ímpar.

2. Vamos mostrar que  $\sinh(\cdot)$  é bijetora.

i)  $\sinh(\cdot)$  é injetiva. Tomemos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , tais que  $\sinh(x_1) = \sinh(x_2)$ . Então teremos:

$$\begin{aligned}\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} &= \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \\ e^{x_1} - e^{-x_1} &= e^{x_2} - e^{-x_2} \\ \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{e^{x_1} + 1} &= \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{e^{x_2} + 1} \\ \frac{e^{x_1} + 1}{e^{x_1}} &= \frac{e^{x_2} + 1}{e^{x_2}} \\ e^{x_1} &= e^{x_2} \\ x_1 &= x_2\end{aligned}$$

Logo,  $\sinh(\cdot)$  é injetiva.

ii)  $\sinh(\cdot)$  é sobrejetiva. Dado  $y \in \mathbb{R}$ , devemos mostrar que existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\sinh(x) = y$ . Caso exista, devemos ter:

$$\begin{aligned}\frac{e^x - e^{-x}}{2} &= y \\ e^x - e^{-x} &= 2y \\ \frac{e^{2x} + 1}{e^x} &= 2y \\ (e^x)^2 - 2ye^x + 1 &= 0 \\ (e^x - y)^2 &= y^2 + 1 \\ e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} &\quad \text{ou} \quad e^x = y - \sqrt{y^2 + 1} \quad (2.95)\end{aligned}$$

Visto que para cada  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ , segue deste fato e de 2.95 que dado  $y \in \mathbb{R}$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\sinh(x) = y$ . De fato, dado que  $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ , tome  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ , daí teremos:

$$\begin{aligned}
 \sinh(\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})) &= \frac{e^{\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})} - e^{-\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})}}{2} \\
 &= \frac{e^{\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})} - e^{\ln(y + \sqrt{y^2 + 1})^{-1}}}{2} \\
 &= \frac{(y + \sqrt{y^2 + 1}) - (y + \sqrt{y^2 + 1})^{-1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (y + \sqrt{y^2 + 1}) - \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} \right] \\
 &= \frac{(y + \sqrt{y^2 + 1})^2 - 1}{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}} \\
 &= \frac{y^2 + 2y\sqrt{y^2 + 1} + y^2 + 1 - 1}{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}} \\
 &= \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2 + 1}}{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}} \\
 &= y \cdot \frac{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}}{2y + 2\sqrt{y^2 + 1}} \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

Logo,  $\sinh(\cdot)$  é sobrejetora.

Assim, de *i*) e *ii*), concluimos que  $\sinh(\cdot)$  é bijetora.

3. Provemos que  $\sinh(\cdot)$  é crescente. Dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , tais que  $x_1 < x_2$ , vamos mostrar que  $\sinh(x_1) < \sinh(x_2)$ .

Observe que

$$\begin{aligned}
 \sinh(x_1) - \sinh(x_2) &= \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} + \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{2x_1} - 1}{e^{x_1}} - \frac{e^{2x_2} - 1}{e^{x_2}} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1}) + (e^{x_1} - e^{x_2})}{e^{x_1+x_2}}. \tag{2.96}
 \end{aligned}$$

Como  $x_1 < x_2$ , então  $2x_1 + x_2 < 2x_2 + x_1$ , o que leva a:

$$e^{2x_1+x_2} < e^{2x_2+x_1} \quad \text{e} \quad e^{x_1} < e^{x_2}.$$

Ou seja,

$$e^{2x_1+x_2} - e^{2x_2+x_1} < 0 \quad \text{e} \quad e^{x_1} - e^{x_2} < 0. \quad (2.97)$$

A partir dos resultados de 2.96 e 2.97, teremos:

$$\sinh(x_1) - \sinh(x_2) < 0, \text{ isto é, } \sinh(x_1) < \sinh(x_2).$$

Portanto,  $\sinh(\cdot)$  é uma função crescente.

□

**Teorema 2.5.1.** (*Limite Fundamental da Trigonometria Hiperbólica*) Sendo  $x \in \mathbb{R}$ , então:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1$$

*Demonstração.* Inicialmente, consideremos que para todo  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(x)}{x} &= \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot e^{-x} \end{aligned} \quad (2.98)$$

Segue de 2.98 e pela propriedade do limite do produto de funções que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x}. \quad (2.99)$$

Observe que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0. \quad (2.100)$$

Por outro lado, pelo Teorema 2.4.1,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1. \quad (2.101)$$

Tomando  $y = 2x$  e aplicando o Teorema do Limite da Substituição<sup>9</sup>, segue de 2.100 e de 2.101 que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1. \quad (2.102)$$

---

<sup>9</sup>Veja ANEXO C.

Dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ , conclui-se, de 2.99 e 2.102, que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x)}{x} = 1.$$

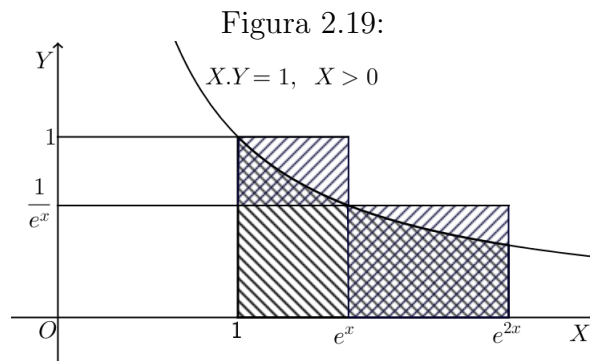
□

**Teorema 2.5.2.** *Dado  $x \in \mathbb{R}$ :*

1. se  $x > 0$ , então  $\sinh(x) > x$ ;
2. se  $x < 0$ , então  $\sinh(x) < x$ .

*Demonstração.* Tomemos  $x \in \mathbb{R}$ .

1. se  $x > 0$ , então  $2x > x$ ; isto é,  $1 < e^x < e^{2x}$  (pois  $e > 1$ ). Agora observe a figura 2.19, que mostra o ramo superior da hipérbole  $X.Y = 1$ . As faixas da hiperbólicas



Fonte: Autor

$H_1^{e^x}$  e  $H_{e^x}^{e^{2x}}$  possuem áreas iguais. De fato,

$$\begin{aligned} \text{área} H_{e^x}^{e^{2x}} &= \text{área} H_{e^x \cdot 1}^{e^x \cdot e^x} \\ &= \text{área} H_1^{e^x} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Além disso, os retângulos de bases  $e^x - 1$  e  $e^{2x} - e^x$ , cujas alturas são, respectivamente,  $1$  e  $e^{-x}$  possuem áreas iguais, pois:

$$\begin{aligned} (e^{2x} - e^x) \cdot e^{-x} &= e^x - 1 \\ &= (e^x - 1) \cdot 1 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  as áreas das regiões dos retângulos de bases  $e^{2x} - e^x$  e  $e^x - 1$ , respectivamente que ficam acima do ramo superior da hipérbole  $x.y = 1$ , e  $A_3$  a área da região do retângulo de base  $e^x - 1$  e altura  $1 - e^{-x}$  que fica abaixo do mesmo ramo de hipérbole. Dessa forma,  $A_2 > A_3$ , pois o segmento desta hipérbole contido

no retângulo de área  $A_3$  fica abaixo da diagonal deste retângulo, que o divide em duas regiões congruentes. Por outro lado, de 2.103 e 2.104, tem-se  $A_1 = A_2$ . Logo,  $A_1 > A_3$ , isto é:

$$\begin{aligned} (e^{2x} - 1).e^{-x} - (e^x - 1).e^{-x} - x &> x - (e^x - 1).e^{-x} \\ e^x - e^{-x} &> 2x \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} &> x \\ \sinh(x) &> x. \end{aligned}$$

2. Tomemos  $x < 0$ . Assim,  $-x > 0$ ; logo, pelo item 1 deste teorema e o fato de que a função seno hiperbólico é ímpar, teremos nesta sequência:

$$\begin{aligned} \sinh(-x) &> -x \\ -\sinh(x) &> -x \\ \sinh(x) &< x. \end{aligned}$$

□

## 2.5.2 Estudo da função cosseno hiperbólico

Haja visto que para qualquer que seja  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe a razão trigonométrica hiperbólica  $\cosh \alpha$ , teremos a definição a seguir.

**Definição 2.5.2.** A função trigonométrica cosseno hiperbólico  $\cosh(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

**Proposição 2.5.2.** A função cosseno hiperbólico é tal que:

1.  $\cosh(x) = 1$  se, e somente se,  $x = 0$ ;
2. para cada  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\cosh(x) > 1$ ;
3. sua imagem é o intervalo  $[1, +\infty)$ ;
4.  $\cosh(\cdot)$  é uma função par;
5.  $\cosh(\cdot)$  é crescente em  $[0, +\infty)$  e decrescente em  $(-\infty, 0]$ .

*Demonstração.* Segue a demonstração.

1.  $\cosh(x) = 1$  se, e somente se,  $x = 0$ . Observe que da definição de cosseno hiperbólico dada na subseção 2.3.1, temos que  $\cosh \alpha = 1$ , se e somente se,  $\alpha = 0$ . Segue daí, que  $\cosh(x) = 1$  se, e somente se,  $x = 0$ .
2. Para cada  $x \in \mathbb{R}^*$ , então  $\cosh(x) > 1$ . Do item 3 da proposição 2.3.1, temos que dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\cosh \alpha \geq 1$ . Daí, visto que  $\cosh(x) = 1$  se, e somente se,  $x = 0$ , segue que para todo  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\cosh(x) > 1$ .
3. A imagem da função cosseno hiperbólico é  $[1, +\infty)$ . Então, mostremos que:
  - i*) já foi visto anteriormente que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cosh(x) \geq 1$ , isto é, se  $y$  está no conjunto imagem de  $\cosh(\cdot)$ , então  $y \in [1, +\infty)$ ;
  - ii*) dado  $y \in [1, +\infty)$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cosh(x) = y$ . Caso exista, devemos ter:

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= y \\
 e^x + e^{-x} &= 2y \\
 \frac{e^{2x} + 1}{e^x} &= 2y \\
 (e^x)^2 - 2ye^x + 1 &= 0 \\
 (e^x - y)^2 &= y^2 - 1 \\
 e^x = y + \sqrt{y^2 - 1} &\quad \text{ou} \quad e^x = y - \sqrt{y^2 - 1} \quad (2.105)
 \end{aligned}$$

Visto que para todo  $y > 1$ , tem-se  $y^2 - 1 > 0$ , então  $\sqrt{y^2 - 1} \in \mathbb{R}^*$ . Por outro lado,  $y^2 > y^2 - 1$ , portanto,  $(y - \sqrt{y^2 - 1}) > 0$  e  $(y + \sqrt{y^2 - 1}) > 0$ . Logo, para o  $y$  da hipótese, existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\cosh(x) = y$ . De fato, tome, por exemplo,  $x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ , daí teremos:

$$\begin{aligned}
 \cosh(\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})) &= \frac{e^{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})} + e^{-\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})}}{2} \\
 &= \frac{e^{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})} + e^{\ln(y + \sqrt{y^2 - 1})^{-1}}}{2} \\
 &= \frac{(y + \sqrt{y^2 - 1}) + (y + \sqrt{y^2 - 1})^{-1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[ (y + \sqrt{y^2 - 1}) + \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \right] \\
 &= \frac{(y + \sqrt{y^2 - 1})^2 + 1}{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}} \\
 &= \frac{y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1} + y^2 - 1 + 1}{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}} \\
 &= \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2 - 1}}{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y \cdot \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}} \\
&= y.
\end{aligned}$$

Concluimos, de *i*) e de *ii*), que a imagem da função cosseno hiperbólico é  $[1, +\infty)$ .

4.  $\cosh(\cdot)$  é par. Basta mostrar que, dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\cosh(-x) = \cosh(x)$ . Observe que:

$$\begin{aligned}
\cosh(-x) &= \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} \\
&= \frac{e^{-x} + e^x}{2} \\
&= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&= \cosh(x).
\end{aligned}$$

Portanto,  $\cosh(\cdot)$  é uma função par.

Dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , do item 4 do corolário 2.4.6, teremos:

$$\cosh(x_1) - \cosh(x_2) = 2\sinh\frac{x_1 - x_2}{2} \cdot \sinh\frac{x_1 + x_2}{2} \quad (2.106)$$

*i*) Tome  $0 \leq x_1 < x_2$ , daí teremos:  $\frac{x_1 - x_2}{2} < 0$  e  $\frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ . Logo,

$$\sinh\frac{x_1 - x_2}{2} < 0 \quad \text{e} \quad \sinh\frac{x_1 + x_2}{2} > 0. \quad (2.107)$$

Segue de 2.106 e 2.107, que:

$$\begin{aligned}
\cosh(x_1) - \cosh(x_2) &< 0 \\
\cosh(x_1) &< \cosh(x_2).
\end{aligned}$$

Logo,  $\cosh(\cdot)$  é crescente em  $[0, +\infty)$ .

*ii*) Agora tome  $x_1 < x_2 \leq 0$ . Assim, teremos  $0 \leq x_2 < x_1$ , daí pelo resultado anterior, vem:

$$\cosh(-x_2) < \cosh(-x_1). \quad (2.108)$$

Por outro lado,  $\cosh(\cdot)$  é uma função par. Com isso, de 2.108, conclui-se que:

$$\cosh(x_2) < \cosh(x_1).$$

Portanto,  $\cosh(\cdot)$  é decrescente em  $(-\infty, 0]$ .



### 2.5.3 Estudo da função tangente hiperbólica

Da definição de cosseno hiperbólico, temos que  $\cosh \alpha \neq 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . E isto, a partir da definição, acarretou na existência da tangente hiperbólica para qualquer que seja o  $\alpha \in \mathbb{R}$ , isto é, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe  $\operatorname{tgh} \alpha$ . A partir deste fato e da fórmula para a tangente hiperbólica, motivou-se a seguinte definição.

**Definição 2.5.3.** A função tangente hiperbólica  $\operatorname{tgh}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

**Proposição 2.5.3.** A função tangente hiperbólica é tal que:

1. é uma função ímpar;
2. é injetiva;
3. é uma função crescente;
4. sua imagem é o intervalo  $(-1, 1)$ .

*Demonstração.* Segue a demonstração.

1.  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é ímpar. Precisamos provar que dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\operatorname{tgh}(-x) = -\operatorname{tgh}(x)$ .

Veja que para todo  $x \in \mathbb{R}$ , da definição 2.5.3, temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(-x) &= \frac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{e^{-x} + e^{-(-x)}} \\ &= \frac{e^{-x} - e^x}{e^{-x} + e^x} \\ &= -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= -\operatorname{tgh}(x). \end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é ímpar.

2.  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é injetiva. Devemos mostrar que dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $\operatorname{tgh}(x_1) = \operatorname{tgh}(x_2)$ , então  $x_1 = x_2$ .

Tomemos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $\operatorname{tgh}(x_1) = \operatorname{tgh}(x_2)$ . Então, da definição 2.5.3:

$$\begin{aligned} \frac{e^{x_1} + e^{-x_1}}{e^{x_1} + e^{-x_1}} &= \frac{e^{x_2} + e^{-x_2}}{e^{x_2} + e^{-x_2}} \\ e^{x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2} + e^{x_1-x_2} - e^{-x_1+x_2} &= e^{x_1+x_2} - e^{-x_1-x_2} - e^{x_1-x_2} + e^{-x_1+x_2} \\ e^{x_1-x_2} + e^{x_1-x_2} &= e^{-x_1+x_2} + e^{-x_1+x_2} \\ e^{x_1-x_2} &= e^{-x_1+x_2} \\ x_1 - x_2 &= -x_1 + x_2 \\ 2x_1 &= 2x_2 \\ x_1 &= x_2. \end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é injetiva.

3.  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é crescente. Mostremos que dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  tais que  $x_1 < x_2$ , então

$$\operatorname{tgh}(x_1) < \operatorname{tgh}(x_2).$$

Observe que para quaisquer  $x_1, x_2$  tais que  $x_1 < x_2$ , temos pelo item 2 do corolário 2.4.7, que:

$$\operatorname{tgh}(x_1) - \operatorname{tgh}(x_2) = \frac{\operatorname{senh}(x_1 - x_2)}{\operatorname{cosh}x_1 \cdot \operatorname{cosh}x_2}. \quad (2.109)$$

Dado que  $x_1 < x_2$ , temos que  $x_1 - x_2 < 0$ . Por outro lado, da proposição 2.5.1, temos que a função seno hiperbólico é bijetora e crescente. Segue daí, que  $\operatorname{senh}(x_1 - x_2) < 0$ . Além disso, da proposição 2.5.2,  $\operatorname{cosh}x_1 \geq 1$  e  $\operatorname{cosh}x_2 \geq 1$ , ou seja,  $\operatorname{cosh}x_1 \cdot \operatorname{cosh}x_2 \geq 1$ . Portanto, de 2.109, temos que  $\operatorname{tgh}(x_1) - \operatorname{tgh}(x_2) < 0$ , isto é,  $\operatorname{tgh}(x_1) < \operatorname{tgh}(x_2)$ . Logo,  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é crescente.

4. A imagem de  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é o intervalo  $(-1, 1)$ . Devemos provar que:

*i)* dado  $x \in \mathbb{R}$ , então  $-1 < \operatorname{tgh}(x) < 1$ .

Observe que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(x) - 1 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 \\ &= \frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Dado que para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-x} > 0$  e  $e^x > 0$ , segue de 2.110 que  $\operatorname{tgh}(x) - 1 < 0$ ,

isto é,

$$\operatorname{tgh}(x) < 1. \quad (2.111)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh}(x) + 1 &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + 1 \\ &= \frac{e^x - e^{-x} + e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Visto que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^x > 0$  e  $e^{-x} > 0$ , segue de 2.112 que  $\operatorname{tgh}(x) + 1 > 0$ , isto é,

$$f(x) > -1. \quad (2.113)$$

De 2.111 e de 2.113, conclui-se que  $-1 < \operatorname{tgh}(x) < 1$ .

*ii)* para cada  $y \in (-1, 1)$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\operatorname{tgh}(x) = y$ . Caso exista, de 2.109, devemos ter:

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &= y \\ \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} &= y \\ e^{2x} - 1 &= e^{2x}y + y \\ e^{2x}(1 - y) &= 1 + y \\ e^{2x} &= \frac{1 + y}{1 - y} \\ x &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + y}{1 - y} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Dado que para todo  $y \in (-1, 1)$ ,  $1 - y > 0$  e  $1 + y > 0$ , isto é,  $\frac{1 + y}{1 - y} > 0$ . Daí 2.114, temos que existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\operatorname{tgh}(x) = y$ . De fato, pois sendo

$\frac{1+y}{1-y} > 0$ , dado  $y$  nas condições da hipótese, tome  $x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}$ , que teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y} \right) &= \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}} - e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}}}{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}} + e^{-\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}}} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}} - 1}{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}} + 1} \\ &= \frac{e^{\frac{\ln \frac{1+y}{1-y}}{2}} - 1}{e^{\frac{\ln \frac{1+y}{1-y}}{2}} + 1} \\ &= \frac{\frac{1+y}{1-y} - 1}{\frac{1+y}{1-y} + 1} \\ &= \frac{1+y - 1 + y}{1+y + 1 - y} \\ &= y. \end{aligned}$$

Portanto, de *i*) e de *ii*), concluímos que a imagem de  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  é o intervalo  $(-1, 1)$ . □

#### 2.5.4 Estudo da função cotangente hiperbólica

Da definição de cotangente hiperbólica, vimos que não existe  $\operatorname{cotgh} 0$ , porém para cada  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ ,  $\operatorname{cotgh} \alpha$  está definida. Desta forma, a função cotangente hiperbólica fica bem definida através da definição dada a seguir.

**Definição 2.5.4.** A função cotangente hiperbólica  $\operatorname{cotgh}(\cdot) : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \operatorname{cotgh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

.

**Proposição 2.5.4.** A função cotangente hiperbólica é tal que:

1. é uma função ímpar;
2. é injetiva;
3. é uma função decrescente em  $\mathbb{R}_+^*$  e em  $\mathbb{R}_-^*$ , mas não é monótona em  $\mathbb{R}^*$  ;

4. sua imagem é o intervalo  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .

*Demonstração.* Da definição 2.5.4, temos:

$$\begin{aligned}\cotgh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\end{aligned}\tag{2.115}$$

1.  $\cotgh(\cdot)$  é uma função ímpar. Mostremos que dado  $x$ ,  $\cotgh(-x) = -\cotgh(x)$ .  
Observe que para cada  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned}\cotgh(-x) &= \frac{\cosh(-x)}{\sinh(-x)} \\ &= \frac{\cosh x}{-\sinh x} \\ &= -\frac{\cosh x}{\sinh x} \\ &= -\cotgh(x).\end{aligned}$$

Logo,  $\cotgh(\cdot)$  é uma função ímpar.

2.  $\cotgh(\cdot)$  é injetiva. Basta provar que se  $\cotgh(x_1) = \cotgh(x_2)$ , então  $x_1 = x_2$ .  
Observe que de 2.115, se  $\cotgh(x_1) = \cotgh(x_2)$ , então:

$$\begin{aligned}\frac{e^{2x_1} + 1}{e^{2x_1} - 1} &= \frac{e^{2x_2} + 1}{e^{2x_2} - 1} \\ e^{2x_1+2x_2} + e^{2x_2} - e^{2x_1} - 1 &= e^{2x_1+2x_2} + e^{2x_1} - e^{2x_2} - 1 \\ 2e^{2x_1} &= 2e^{2x_2} \\ x_1 &= x_2.\end{aligned}$$

Logo,  $\cotgh(\cdot)$  é injetiva.

3.  $\cotgh(\cdot)$  é decrescente nos intervalos  $\mathbb{R}_-^*$  e  $\mathbb{R}_+^*$ .

Observe que dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ , pelo item 4 do corolário 2.4.7, teremos:

$$\cotgh(x_1) - \cotgh(x_2) = \frac{\sinh(x_2 - x_1)}{\sinh x_1 \cdot \sinh x_2}\tag{2.116}$$

i) Tomemos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-^*$  tais que  $x_1 < x_2$ . Assim,  $x_1 < 0$ ,  $x_2 < 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$ .  
Daí, visto que a função seno hiperbólico é bijetiva e crescente, acarreta

$$\sinh(x_2 - x_1) > 0, \quad \sinh x_1 < 0 \quad \text{e} \quad \sinh x_2 < 0.\tag{2.117}$$

Pelos resultados dados em 2.117, teremos:

$$\frac{\sinh(x_2 - x_1)}{\sinh x_1 \cdot \sinh x_2} > 0. \quad (2.118)$$

De 2.116 e de 2.118, vem:

$$\operatorname{cotgh}(x_1) - \operatorname{cotgh}(x_2) > 0,$$

isto é,

$$\operatorname{cotgh}(x_1) > \operatorname{cotgh}(x_2). \quad (2.119)$$

Concluimos, de 2.119, que  $\operatorname{cotgh}(\cdot)$  é decrescente em  $\mathbb{R}_-^*$ .

*ii)* Tomemos agora  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tais que  $x_1 < x_2$ . Assim,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$  e  $x_2 - x_1 > 0$ . Daí, pelas mesmas condições do caso anterior, teremos:

$$\sinh(x_2 - x_1) > 0, \quad \sinh x_1 > 0 \quad \text{e} \quad \sinh x_2 > 0. \quad (2.120)$$

Pelos resultados obtidos em 2.120, teremos:

$$\frac{\sinh(x_2 - x_1)}{\sinh x_1 \cdot \sinh x_2} > 0. \quad (2.121)$$

De 2.116 e de 2.121, vem:

$$\operatorname{cotgh}(x_1) - \operatorname{cotgh}(x_2) > 0,$$

isto é,

$$\operatorname{cotgh}(x_1) > \operatorname{cotgh}(x_2). \quad (2.122)$$

Concluimos, de 2.122, que  $\operatorname{cotgh}(\cdot)$  é decrescente em  $\mathbb{R}_+^*$ .

*iii)*  $\operatorname{cotgh}(\cdot)$  não é monótona em  $\mathbb{R}^*$ . De fato, pois dado  $x \in \mathbb{R}_-^*$ , já foi visto que:

$$\sinh x < 0 \quad \text{e} \quad \cosh x > 1. \quad (2.123)$$

Segue de 2.123, que:

$$\frac{\cosh x}{\sinh x} < 0, \text{ isto é, } \operatorname{cotgh}(x) < 0. \quad (2.124)$$

Por outro lado, dado  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , tem-se:

$$\operatorname{senh}x > 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{cosh}x > 1; \quad (2.125)$$

daí,

$$\frac{\operatorname{cosh}x}{\operatorname{senh}x} > 0, \text{ isto é, } f(x) > 0. \quad (2.126)$$

Dado que  $\operatorname{cotgh}(\cdot)$  é decrescente em  $\mathbb{R}_-^*$  e em  $\mathbb{R}_+^*$ , segue de 2.124 e de 2.126 que  $\operatorname{cotgh}(\cdot)$  não é monótona em  $\mathbb{R}_-^* \cup \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^*$ .

4. Para provar que a imagem de  $\operatorname{cotgh}(\cdot)$  é  $I = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  basta mostrar que:

*i)* dado  $y \in I$ , existe  $x \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\operatorname{cotgh}(x) = y$ . Caso exista, devemos ter:

$$\begin{aligned} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} &= y \\ e^{2x} + 1 &= y \cdot e^{2x} - y \\ e^{2x} \cdot (y - 1) &= y + 1 \\ e^{2x} &= \frac{y + 1}{y - 1} \\ x &= \frac{1}{2} \ln \frac{y + 1}{y - 1}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

De 2.127, segue que dado  $y \in I$ , existe  $x \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\operatorname{cotgh}(x) = y$ . De fato, pois se  $y > 1$  ou  $y < -1$ , então  $\frac{y + 1}{y - 1} > 0$ . Assim, tomemos  $x = \frac{1}{2} \ln \frac{y + 1}{y - 1}$  e teremos, de 2.115,

$$\begin{aligned} \operatorname{cotgh}(x) &= \frac{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{y + 1}{y - 1}} + 1}{e^{\frac{1}{2} \ln \frac{y + 1}{y - 1}} - 1} \\ &= \frac{e^{\frac{\ln \frac{y + 1}{y - 1}}{2}} + 1}{e^{\frac{\ln \frac{y + 1}{y - 1}}{2}} - 1} \\ &= \frac{\frac{y + 1}{y - 1} + 1}{\frac{y + 1}{y - 1} - 1} \\ &= \frac{y + 1 + y - 1}{y + 1 - y + 1} \\ &= y. \end{aligned}$$

*ii)* e para todo  $x \in \mathbb{R}^*$ ,  $\cotgh(x) < -1$  ou  $f(x) > 1$ . Observe que dado  $x \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\cotgh(x) + 1 &= \frac{\cosh x}{\sinh x} + 1 \\ &= \frac{\cosh x + \sinh x}{\sinh x}\end{aligned}\tag{2.128}$$

$$\begin{aligned}\cotgh(x) - 1 &= \frac{\cosh x}{\sinh x} - 1 \\ &= \frac{\cosh x - \sinh x}{\sinh x}\end{aligned}\tag{2.129}$$

Como já foi visto na subseção 2.4.3,

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad \text{e} \quad \cosh x - \sinh x = e^{-x}.\tag{2.130}$$

Segue de 2.128 e de 2.130, que

$$\cotgh(x) + 1 = \frac{e^x}{\sinh x}\tag{2.131}$$

Dado que  $\sinh x < 0$  e  $e^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_-$ , teremos de 2.131,

$$\cotgh(x) + 1 < 0, \text{ isto é, } \cotgh(x) < -1 \quad \text{para todo } x < 0.\tag{2.132}$$

Por outro lado, de 2.129 e de 2.130, teremos:

$$\cotgh(x) - 1 = \frac{e^{-x}}{\sinh x}.\tag{2.133}$$

Do fato de que  $\sinh x > 0$  e  $e^{-x} > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+$ , teremos de 2.133

$$\cotgh(x) - 1 > 0, \text{ isto é, } \cotgh(x) > 1 \quad \text{para todo } x > 0.\tag{2.134}$$

De 2.132 e de 2.134, concluímos que dado  $x \in \mathbb{R}^*$   $f(x) < -1$  ou  $f(x) > 1$ .

Logo, segue de *i)* e de *ii)* que a imagem de  $\cotgh(\cdot)$  é o intervalo  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

□

### 2.5.5 Estudo da função secante hiperbólica

Como foi visto na subseção 2.3.1, a secante hiperbólica está definida para quaisquer que seja o  $\alpha \in \mathbb{R}$ , isto é, dado  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existe  $\beta \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{sech } \alpha = \beta$ . Assim, será motivada a seguinte definição:



**Definição 2.5.5.** A função secante hiperbólica  $\operatorname{sech}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

**Proposição 2.5.5.** A função secante hiperbólica é tal que:

1. é uma função par;
2. a sua imagem é o intervalo  $(0, 1]$ ;
3. é crescente em  $\mathbb{R}_-$  e decrescente em  $\mathbb{R}_+$ .

*Demonstração.* Da definição 2.5.5, podemos escrever  $\operatorname{sech}(x)$  da seguinte forma:

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} + 1}. \quad (2.135)$$

1.  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é uma função par. Dado  $x \in \mathbb{R}$ , então  $\cosh(-x) = \cosh x$ , pois a função cosseno hiperbólico é uma função par. Segue deste fato e da definição de cossecante hiperbólica, que

$$\begin{aligned} \operatorname{sech}(-x) &= \frac{1}{\cosh x} \\ &= \operatorname{sech}(x). \end{aligned} \quad (2.136)$$

Conclui-se de 2.136 que  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é par.

2. Para mostrar que a imagem de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é o intervalo  $(0, 1]$ , basta provar que:

- i)*  $0 < \operatorname{sech}(x) \leq 1$  para todo  $x$  no domínio de  $\operatorname{sech}(\cdot)$ . Tomemos  $x \in \mathbb{R}$ . Como já foi visto,  $\cosh x \geq 1$ . Isto é,

$$0 < \frac{1}{\cosh x} \leq 1. \quad (2.137)$$

De 2.137 e da definição de secante hiperbólica, teremos:

$$0 < \operatorname{sech}(x) \leq 1.$$

- ii)* e para cada  $y \in (0, 1]$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\operatorname{sech}(x) = y$ . Caso exista, de 2.135, devemos ter:

$$\begin{aligned} \frac{2e^x}{e^{2x} + 1} &= y \\ y \cdot e^{2x} + y &= 2 \cdot e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y \cdot (e^x)^2 - 2e^x + y &= 0 \\
e^x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \\
e^x &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y} \\
x = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} &\quad \text{ou} \quad x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}. \tag{2.138}
\end{aligned}$$

Observe que dado  $0 < y \leq 1$ , então  $0 \leq \sqrt{1 - y^2} < 1$ , isto é,

$$0 < 1 - \sqrt{1 - y^2} \leq 1 \quad \text{e} \quad 1 \leq 1 + \sqrt{1 - y^2} < 2.$$

Daí, concluímos que:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} > 0. \tag{2.139}$$

Segue, de 2.139, que

$$\ln \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \ln \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \in \mathbb{R}. \tag{2.140}$$

De 2.138 e de 2.140, somos motivados a afirmar que dado  $0 < y \leq 1$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $\text{sech}(x) = y$ . De fato, tome, por exemplo,  $x = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$ .

Daí, segue de 2.135 que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2e^{\ln \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}}}{e^{\frac{2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}}{y}} + 1} \\
&= 2 \cdot \frac{y}{\frac{(1 - \sqrt{1 - y^2})^2}{y^2} + 1} \\
&= 2 \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \cdot \frac{y^2}{(1 - \sqrt{1 - y^2})^2 + y^2} \\
&= 2 \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \cdot \frac{y^2}{1 - 2\sqrt{1 - y^2} + 1 - y^2 + y^2} \\
&= \frac{2y(1 - \sqrt{1 - y^2})}{2(1 - \sqrt{1 - y^2})} \\
&= y.
\end{aligned}$$

De *i*) e de *ii*), concluímos que a imagem de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é  $(0, 1]$ .

3. Provemos que  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é crescente em  $\mathbb{R}_-$ . Tome  $x_1 < x_2 \leq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}(x_1) - \operatorname{sech}(x_2) &= \frac{1}{\cosh x_1} - \frac{1}{\cosh x_2} \\ &= \frac{\cosh x_2 - \cosh x_1}{\cosh x_1 \cdot \cosh x_2}.\end{aligned}\tag{2.141}$$

Como a função  $\cosh(\cdot)$  é decrescente em  $\mathbb{R}_-$  e  $\cosh(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , segue de 2.141, que

$$\begin{aligned}\operatorname{sech}(x_1) - \operatorname{sech}(x_2) &< 0 \\ \operatorname{sech}(x_1) &< \operatorname{sech}(x_2).\end{aligned}$$

Logo,  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é crescente em  $\mathbb{R}_-$ . Visto que  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é par, segue do resultado anterior que esta é uma função decrescente em  $\mathbb{R}_+$ .

□

### 2.5.6 Estudo da função cossecante hiperbólica

De forma semelhante à cotangente hiperbólica, a cossecante hiperbólica não está definida em 0, ou seja, não existe  $\operatorname{cossech}0$ . Por outro lado, do fato de que  $\operatorname{senh}\alpha \neq 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ , segue que, dado  $\alpha \neq 0$ , existe  $\operatorname{cosseh}\alpha$ . Daí, faz sentido apresentar a seguinte definição para a função cossecante hiperbólica.

**Definição 2.5.6.** *Define-se a função cossecante hiperbólica  $\operatorname{cossech}(\cdot) : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  por:*

$$\forall x \neq 0, \quad \operatorname{cossech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

**Proposição 2.5.6.** *A função cossecante hiperbólica é tal que:*

1. *é uma função ímpar;*
2. *é uma função injetiva;*
3.  *$\operatorname{cossech}(\cdot)$  é decrescente nos intervalos  $\mathbb{R}_-$  e  $\mathbb{R}_+$ , mas não é decrescente em  $\mathbb{R}^*$ ;*
4. *a imagem de  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é o conjunto  $\mathbb{R}^*$ .*

*Demonstração.* Da definição 2.5.6, podemos escrever  $\operatorname{cossech}(x)$  da seguinte forma:

$$\operatorname{cossech}(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}\tag{2.142}$$

1.  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é ímpar. Dado  $x \in \mathbb{R}^*$ , então  $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}x$ , pois a função seno hiperbólico é ímpar. Assim, da definição de secante hiperbólica, teremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{cossech}(-x) &= \frac{1}{-\operatorname{senh}x} \\ &= -\frac{1}{\operatorname{senh}x} \\ &= -\operatorname{cossech}(x).\end{aligned}\tag{2.143}$$

Concluimos, de 2.143, que  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é ímpar.

2.  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é injetiva. Basta mostrar que dados  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$  tais que  $\operatorname{cossech}(x_1) = \operatorname{cossech}(x_2)$ , então  $x_1 = x_2$ .

Observe que para quaisquer  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$ , tais que  $\operatorname{cossech}(x_1) = \operatorname{cossech}(x_2)$ , teremos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{senh}x_1} &= \frac{1}{\operatorname{senh}x_2} \\ \operatorname{senh}x_2 &= \operatorname{senh}x_1.\end{aligned}\tag{2.144}$$

Dado que a função seno hiperbólico é injetiva, segue de 2.144 que

$$x_1 = x_2.$$

Portanto,  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é injetiva.

3. para mostrar o item 3, tomemos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$  e analisaremos a diferença

$$\operatorname{cossech}(x_1) - \operatorname{cossech}(x_2).$$

Observe que pelo item 4 do corolário 2.4.8, teremos:

$$\operatorname{cossech}(x_1) - \operatorname{cossech}(x_2) = 2 \frac{\operatorname{senh} \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \operatorname{cosh} \frac{x_2 + x_1}{2}}{\operatorname{senh}x_1 \cdot \operatorname{senh}x_2}.\tag{2.145}$$

- i)* Tomemos  $x_1 < x_2 < 0$ . Assim,  $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ . Por outro lado, já foi visto que se  $x < 0$ , então  $\operatorname{senh}x < 0$ ; se  $x > 0$ , então  $\operatorname{senh}x > 0$ ; e  $\operatorname{cosh}x > 1$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}^*$ . Segue destes fatos, que:

$$2 \frac{\operatorname{senh} \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \operatorname{cosh} \frac{x_2 + x_1}{2}}{\operatorname{senh}x_1 \cdot \operatorname{senh}x_2} > 0.\tag{2.146}$$

De 2.145 e de 2.146, teremos:

$$\operatorname{cossech}(x_1) - \operatorname{cossech}(x_2) > 0, \text{ isto é, } \operatorname{cossech}(x_1) > \operatorname{cossech}(x_2).$$

Logo  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é decrescente em  $\mathbb{R}_-^*$ .

ii) Tomemos agora  $0 < x_1 < x_2$ . Desta forma,  $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$ . Assim, de modo análogo ao caso anterior, segue que:

$$2 \frac{\sinh \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot \cosh \frac{x_2 + x_1}{2}}{\sinh x_1 \cdot \sinh x_2} > 0. \quad (2.147)$$

De 2.145 e de 2.148, conclui-se que:

$$\operatorname{cossech}(x_1) - \operatorname{cossech}(x_2) > 0, \text{ isto é, } \operatorname{cossech}(x_1) > \operatorname{cossech}(x_2).$$

Portanto,  $f$  é decrescente em  $\mathbb{R}_+^*$ .

iii) Para mostrar que  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  não é decrescente em  $\mathbb{R}^*$ , tomemos  $x_1 < 0$  e  $x_2 > 0$ . Assim, temos  $x_1 < x_2$ , mas  $\operatorname{cossech}(x_1) < 0 < \operatorname{cossech}(x_2)$ , o que prova o resultado.

4. Para provar que a imagem de  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é  $\mathbb{R}^*$ , devemos mostrar que dado  $y \in \mathbb{R}^*$ , existe  $x \in \mathbb{R}^*$  tal que  $f(x) = y$ . Se existir, de 2.142, devemos ter:

$$\begin{aligned} \frac{2e^x}{e^{2x} - 1} &= y \\ y \cdot e^{2x} - y &= 2 \cdot e^x \\ y \cdot (e^x)^2 - 2 \cdot e^x - y &= 0 \\ e^x &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y^2}}{2y} \\ e^x &= \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} \quad \text{ou} \quad e^x = \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y}. \end{aligned} \quad (2.148)$$

A partir de 2.148, a demonstração segue em dois casos:

i) Se  $y < 0$ , então  $\frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y} > 0$ ; isto é,  $\ln \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y} \in \mathbb{R}$ . Assim, dado  $y \in \mathbb{R}_-^*$ , tomemos:

$$x = \ln \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y}, \quad (2.149)$$

daí, teremos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{cossech}(x) &= \frac{2.e^{\ln \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y}}}{e^{2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y}} - 1} \\
 &= 2 \cdot \frac{1 - \sqrt{1 + y^2}}{y} \cdot \frac{y^2}{(1 - \sqrt{1 + y^2})^2 - y^2} \\
 &= y \cdot \frac{2 - 2\sqrt{1 + y^2}}{2 - 2\sqrt{1 + y^2}} \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

ii) Por outro lado, observe que  $\frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} > 0$  para todo  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , ou seja se  $y > 0$ , então  $\ln \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y} \in \mathbb{R}$ . Assim, dado  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , tome:

$$x = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + y^2}}{y},$$

daí, de modo análogo ao caso anterior, teremos:

$$\operatorname{cossech}(x) = y.$$

Segue, portanto, de *i*) e de *ii*), que a imagem da função  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  é  $\mathbb{R}^*$ .

□

## 2.6 Funções trigonométricas hiperbólicas inversas

Apresentaremos a seguir as funções trigonométricas hiperbólicas inversas. Neste estudo, estaremos considerando o fato de que sendo

(...)  $f : A \rightarrow B$  uma função injetiva definida em um conjunto  $A$  e tomando valores em um conjunto  $B$ . Relembremos que  $f$  injetiva significa  $f(x_1) \neq f(x_2)$  para  $x_1 \neq x_2$  em  $A$ . Para uma tal  $f$ , podemos definir a função inversa  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ , que tem por domínio a imagem  $f(A)$  e por contradomínio o conjunto  $A$ , do seguinte modo: para  $y \in f(A)$ , temos  $f^{-1}(y) = x$ , onde  $x \in A$  é o elemento (único, por ser injetiva) tal que  $f(x) = y$  (FIGUEIREDO, 1996, p. 69).

Além disso, consideremos que, nesse contexto, temos:

$$f^{-1}(f(x)) = x = f(f^{-1}(x)).$$

Dessa forma, concluímos que dado  $x$  no domínio de  $f^{-1}$ , se  $y$ , na imagem de  $f^{-1}$ , é tal que  $f^{-1}(x) = y$ , teremos:  $f(y) = x$ .

Diante disso, inicialmente, será feita uma análise do domínio e da imagem da função trigonométrica hiperbólica. A partir daí, será obtida a função trigonométrica hiperbólica inversa.

### 2.6.1 Função seno hiperbólico inversa

Lembremos que a função seno hiperbólico é injetora onde sua imagem e seu domínio são o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ . Dessa forma, ela possui uma função inversa, denotada por  $\sinh^{-1}(\cdot)$ , que obteremos a seguir.

Tome  $x \in \mathbb{R}$ , e seja  $y \in \mathbb{R}$  tais que  $\sinh(y) = x$ , daí teremos:

$$\begin{aligned} e^y - e^{-y} &= 2x \\ e^{2y} - 2xe^y - 1 &= 0 \\ e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} \\ e^y &= x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \end{aligned} \tag{2.150}$$

Como para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x + \sqrt{x^2 + 1} > 0$  e  $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ , segue de 2.150 que:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Portanto, a função seno hiperbólico inversa  $\sinh^{-1}(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

### 2.6.2 Função cosseno hiperbólico inversa

Dado que a função cosseno hiperbólico é crescente em  $\mathbb{R}_+$ , ela é injetiva sobre sua imagem nesse intervalo. Além disso,

$$\cosh(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty),$$

pois a função  $\cosh(\cdot)$  é par e sua imagem é  $[1, +\infty)$ . Dessa forma, ela possui uma função inversa de  $[1, +\infty)$  em  $\mathbb{R}_+$ , denotada por  $\cosh^{-1}(\cdot)$ , a qual obteremos a seguir.

Tome  $x \in [1, +\infty)$ , e seja  $y \in \mathbb{R}_+$  tais que  $\cosh(y) = x$ , daí teremos:

$$\begin{aligned} e^y + e^{-y} &= 2x \\ e^{2y} - 2xe^y + 1 &= 0 \\ e^y &= \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4}}{2} \\ e^y &= x \pm \sqrt{x^2 - 1}. \end{aligned} \tag{2.151}$$

Devemos ter  $y \geq 0$ . Por outro lado, pelas condições de  $x$ , verifica-se que  $0 < x - \sqrt{x^2 - 1} \leq 1$  e  $x + \sqrt{x^2 - 1} \geq 1$ . Logo, de 2.151, segue que:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Portanto, a função cosseno hiperbólico inversa  $\cosh^{-1}(\cdot) : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_+$  é dada por:

$$\forall x \in [1, +\infty), \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

### 2.6.3 Função tangente hiperbólica inversa

A função tangente hiperbólica é injetiva sobre sua imagem, que é o intervalo  $(-1, 1)$ . Assim, ela possui uma função inversa de  $(-1, 1)$  em  $\mathbb{R}$ , denotada por  $\operatorname{tgh}^{-1}(\cdot)$ , a qual obteremos a seguir.

Tomemos então,  $x \in (-1, 1)$ , e seja  $y \in \mathbb{R}$  tais que  $\operatorname{tgh}(y) = x$ , daí teremos:

$$\begin{aligned} \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} &= x \\ \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} &= x \\ e^{2y} - xe^{2y} &= 1 + x \\ e^{2y} &= \frac{1 + x}{1 - x} \\ y &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}. \end{aligned}$$

Portanto, a função tangente hiperbólica inversa  $\operatorname{tgh}^{-1}(\cdot) : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$  é dada por:

$$\forall x \in A, \operatorname{tgh}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

### 2.6.4 Função cotangente hiperbólica inversa

A função cotangente hiperbólica possui domínio  $\mathbb{R}^*$  e é injetiva sobre sua imagem, que é o intervalo  $\mathbb{R} - \{[-1, 1]\}$ . Assim, ela possui uma função inversa de  $\operatorname{cotgh}(\mathbb{R}^*)$  em  $\mathbb{R}^*$ , denotada por  $\operatorname{cotgh}^{-1}(\cdot)$ , a qual obteremos a seguir.



Tomemos  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $|x| > 1$ , e seja  $y \in \mathbb{R}^*$  tais que  $\operatorname{cotgh}(y) = x$ , daí teremos:

$$\begin{aligned}\frac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}} &= x \\ \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} &= x \\ e^{2y} - xe^{2y} &= -x - 1 \\ e^{2y} &= \frac{x + 1}{x - 1} \\ y &= \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}.\end{aligned}$$

Portanto, escrevendo  $A = \mathbb{R} - \{[-1, 1]\}$ , a função cotagente hiperbólica inversa  $\operatorname{cotgh}^{-1}(\cdot) : A \rightarrow \mathbb{R}^*$  é dada por:

$$\forall x \in A, \operatorname{cotgh}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}.$$

### 2.6.5 Função secante hiperbólica inversa

Inicialmente, lembremos que a função secante hiperbólica é decrescente em  $\mathbb{R}_+$ , isto é, injetiva sobre sua imagem nesse intervalo. Por outro lado,

$$\operatorname{sech}(\mathbb{R}_+) = (0, 1],$$

uma vez que  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é uma função par e sua imagem é o intervalo  $(0, 1]$ . Dessa forma, ela possui uma função inversa de  $(0, 1]$  em  $\mathbb{R}_+$ , denotada por  $\operatorname{sech}^{-1}(\cdot)$ , a qual obteremos a seguir.

Tomemos então  $x \in (0, 1]$ , e seja  $y \in \mathbb{R}_+$  tais que  $\operatorname{sech}(y) = x$ , daí teremos

$$\begin{aligned}\frac{2}{e^y + e^{-y}} &= x \\ \frac{2e^y}{e^{2y} + 1} &= x \\ xe^{2y} - 2e^y + x &= 0 \\ e^y &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4x^2}}{2x} \\ e^y &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - x^2}}{x}.\end{aligned}$$

Das condições de  $x$ , verifica-se que

$$0 < \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \leq 1 \text{ e } \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \geq 1.$$

Como  $y \geq 0$ , devemos ter:

$$y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

Portanto, a função secante hiperbólica inversa  $\operatorname{sech}^{-1}(\cdot) : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  é dada por:

$$\forall x \in A, \operatorname{sech}^{-1}(x) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

### 2.6.6 Função cossecante hiperbólica inversa

Lembremos que a função cossecante hiperbólica é injetiva e, sua imagem e seu domínio são iguais a  $\mathbb{R}^*$ . Dessa forma, ela possui uma função inversa, que é denotada por  $\operatorname{cossech}^{-1}(\cdot)$ , a qual obteremos a seguir.

Tomemos  $x \in \mathbb{R}^*$ , e seja  $y \in \mathbb{R}^*$  tais que  $\operatorname{cossech}(y) = x$ , daí teremos:

$$\begin{aligned} \frac{2}{e^y - e^{-y}} &= x \\ \frac{2e^y}{e^{2y} - 1} &= x \\ xe^{2y} - 2e^y - x &= 0 \\ e^y &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4x^2}}{2x} \\ e^y &= \frac{1 \pm \sqrt{1 + x^2}}{x} \\ y &= \begin{cases} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \ln \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, a função cossecante hiperbólica inversa  $\operatorname{cossech}^{-1}(\cdot) : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  é dada por:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{cossech}^{-1}(x) = \begin{cases} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}, & \text{se } x > 0 \\ \ln \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

## 2.7 Teoremas complementares

Nesta seção tem-se o objetivo de apresentar alguns teoremas envolvendo mais de uma função hiperbólica na mesma proposição. Esses teoremas servirão de suporte para estudos posteriores.

**Teorema 2.7.1.** Dado  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , se  $x > y$ , então:

$$\operatorname{cosh}y \cdot (x - y) + \operatorname{senhy} - \operatorname{senhx} < 0.$$

*Demonstração.* Observe que dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , do item 2 do corolário 2.4.6,

$$\begin{aligned} \operatorname{senhy} - \operatorname{senhx} &= 2\operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} \\ \operatorname{cosh}y \cdot (x - y) + \operatorname{senhy} - \operatorname{senhx} &= \operatorname{cosh}y \cdot (x - y) + 2\operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} \end{aligned} \quad (2.152)$$

Tomemos  $0 < y < x$ ; assim, teremos:

$$0 < y < \frac{x+y}{2} \quad (2.153)$$

$$\frac{x-y}{2} > 0 \quad \text{e} \quad x - y > 0. \quad (2.154)$$

Segue de 2.153 e pela proposição 2.5.2, que:

$$\operatorname{cosh}y < \operatorname{cosh}\frac{x+y}{2}. \quad (2.155)$$

De 2.154 e 2.155, tem-se:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh}y \cdot (x - y) &< \operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} \cdot (x - y) \\ \operatorname{cosh}y \cdot (x - y) + 2\operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} &< \operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} \cdot (x - y) + 2\operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} \\ &< 2\operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} \left[ \frac{x-y}{2} - \operatorname{senh}\frac{x-y}{2} \right] \end{aligned} \quad (2.156)$$

De 2.154 e do Teorema 2.5.2, vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}\frac{x-y}{2} &> \frac{x-y}{2} \\ \frac{x-y}{2} - \operatorname{senh}\frac{x-y}{2} &< 0. \end{aligned} \quad (2.157)$$

Considerando que  $\operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} > 0$ , segue de 2.156 e 2.157, que:

$$\operatorname{cosh}y \cdot (x - y) + 2\operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \cdot \operatorname{cosh}\frac{y+x}{2} < 0. \quad (2.158)$$

Portanto, de 2.152 e de 2.158, conclui-se que:

$$\operatorname{cosh}y \cdot (x - y) + \operatorname{senhy} - \operatorname{senhx} < 0.$$

□

**Teorema 2.7.2.** Dado  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , se  $x > y$ , então:

$$\operatorname{senhy} \cdot (x - y) + \operatorname{coshy} - \operatorname{coshx} < 0.$$

*Demonstração.* Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , pelo item 4 do corolário 2.4.6, teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{coshy} - \operatorname{coshx} &= 2\operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \\ \operatorname{senhy} \cdot (x - y) + \operatorname{coshy} - \operatorname{coshx} &= \operatorname{senhy} \cdot (x - y) + 2\operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \end{aligned} \quad (2.159)$$

Tome  $0 < y < x$ ; daí teremos:

$$0 < y < \frac{y+x}{2} \quad (2.160)$$

$$\frac{x-y}{2} > 0 \quad \text{e} \quad x - y > 0. \quad (2.161)$$

Visto que  $\operatorname{senh}0 = 0$ , segue de 2.160 e da proposição 2.5.1, que:

$$0 < \operatorname{senhy} < \operatorname{senh}\frac{y+x}{2}. \quad (2.162)$$

De 2.161 e 2.162, vem:

$$\begin{aligned} \operatorname{senhy} \cdot (x - y) &< \operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot (x - y) \\ \operatorname{senhy} \cdot (x - y) + 2\operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{y-x}{2} &< \operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot (x - y) + 2\operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot \operatorname{senh}\frac{y-x}{2} \\ &< 2\operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot \left[ \frac{x-y}{2} - \operatorname{senh}\frac{x-y}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Por outro lado, de 2.161 e do Teorema 2.5.2, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{2} &< \operatorname{senh}\frac{x-y}{2} \\ \frac{x-y}{2} - \operatorname{senh}\frac{x-y}{2} &< 0. \end{aligned} \quad (2.164)$$

De 2.162 e 2.164, vem:

$$2\operatorname{senh}\frac{y+x}{2} \cdot \left[ \frac{x-y}{2} - \operatorname{senh}\frac{x-y}{2} \right] < 0. \quad (2.165)$$

De 2.159, 2.163 e 2.165, conclui-se que:

$$\operatorname{senhy} \cdot (x - y) + \operatorname{coshy} - \operatorname{coshx} < 0.$$

□

**Teorema 2.7.3.** Dado  $y \in \mathbb{R}_-^*$ , se  $y < x < 0$ , então:

$$\operatorname{sech}^2 y \cdot (x - y) + \operatorname{tgh} y - \operatorname{tgh} x < 0.$$

*Demonstração.* Dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , do item 2 do corolário 2.4.7,

$$\begin{aligned} \operatorname{tgh} y - \operatorname{tgh} x &= \frac{\operatorname{senh}(y - x)}{\operatorname{cosh} y \cdot \operatorname{cosh} x} \\ \operatorname{sech}^2 y \cdot (x - y) + \operatorname{tgh} y - \operatorname{tgh} x &= \frac{x - y}{\operatorname{cosh}^2 y} - \frac{\operatorname{senh}(x - y)}{\operatorname{cosh} y \cdot \operatorname{cosh} x} \\ &= \frac{\operatorname{cosh} x \cdot (x - y) - \operatorname{cosh} y \cdot \operatorname{senh}(x - y)}{\operatorname{cosh}^2 y \cdot \operatorname{cosh} x}. \end{aligned} \quad (2.166)$$

Tomemos  $y < x < 0$ . Assim, da proposição 2.5.2, segue que:

$$1 < \operatorname{cosh} x < \operatorname{cosh} y. \quad (2.167)$$

Além disso, tem-se:

$$x - y > 0. \quad (2.168)$$

Segue de 2.167 e 2.168 que:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} x \cdot (x - y) &< \operatorname{cosh} y \cdot (x - y) \\ \operatorname{cosh} x \cdot (x - y) - \operatorname{cosh} y \cdot \operatorname{senh}(x - y) &< \operatorname{cosh} y \cdot (x - y) - \operatorname{cosh} y \cdot \operatorname{senh}(x - y) \\ &< \operatorname{cosh} y \cdot [(x - y) - \operatorname{senh}(x - y)]. \end{aligned} \quad (2.169)$$

De 2.168 e do teorema 2.5.2, segue que:

$$\begin{aligned} (x - y) &< \operatorname{senh}(x - y) \\ (x - y) - \operatorname{senh}(x - y) &< 0. \end{aligned} \quad (2.170)$$

De 2.166, 2.167, 2.169 e 2.170 segue que:

$$\operatorname{sech}^2 y \cdot (x - y) + \operatorname{tgh} y - \operatorname{tgh} x < 0.$$

□

**Teorema 2.7.4.** Dado  $y \in \mathbb{R}_+^*$ , se  $0 < x < y$ , então:

$$-\operatorname{cossech}^2 y \cdot (x - y) + \operatorname{cotg} y - \operatorname{cotg} x < 0.$$

*Demonstração.* Dados  $x, y \in \mathbb{R}^*$ , tem-se do item 4 do corolário 2.4.7:

$$\begin{aligned} -\operatorname{cosech}^2 y \cdot (x - y) + \operatorname{cotgh} y - \operatorname{cotgh} x &= \frac{-(x - y)}{\operatorname{senh}^2 y} + \frac{\operatorname{senh}(x - y)}{\operatorname{senh} y \cdot \operatorname{senh} x} \\ -\operatorname{cosech}^2 y \cdot (x - y) + \operatorname{cotgh} y - \operatorname{cotgh} x &= \frac{-\operatorname{senh} x \cdot (x - y) + \operatorname{senh} y \cdot \operatorname{senh}(x - y)}{\operatorname{senh}^2 y \cdot \operatorname{senh} x}. \end{aligned} \quad (2.171)$$

Tomemos  $0 < x < y$ . Assim,

$$x - y < 0, \quad \text{isto é,} \quad -(x - y) > 0, \quad (2.172)$$

e pela proposição 2.5.1, teremos:

$$0 < \operatorname{senh} x < \operatorname{senh} y. \quad (2.173)$$

De 2.172 e 2.173, teremos:

$$\begin{aligned} -\operatorname{senh} x \cdot (x - y) &< -\operatorname{senh} y \cdot (x - y) \\ -\operatorname{senh} x \cdot (x - y) + \operatorname{senh} y \cdot \operatorname{senh}(x - y) &< -\operatorname{senh} y \cdot (x - y) + \operatorname{senh} y \cdot \operatorname{senh}(x - y) \\ &< \operatorname{senh} y \cdot [-(x - y) + \operatorname{senh}(x - y)]. \end{aligned} \quad (2.174)$$

De 2.172 ( $x - y < 0$ ) e do Teorema 2.5.2, teremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(x - y) &< x - y \\ -(x - y) + \operatorname{senh}(x - y) &< 0. \end{aligned} \quad (2.175)$$

Portanto, de 2.171, 2.173, 2.174 e 2.175, conclui-se que:

$$-\operatorname{cosech}^2 y \cdot (x - y) + \operatorname{cotgh} y - \operatorname{cotgh} x < 0.$$

□

## 2.8 Representação gráfica das funções trigonométricas hiperbólicas

Para representar graficamente uma função real é necessário ter noção do comportamento da curva que representa o gráfico desta função em todos os intervalos que compõem o seu domínio. Nesse sentido, os pontos mais importantes a serem analisados são: o conceito de reta tangente ao gráfico num ponto dado, que por sua vez permite a análise do segundo, que é a concavidade da curva num determinado intervalo do domínio da função.

Neste estudo, além de outras propriedades, estará sendo feito o uso, sem demonstração, de resultados básicos do limite de funções hiperbólicas, que são:

Dado  $a \in \mathbb{R}$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} \sinh x = \sinh a \quad (2.176)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \cosh x = \cosh a. \quad (2.177)$$

Ressalta-se que os gráficos das funções hiperbólicas e de suas funções inversas apresentado neste trabalho foram gerados pelo Geogebra, software de geometria dinâmica.

### 2.8.1 Reta tangente e concavidade: definições e propriedades

Como pode ser visto em (STEWART, 2009, v.1, p. 73), a inclinação (coeficiente angular) da reta tangente ao gráfico de uma função  $f$  num ponto  $P$  é calculada a partir das inclinações das retas secantes a essa curva que passam pelo ponto  $P$ . O procedimento consiste em tomar um ponto  $Q$  arbitrário do gráfico de  $f$  e calcular o limite da inclinação da reta  $\overleftrightarrow{PQ}$  quando  $Q \rightarrow P$  ( $Q$  tende a  $P$ ). Isso se resume na definição a seguir.

**Definição 2.8.1.** *Seja  $f$  uma função real e,  $m$  e  $m_{PQ}$  os coeficientes angulares da reta tangente em  $P$  e da reta secante  $\overleftrightarrow{PQ}$ , respectivamente, ao gráfico de  $f$ , tem-se:*

$$m = \lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ}.$$

Observe que se  $P(x_0, f(x_0))$ ,  $Q(x, f(x))$  e  $m_{PQ}$  é a inclinação da reta  $\overleftrightarrow{PQ}$ , então:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2.178)$$

Além disso,

$$Q \rightarrow P \implies x \rightarrow x_0. \quad (2.179)$$

Segue da definição 2.8.1, de 2.178 e de 2.179 que o coeficiente angular da reta tangente em  $P(x_0, f(x_0))$  é:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2.180)$$

quando esse limite existir.

Note que uma equação da reta tangente neste caso será dada por:

$$y = m(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0). \quad (2.181)$$

O limite em 2.180 é conhecido como derivada de uma função  $f$  no ponto  $x_0$ , objeto importante na teoria do cálculo diferencial e integral, que pode ser encontrado em Stewart (2009, v.1) ou em Leithold (1994, v.1).

**Definição 2.8.2.** *Se o gráfico de uma função  $f$  estiver acima de todas as suas retas tangentes no intervalo  $I$ , então ele é dito côncavo para cima em  $I$ . Se o gráfico de  $f$  estiver abaixo de todas as suas tangentes em  $I$ , ele é dito côncavo para baixo em  $I$  (STEWART, 2009, v.1, p. 271).*

Dados uma função real  $f$  e  $I \subset D(f)$ , se para cada  $x \in I$ , existe  $m(x)$ , então faz sentido afirmar que existe uma função

$$\begin{aligned} m : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto m(x). \end{aligned} \tag{2.182}$$

De fato, pois pelo Teorema da Unicidade do Limite<sup>10</sup>, o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

quando existe, é único. Isto é, para cada  $x \in I$ , existe um único correspondente  $m(x) \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.8.1.** *Seja  $f$  uma função real e  $I \subset D(f)$  tal que para todo  $x \in I$ , existe  $m(x)$ . Se  $x_0$  é a abscissa de um ponto onde o gráfico de  $f$  muda a concavidade, então se o limite*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$$

*existir, ele deve ser nulo.*

A proposição 2.8.1 será utilizada nos estudos das concavidades dos gráficos das funções hiperbólicas secante e cossecante, e sua demonstração encontra-se no apêndice B.

## 2.8.2 Representação gráfica da função seno hiperbólico

Seja  $x_0 \in D[\sinh(\cdot)]$ . Calculemos para  $\sinh(\cdot)$ ,  $m(x_0)$  quando existir. Segue de 2.180 que:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh x - \sinh x_0}{x - x_0}. \tag{2.183}$$

Aplicando o item 2 do corolário 2.4.6 e a propriedade do limite do produto<sup>11</sup> em 2.183, teremos:

---

<sup>10</sup>Veja o ANEXO C

<sup>11</sup>Veja o ANEXO B



$$\begin{aligned}
m(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2\sinh\frac{x-x_0}{2} \cdot \cosh\frac{x+x_0}{2}}{x-x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \cosh\frac{x+x_0}{2}.
\end{aligned} \tag{2.184}$$

Fazendo  $y = \frac{x-x_0}{2}$ , acarreta  $\lim_{x \rightarrow x_0} y = 0$ , e de  $y' = \frac{x+x_0}{2}$ , teremos  $\lim_{x \rightarrow x_0} y' = x_0$ . Logo, do Teorema do Limite da Substituição, do Limite Fundamental da Trigonometria Hiperbólica, de 2.177 e de 2.184, teremos:

$$\begin{aligned}
m(x_0) &= 1 \cdot \cosh x_0 \\
&= \cosh x_0.
\end{aligned} \tag{2.185}$$

Como  $x_0$  foi tomado arbitrário e a função cosseno hiperbólico está definida para todo número real, substituindo  $x_0$ , em 2.185, por  $x$ , para a função seno hiperbólico pode-se escrever:

$$\forall x \in \mathbb{R}, m(x) = \cosh x. \tag{2.186}$$

Analisemos a concavidade do gráfico de  $\sinh(\cdot)$  em  $\mathbb{R}_+$ . Seja  $I \subset \mathbb{R}_+$  e  $x_0$  no interior de  $I$ . De 2.186, a equação da reta tangente ao gráfico de  $\sinh(\cdot)$  em  $P(x_0, \sinh(x_0))$  é:

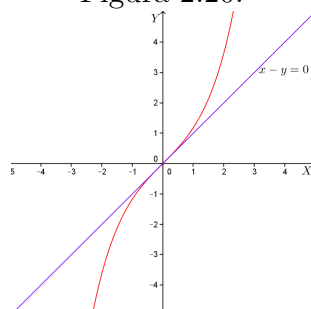
$$y = \cosh x_0 \cdot (x - x_0) + \sinh x_0. \tag{2.187}$$

Suponha que o gráfico de  $\sinh(\cdot)$  tenha concavidade para baixo em  $I$ . Assim, segue de 2.187 e por definição, que para todo  $x \in I$  e  $x \neq x_0$ :

$$\cosh x_0 \cdot (x - x_0) + \sinh x_0 - \sinh x > 0.$$

Absurdo, pois sendo  $x_0$  no interior de  $I$ , existe  $x \in I$  com  $x > x_0$ , o que contradiz o Teorema 2.7.1. Como  $I$  foi tomado arbitrário, conclui-se que o gráfico de  $\sinh(\cdot)$  tem concavidade para cima em  $\mathbb{R}_+$  e côncavo para baixo em  $\mathbb{R}_-$ , já que a função seno hiperbólico é ímpar. A figura 2.20 ilustra o gráfico de  $\sinh(\cdot)$  e a reta de equação  $x - y = 0$ , que é sua tangente em  $(0, 0)$ .

Figura 2.20:



Fonte: Autor

### 2.8.3 Representação gráfica da função cosseno hiperbólico

Seja  $\cosh(\cdot)$ , a função cosseno hiperbólico e  $x_0 \in D[\cosh(\cdot)]$ . Calculemos para  $\cosh(\cdot)$ ,  $m(x_0)$  quando existir. Segue de 2.180 que:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cosh x - \cosh x_0}{x - x_0}. \quad (2.188)$$

Aplicando o item 4 do corolário 2.4.6 em 2.188, teremos:

$$\begin{aligned} m(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2\sinh \frac{x-x_0}{2} \cdot \sinh \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \sinh \frac{x+x_0}{2}. \end{aligned} \quad (2.189)$$

Fazendo  $y = \frac{x - x_0}{2}$ , acarreta  $\lim_{x \rightarrow x_0} y = 0$ . Logo, do Teorema do Limite da Substituição, do Limite Fundamental da Trigonometria Hiperbólica e de 2.189, teremos:

$$\begin{aligned} m(x_0) &= 1 \cdot \sinh x_0 \\ &= \sinh x_0. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Como  $x_0$  foi tomado arbitrário e a função seno hiperbólico possui domínio  $\mathbb{R}$ , substituindo  $x_0$ , em 2.190, por  $x$ , para a função cosseno hiperbólico pode-se escrever:

$$\forall x \in \mathbb{R}, m(x) = \sinh x. \quad (2.191)$$

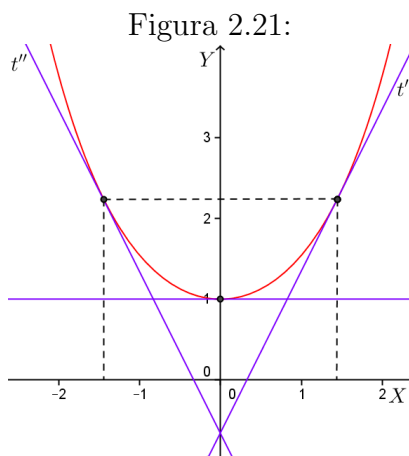
Analisemos agora a concavidade do gráfico de  $\cosh(\cdot)$  em  $\mathbb{R}_+$ . Seja  $I \subset \mathbb{R}_+$  e  $x_0$  no interior de  $I$ . De 2.191, a equação da reta tangente ao gráfico de  $\cosh(\cdot)$  em  $P(x_0, \cosh(x_0))$  é:

$$y = \sinh x_0 \cdot (x - x_0) + \cosh x_0. \quad (2.192)$$

Suponha que o gráfico de  $\cosh(\cdot)$  tenha concavidade para baixo em  $I$ . Assim, segue de 2.192 e por definição, que para todo  $x \in I$  e  $x \neq x_0$ :

$$\sinh x_0 \cdot (x - x_0) + \cosh x_0 - \cosh x < 0.$$

Absurdo, pois sendo  $x_0$  no interior de  $I$ , existe  $x \in I$  com  $x > x_0$ , o que contradiz o Teorema 2.7.2. Como  $I$  foi tomado arbitrário, conclui-se que o gráfico de  $\cosh(\cdot)$  tem concavidade para cima em  $\mathbb{R}_+$ , portanto, côncavo para cima em  $\mathbb{R}$ , já que a função cosseno hiperbólico é par. A figura 2.21 ilustra o gráfico de  $\cosh(\cdot)$ , suas tangentes  $t'$  e  $t''$  nos pontos de abscissas  $\ln(\sqrt{5} + 2)$  e  $\ln(\sqrt{5} - 2)$ , respectivamente, e sua tangente horizontal  $y = 1$ .



Fonte: Autor

#### 2.8.4 Representação gráfica da função tangente hiperbólica

Seja a função  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  dada pela definição 2.5.3 e  $x_0 \in D[\operatorname{tgh}(\cdot)]$ . Calculemos para  $\operatorname{tgh}(\cdot)$ ,  $m(x_0)$  quando existir. Segue de 2.180 que:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{tgh}x - \operatorname{tgh}x_0}{x - x_0}. \quad (2.193)$$

Aplicando o item 2 do corolário 2.4.7 em 2.193, teremos:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh(x - x_0)}{\cosh x_0 \cdot \cosh x \cdot (x - x_0)}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cosh x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\cosh x} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{\cosh x_0} \cdot \frac{1}{\cosh x_0} \\
&= \operatorname{sech}^2 x_0.
\end{aligned} \tag{2.194}$$

Como  $x_0$  foi tomado arbitrário, e a função secante hiperbólica possui domínio  $\mathbb{R}$ , substituindo  $x_0$ , em 2.194, por  $x$ , para a função tangente hiperbólica pode-se escrever:

$$\forall x \in \mathbb{R}, m(x) = \operatorname{sech}^2 x. \tag{2.195}$$

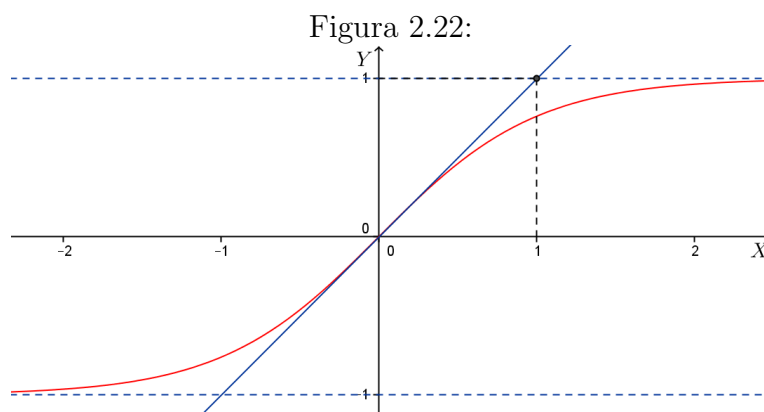
Analisemos a concavidade do gráfico de  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  em  $\mathbb{R}_-$ . Seja  $I \subset \mathbb{R}_-$  e  $x_0$  no interior de  $I$ . De 2.195, uma equação da reta tangente ao gráfico de  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  em  $P(x_0, \operatorname{tgh}(x_0))$  é:

$$y = \operatorname{sech}^2 x_0 \cdot (x - x_0) + \operatorname{tgh} x_0. \tag{2.196}$$

Suponha que o gráfico de  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  tenha concavidade para baixo em  $I$ . Assim, segue de 2.196 e por definição, que para todo  $x \in I$  e  $x \neq x_0$ :

$$\operatorname{sech}^2 x_0 \cdot (x - x_0) + \operatorname{tgh} x_0 - \operatorname{tgh} x > 0.$$

Absurdo, pois sendo  $x_0$  no interior de  $I$ , existe  $x \in I$  com  $x_0 < x < 0$ , o que contradiz o Teorema 2.7.3. Como  $I$  foi tomado arbitrário, conclui-se que o gráfico de  $\operatorname{tgh}(\cdot)$  tem concavidade para cima em  $\mathbb{R}_-$ , portanto, côncavo para baixo em  $\mathbb{R}_+$ , já que a função tangente hiperbólica é ímpar. A figura 2.22 ilustra o gráfico de  $\operatorname{tgh}(\cdot)$ , o par de assíntotas  $y = -1$  e  $y = 1$  e sua tangente de equação  $x - y = 0$  ( $m(0) = 1$ ).



Fonte: Autor

### 2.8.5 Representação gráfica da função cotangente hiperbólica

Seja a função  $\cotgh(\cdot)$  dada pela definição 2.5.4 e  $x_0 \in D[\cotgh(\cdot)]$ . Calculemos para  $\cotgh(\cdot)$ ,  $m(x_0)$  quando existir. Segue de 2.180 que:

$$m(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cotgh x - \cotgh x_0}{x - x_0}. \quad (2.197)$$

Aplicando o item 4 do corolário 2.4.7 em 2.197, teremos:

$$\begin{aligned} m(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh(x_0 - x)}{\sinh x \cdot \sinh x_0 \cdot (x - x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\sinh(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sinh x} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sinh x_0} \\ &= -1 \cdot \frac{1}{\sinh x_0} \cdot \frac{1}{\sinh x_0} \\ &= -\operatorname{cossech}^2 x_0. \end{aligned} \quad (2.198)$$

Visto que  $x_0$  foi tomado arbitrário, e a função cossecante hiperbólica possui domínio  $\mathbb{R}^*$ , substituindo  $x_0$ , em 2.198, por  $x$ , para a função cotangente hiperbólica pode-se escrever:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, m(x) = -\operatorname{cossech}^2 x. \quad (2.199)$$

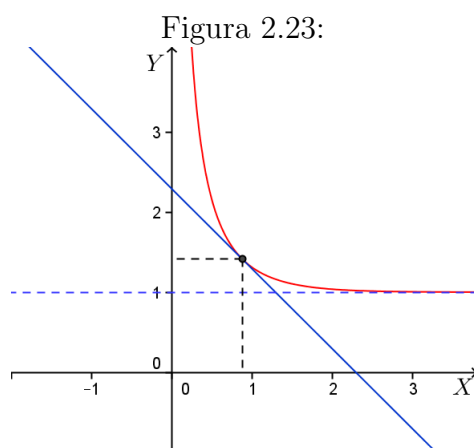
Analiseemos a concavidade do gráfico de  $\cotgh(\cdot)$  em  $\mathbb{R}_+^*$ . Seja  $I \subset \mathbb{R}_+^*$  e  $x_0$  no interior de  $I$ . De 2.199, uma equação da reta tangente ao gráfico de  $\cotgh(\cdot)$  em  $P(x_0, \cotgh(x_0))$  é:

$$y = -\operatorname{cossech}^2 x_0 \cdot (x - x_0) + \cotgh x_0. \quad (2.200)$$

Suponha que o gráfico de  $\cotgh(\cdot)$  tenha concavidade para baixo em  $I$ . Assim, segue de 2.200 e por definição, que para todo  $x \in I$  e  $x \neq x_0$ :

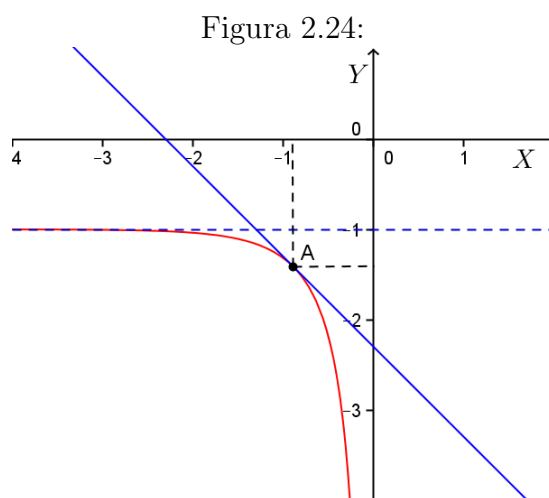
$$-\operatorname{cossech}^2 x_0 \cdot (x - x_0) + \operatorname{tgh} x_0 - \cotgh x > 0.$$

Absurdo, pois sendo  $x_0$  no interior de  $I$ , existe  $x \in I$  com  $0 < x < x_0$ , o que contradiz o Teorema 2.7.4. Como  $I$  foi tomado arbitrário, conclui-se que o gráfico de  $\cotgh(\cdot)$  tem concavidade para cima em  $\mathbb{R}_+^*$ , portanto, côncavo para baixo em  $\mathbb{R}_-^*$ , já que a função cotagente hiperbólica é ímpar. A figura 2.23 ilustra o gráfico de  $\cotgh(\cdot)$  para  $x > 0$ , a assíntota  $y = 1$  e a reta tangente no ponto de abscissa  $\ln(\sqrt{2} + 1)$ .



Fonte: Autor

Já na figura 2.24 estão ilustrados o gráfico desta função para  $x < 0$ , a assíntota  $y = -1$  e a reta tangente no ponto de abscissa  $\ln(\sqrt{2} - 1)$ . Observe que as duas retas possuem inclinação  $m = -1$ .



Fonte: Autor

### 2.8.6 Representação gráfica da função secante hiperbólica

O esboço do gráfico desta função requer, primeiramente, que determinemos o  $m(x_0)$  desta função com  $x_0$  tomado arbitrariamente em  $D[\text{sech}(\cdot)]$ .

Da igualdade da em 2.180, vem:

$$\begin{aligned} m(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\text{sech } x - \text{sech } x_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sinh \frac{x_0 - x}{2} \cdot \sinh \frac{x_0 + x}{2}}{(x - x_0) \cdot \cosh x \cdot \cosh x_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ -\frac{\sinh \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \right] \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh \frac{x_0+x}{2}}{\cosh x \cdot \cosh x_0} \\
&= -1 \cdot \frac{\sinh x_0}{\cosh x_0 \cdot \cosh x_0} \\
&= -\frac{\sinh x_0}{\cosh^2 x_0}. \tag{2.201}
\end{aligned}$$

Como  $x_0$  foi tomado arbitrariamente, segue de 2.201 que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$m(x) = -\frac{\sinh x}{\cosh^2 x}. \tag{2.202}$$

Dado que a função seno hiperbólico é bijetora, existe  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$  tal que  $\sinh x_0 = 2$ , isto é,  $\sinh^2 x_0 = 4$  e, conseqüentemente,  $\cosh^2 x_0 = 5$ . Assim, temos  $m(x_0) = -\frac{2}{5}$ . Observe que  $m(x_0) < 0$ , logo a reta tangente ao gráfico de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  intesecta a eixo  $OX$  em  $a > x_0$ , ou seja, em  $a > 0$ . Daí, do fato  $\operatorname{sech}(a) > 0$ , temos que esse gráfico não está abaixo de todas suas tangentes em  $[0, +\infty)$ . Por outro lado,  $m(0) = 0$  e  $\operatorname{sech}(0) = 1$ , isto é,  $y = 1$  é a equação da tangente ao gráfico de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  em  $x = 0$ . Mas  $\operatorname{sech}(x) \leq 1$ , ou seja, o gráfico de  $f$  não está acima de todas suas tangentes em  $\mathbb{R}_+$ . Portanto, existe  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  em que o gráfico de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  muda a concavidade no ponto de abscissa  $x_0$ .

Verificaremos as condições existência do limite a seguir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{\sinh x}{\cosh^2 x} + \frac{\sinh x_0}{\cosh^2 x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cosh^2 x \cdot \sinh x_0 - \cosh^2 x_0 \cdot \sinh x}{\cosh^2 x_0 \cdot \cosh^2 x \cdot (x - x_0)} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1 + \sinh^2 x) \cdot \sinh x_0 - (1 + \sinh^2 x_0) \cdot \sinh x}{\cosh^2 x_0 \cdot \cosh^2 x \cdot (x - x_0)} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sinh x_0 - \sinh x) + \sinh^2 x \cdot \sinh x_0 - \sinh^2 x_0 \cdot \sinh x}{\cosh^2 x_0 \cdot \cosh^2 x \cdot (x - x_0)} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sinh x_0 - \sinh x) + \sinh x \cdot \sinh x_0 (\sinh x - \sinh x_0)}{\cosh^2 x_0 \cdot \cosh^2 x \cdot (x - x_0)} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\sinh x - \sinh x_0) \cdot [\sinh x \cdot \sinh x_0 - 1]}{\cosh^2 x_0 \cdot \cosh^2 x \cdot (x - x_0)} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh x - \sinh x_0}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh x \cdot \sinh x_0 - 1}{\cosh^2 x_0 \cdot \cosh^2 x} \\
&= \cosh x_0 \cdot \frac{\sinh^2 x_0 - 1}{\cosh^2 x_0 \cdot \cosh^2 x_0} \\
&= \frac{\sinh^2 x_0 - 1}{\cosh^3 x_0}. \tag{2.203}
\end{aligned}$$

Visto que  $\cosh x \geq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , o limite anterior existe para qualquer seja  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Assim, anulando o limite encontrado em 2.203, teremos para  $x_0 \geq 0$ :

$$\operatorname{senh} x_0 = 1 \quad (2.204)$$

Resolvendo a equação 2.204, obteremos:

$$x'_0 = \ln(\sqrt{2} + 1).$$

De sorte que para todo  $x_0 \geq 0$  a equação 2.204 tem solução única e o limite em 2.203 existe, a proposição 2.8.1 garante que em  $\mathbb{R}_+$  o gráfico de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  muda a concavidade em  $P_1(x'_0, \operatorname{sech}(x'_0))$ , já que sua existência é garantida, e  $P_1$  é único. Dado que a função  $\operatorname{sech}(\cdot)$  é par, segue do resultado anterior que  $P_2(-x'_0, \operatorname{sech}(\cdot)(-x'_0))$  (o único em  $\mathbb{R}_-$ ) com as propriedades de  $P_1$ . Fazendo  $x''_0 = -x'_0$ , teremos  $x''_0 = \ln(\sqrt{2} - 1)$ , abscissa de  $P_2$ , simétrico a  $P_1$ . Tomemos o intervalo  $I = (x'', x')$ . Suponha que o gráfico de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  tenha concavidade para cima em  $I$ . Segue por definição que ele está acima de todas as suas retas tangentes em  $I$ . Absurdo, pois como já foi visto, a reta  $y = 1$  é tangente a esse gráfico em  $x_0 = 0$  e  $\operatorname{sech}(x) < 1$  para todo  $x \neq 0$ . Logo, a concavidade do gráfico da função secante hiperbólica é para baixo em  $I$ . Consequentemente, o gráfico de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  tem concavidade para baixo em  $(-\infty, x''_0) \cup (x'_0, +\infty)$ .

Precisa-se agora determinar as equações cartesianas das retas tangentes ao gráfico de  $\operatorname{sech}(\cdot)$  em  $x'_0$  e  $x''_0$ . Observe que de 2.203, tem-se:

$$\cosh^2 x'_0 = \cosh^2 x''_0 = 2, \quad \text{isto é,} \quad \cosh x'_0 = \cosh x''_0 = \sqrt{2}. \quad (2.205)$$

Segue de 2.202, 2.203 e 2.204 que:

$$m(x'_0) = -\frac{1}{2}, \quad m(x''_0) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad f(x'_0) = f(x''_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

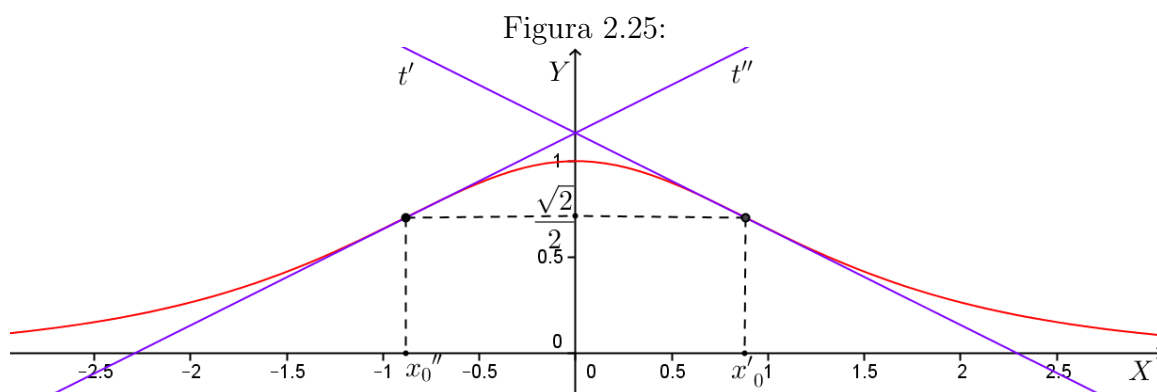
Daí, as equações das retas  $t'$  e  $t''$  tangentes nos pontos de abscissas  $x'_0$  e  $x''_0$ , nesta ordem, são, respectivamente:

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \cdot (x - x'_0) \quad \text{ou} \quad x + 2y = \ln(\sqrt{2} + 1) + \sqrt{2}$$

$$y - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot (x - x''_0) \quad \text{ou} \quad x - 2y = \ln(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}$$

A figura 2.25 finaliza a representação gráfica da função secante hiperbólica apresentando, num mesmo sistema, o par de retas  $t'$  e  $t''$ , e o gráfico da função.





Fonte: Autor

### 2.8.7 Representação gráfica da função cossecante hiperbólica

Assim, como no caso anterior, será feito o uso, além da definição de reta tangente e concavidade de curva, da proposição 2.8.1.

Dado que a função cossecante hiperbólica é ímpar, basta estudar seu gráfico em  $(0, +\infty)$  e, conseqüentemente, terá suas características em  $\mathbb{R}_+^*$ .

Seja  $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ . Logo,

$$\begin{aligned}
 m(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\operatorname{cossech} x - \operatorname{cossech} x_0}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot \sinh \frac{x_0 - x}{2} \cdot \cosh \frac{x_0 + x}{2}}{(x - x_0) \cdot \sinh x \cdot \sinh x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{\sinh \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \left( -\frac{\cosh \frac{x_0 + x}{2}}{\sinh x \cdot \sinh x_0} \right) \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh \frac{x - x_0}{2}}{\frac{x - x_0}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \left( -\frac{\cosh \frac{x_0 + x}{2}}{\sinh x \cdot \sinh x_0} \right) \\
 &= 1 \cdot \left( -\frac{\cosh x_0}{\sinh x_0 \cdot \sinh x_0} \right) \\
 &= -\frac{\cosh x_0}{\sinh^2 x_0}. \tag{2.206}
 \end{aligned}$$

Dado que  $x_0$  é um número real positivo qualquer, pode-se substituir em 2.206,  $x_0$  por  $x$ . Com isso, faz sentido calcular o limite a seguir:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-\frac{\cosh x}{\sinh^2 x} + \frac{\cosh x_0}{\sinh^2 x_0}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sinh^2 x \cdot \cosh x_0 - \sinh^2 x_0 \cdot \cosh x}{(x - x_0) \cdot \sinh^2 x \cdot \sinh^2 x_0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\cosh^2 x - 1) \cdot \cosh x_0 - (\cosh^2 x_0 - 1) \cdot \cosh x}{(x - x_0) \cdot \sinh^2 x \cdot \sinh^2 x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cosh^2 x \cdot \cosh x_0 - \cosh x_0 - \cosh^2 x_0 \cdot \cosh x + \cosh x}{(x - x_0) \cdot \sinh^2 x \cdot \sinh^2 x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\cosh x - \cosh x_0) + \cosh x \cdot \cosh x_0 \cdot (\cosh x - \cosh x_0)}{(x - x_0) \cdot \sinh^2 x \cdot \sinh^2 x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(\cosh x - \cosh x_0) \cdot (\cosh x \cdot \cosh x_0 + 1)}{(x - x_0) \cdot \sinh^2 x \cdot \sinh^2 x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cosh x - \cosh x_0}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cosh x \cdot \cosh x_0 + 1}{\sinh^2 x \cdot \sinh^2 x_0} \\
&= \sinh x_0 \cdot \frac{\cosh x_0 \cdot \cosh x_0 + 1}{\sinh^2 x_0 \cdot \sinh^2 x_0} \\
&= \frac{\cosh^2 x_0 + 1}{\sinh^3 x_0}. \tag{2.207}
\end{aligned}$$

Como para todo  $x \neq 0$ ,  $\sinh x \neq 0$ , segue de 2.207 que o limite existe, e:

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Logo, da proposição 2.8.1, o gráfico de  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  não possui ponto de mudança de concavidade em  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pelas propriedades do limite infinito e do limite no infinito<sup>12</sup>, verifica-se que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sinh x} = \infty, \text{ isto é, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cossech} x = +\infty \tag{2.208}$$

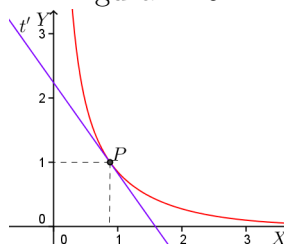
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sinh x} = 0, \text{ isto é, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cossech} x = 0. \tag{2.209}$$

De 2.208 e 2.209, tem-se que as retas de equações  $x = 0$  e  $y = 0$  são as assíntotas vertical e horizontal, respectivamente.

Portanto, o gráfico de  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  tem concavidade para cima em  $\mathbb{R}_+^*$ . Consequentemente, côncavo para baixo em  $\mathbb{R}_-^*$ , pois a função cossecante hiperbólica é ímpar. A figura 2.26 ilustra o gráfico de  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  para  $x > 0$  e sua tangente no ponto  $P[\ln(\sqrt{2} + 1), 1]$ .

<sup>12</sup>Veja definição no ANEXO A, e as propriedades podem ser encontradas em Stewart (2009, v.1).

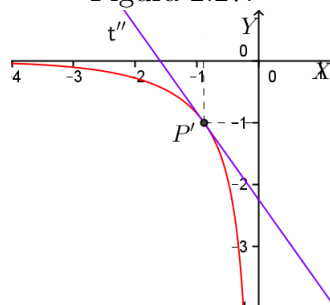
Figura 2.26:



Fonte: Autor

E na figura, 2.27 estão o gráfico de  $\operatorname{cossech}(\cdot)$  para  $x < 0$  e a reta tangente no ponto  $P'[\ln(\sqrt{2} - 1), -1]$ .

Figura 2.27:



Fonte: Autor

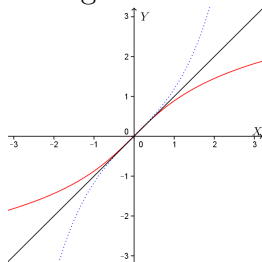
## 2.9 Representação gráfica das funções hiperbólicas inversas

Para representar graficamente as funções hiperbólicas inversas consideraremos o seguinte fato: seja a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  que possui uma inversa  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$ , os gráficos de  $f$  e de  $f^{-1}$  são simétricos com relação à reta  $y = x$ . Dessa forma, a partir do gráfico de cada função hiperbólica, esboçaremos o gráfico da sua função inversa.

### 2.9.1 Representação gráfica da função seno hiperbólico inversa

Na figura 2.28, está ilustrado, em vermelho, o gráfico da função seno hiperbólico inversa, obtido a partir do gráfico da função seno hiperbólico, cuja ilustração é pontilhada e em azul.

Figura 2.28:

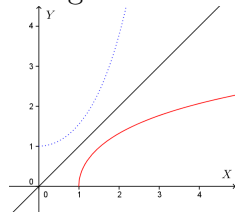


Fonte: Autor

### 2.9.2 Representação gráfica da função cosseno hiperbólico inversa

Na figura 2.29, está ilustrado, em vermelho, o gráfico da função cosseno hiperbólico inversa, obtido a partir do gráfico da função cosseno hiperbólico para  $x \in \mathbb{R}_+$ , cuja ilustração é pontilhada e em azul.

Figura 2.29:

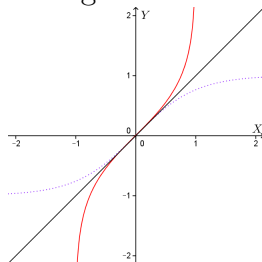


Fonte: Autor

### 2.9.3 Representação gráfica da função tangente hiperbólica inversa

Na figura 2.30, está ilustrado, em vermelho, o gráfico da função tangente hiperbólica inversa, obtido a partir do gráfico da função tangente hiperbólica, cuja ilustração é pontilhada e em azul.

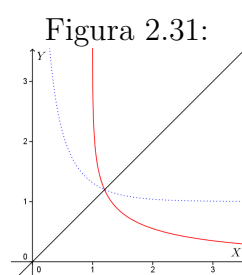
Figura 2.30:



Fonte: Autor

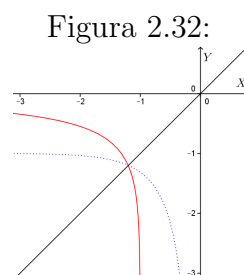
### 2.9.4 Representação gráfica da função cotangente hiperbólica inversa

Na figura, 2.31, está ilustrado para  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , em vermelho, o gráfico da função cotangente hiperbólica inversa, obtido a partir do gráfico da função cotangente hiperbólica para  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , cuja ilustração é pontilhada e em azul.



Fonte: Autor

E na figura 2.32 está ilustrado, também em vermelho, o gráfico da função cotangente hiperbólica inversa para  $x \in \mathbb{R}_-^*$ , obtido a partir do gráfico da função cotangente hiperbólica para  $x \in \mathbb{R}_-^*$ , cuja ilustração é pontilhada e em azul.

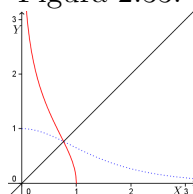


Fonte: Autor

### 2.9.5 Representação gráfica da função secante hiperbólica inversa

Na figura 2.33, está ilustrado, em vermelho, o gráfico da função secante hiperbólica inversa, obtido a partir do gráfico da função secante hiperbólica, cuja ilustração é pontilhada e em azul.

Figura 2.33:

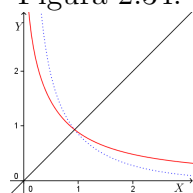


Fonte: Autor

### 2.9.6 Representação gráfica da função cossecante hiperbólica inversa

Na figura, 2.34, está ilustrado para  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , em vermelho, o gráfico da função cossecante hiperbólica inversa, obtido a partir do gráfico da função cossecante hiperbólica para  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , cuja ilustração é pontilhada e em azul.

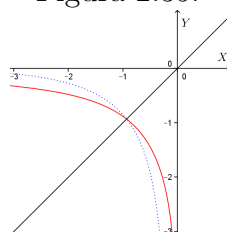
Figura 2.34:



Fonte: Autor

E na figura 2.35, está ilustrado, também em vermelho, o gráfico da função cossecante hiperbólica inversa para  $x \in \mathbb{R}_-^*$ , obtido a partir do gráfico da função cossecante hiperbólica para  $x \in \mathbb{R}_-^*$ , cuja ilustração é pontilhada e em azul.

Figura 2.35:



Fonte: Autor

## 2.10 Aplicações da trigonometria hiperbólica

Com o objetivo de reforçar a importância do estudo da trigonometria hiperbólica, nesta seção serão mostrados alguns casos de aplicação das funções hiperbólicas na física.

### 2.10.1 Cabos dependurados

A aplicação mais famosa da trigonometria hiperbólica é o uso da função do tipo cosseno hiperbólico, que surge na descrição da curva feita por um fio dependurado cujas extremidades estão presas em dois postes. Essa situação é semelhante ao problema da “catenária”, que foi resolvido no final do século XVII por Gottfried Wilhelm Leibniz e outros matemáticos que, de modo independente, chegaram à mesma solução. A resolução deste problema requer o uso de equações diferenciais e pode ser encontrada em Figueiredo e Neve (1997, p. 39-43).

Suponha um cabo dependurado com suas extremidades presas em dois postes tal que:

$\omega$ : peso por unidade de comprimento do cabo;

$H$ : tensão do cabo no seu ponto mais baixo  $O(0, 0)$ ;

$T$ : tensão num ponto  $P(x, y)$  qualquer do cabo;

$\theta$ : medida do ângulo da direção curva (descrita pelo cabo) em  $P(x, y)$ .

A partir dos dados expostos anteriormente, pode-se afirmar que valem as seguintes equações:

$$1. \operatorname{tg}\theta = \frac{\omega \cdot s}{H} \quad (\text{onde } s \text{ é o comprimento do arco } \widehat{OP});$$

$$2. \operatorname{senh}\left(\frac{\omega}{H}x\right) = \frac{\omega}{H} \cdot s;$$

$$3. y(x) = \frac{H}{\omega} \cdot \operatorname{cosh}\left(\frac{\omega}{H}x\right) - \frac{H}{\omega}.$$

### 2.10.2 Ondas do mar

A trigonometria hiperbólica pode ser aplicada também na descrição de uma onda do mar, como pode ser visto em Stewart (2009, p. 237).

Uma onda do mar de comprimento  $L$  cuja velocidade é  $v$  que se move através de uma massa de água de fundura  $d$  pode ter sua descrição modelada pela seguinte equação

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \operatorname{tgh}\left(\frac{2\pi d}{L}\right)}$$

onde  $g$  é a aceleração gravitacional.

Ressalta-se que além dessas situações apresentadas anteriormente, existem inúmeras outras aplicações da trigonometria hiperbólica na própria física e em outras ciências.

## 2.11 Análise comparativa: trigonometria hiperbólica X trigonometria circular

Ao desenvolver esta pesquisa, pode ser observado o quanto a trigonometria hiperbólica se assemelha à trigonometria circular. A relação entre as razões trigonométricas hiperbólicas tem um comportamento bastante parecido à interação entre as razões trigonométricas circulares. Diante disso, objetivou-se fazer uma análise mais detalhada das funções trigonométricas hiperbólicas, comparando-as com as funções trigonométricas circulares.

### 2.11.1 Função seno hiperbólico X função seno circular

Observando as características das funções trigonométricas seno hiperbólico e seno circular, verifica-se que enquanto a segunda possui como imagem o intervalo  $[-1, 1]$  e é periódica, a imagem da primeira é  $\mathbb{R}$  (ainda que as duas sejam funções de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$ ) e ela não é periódica. Porém, ambas são ímpares.

### 2.11.2 Função cosseno hiperbólico X função cosseno circular

Note que essas duas funções são pares e possuem o mesmo domínio, que é  $\mathbb{R}$ . Porém, enquanto a função cosseno hiperbólico possui imagem  $(1, +\infty)$ , a função cosseno circular tem o intervalo  $[-1, 1]$  como imagem; por outro lado, a segunda dessas funções é periódica (de período  $2\pi$ ), já a primeira é crescente em  $\mathbb{R}_+$  e decrescente em  $\mathbb{R}_-$ .

### 2.11.3 Função tangente hiperbólica X função tangente circular

Observando o que há de semelhante entre as funções tangente hiperbólica e tangente circular, nota-se que ambas são ímpares e crescentes no intervalo  $\left(\frac{2k-1}{2}, \frac{2K+1}{2}\right)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Por outro lado, a primeira possui domínio  $\mathbb{R}$  e imagem  $I = (-1, 1)$ ; já a segunda possui domínio  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{2k+1}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}\}$  e imagem  $\mathbb{R}$ . Por fim, tem-se que a função tangente circular é periódica de período  $\pi$ .

### 2.11.4 Função cotangente hiperbólica X função cotangente circular

A análise paralela entre essas duas funções assemelha-se ao caso das funções tangentes. Nota-se que a função cotangente circular é periódica de período  $\pi$  e decrescente



em  $I = (2k\pi, (2k+1)\pi)$ ; já a função cotangente hiperbólica não é periódica e, além disso, é decrescente em  $\mathbb{R}_+^*$  e em  $\mathbb{R}_-^*$ . Porém, ambas as funções são ímpares. Por fim, o domínio da função cotangente circular é  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ , e sua imagem é  $\mathbb{R}$ , enquanto a função cotangente hiperbólica possui domínio  $\mathbb{R}^*$  e imagem  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

### 2.11.5 Função secante hiperbólica X função secante circular

De imediato, nota-se que tais funções assemelham-se na paridade, pois ambas são pares, porém enquanto a função secante hiperbólica possui imagem  $(0, 1]$ , domínio  $\mathbb{R}$  e não é periódica, a função secante circular é periódica de período  $2\pi$ , sua imagem é  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  e seu domínio é  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$ . Por fim, a função secante circular é decrescente em  $\left(\frac{2k-1}{2}\pi, k\pi\right]$  e crescente em  $\left[k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right)$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$  com  $k$  sendo par. Quando  $k$  é ímpar, ocorre o contrário. Já a função secante hiperbólica é crescente em  $\mathbb{R}_-$  e decrescente em  $\mathbb{R}_+$ .

### 2.11.6 Função cossecante hiperbólica X função cossecante circular

Observe que as funções cossecante hiperbólica e cossecante circular possuem a mesma paridade, pois ambas são ímpares. Por outro lado, enquanto a primeira delas tem como imagem e domínio o conjunto  $\mathbb{R}^*$ , o domínio da segunda é  $A = \{x \in \mathbb{R} : x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$  e sua imagem é o conjunto  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ . Por fim, a função cossecante hiperbólica é decrescente em  $\mathbb{R}_-$  e em  $\mathbb{R}_+$ , já a função cossecante circular é periódica de período  $2\pi$ , é decrescente em  $\left(k\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right]$  e crescente  $\left[\frac{2k+1}{2}\pi, (k+1)\pi\right)$  para todo  $k$  inteiro e par. Se  $k$  for ímpar, ocorre o contrário.

## 2.12 Conexão entre funções trigonométricas circulares e hiperbólicas

Vimos na primeira metade deste capítulo uma conexão entre a trigonometria hiperbólica e a trigonometria circular, e na seção anterior foi apresentada uma análise comparando as funções básicas dessas duas trigonometrias. Nesta seção, iremos apresentar um estudo da equivalência entre as funções trigonométricas circulares e hiperbólicas. Para tanto, faremos uma restrição nos domínios das funções trigonométricas circulares e consideraremos as funções trigonométricas hiperbólicas já definidas. Tomemos o intervalo  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  ou o intervalo  $\mathbb{A} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . E para uma melhor compreensão, será adotada a notação  $g_i$  para uma função trigonométrica circular com a restrição no domínio, e  $f_i$  para a função trigonométrica hiperbólica.

Inicialmente, abordaremos as funções cosseno hiperbólico, denotando-a por  $f_1$ , e secante circular com restrição no domínio, definindo a função  $g_1$ .

**Definição 2.12.1.** A função  $g_1 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g_1(y) = \sec y$$

.

Da igualdade 2.14 e o fato de que  $\cosh 0 = 1 = \sec 0$ , segue-se que para todo  $x_0 \in D(f_1)$ , existe  $y_0 \in D(g_1)$  tais que

$$\cosh x_0 = \sec y_0, \quad \text{isto é,} \quad f_1(x_0) = g_1(y_0)$$

Passemos agora ao caso das funções seno hiperbólico, denotada por  $f_2$ , e tangente circular, restringindo o domínio e definindo  $g_2$ .

**Definição 2.12.2.** A função  $g_2 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g_2(y) = \operatorname{tg} y$$

.

Pela igualdade 2.17 e o fato de que  $\sinh 0 = 0 = \operatorname{tg} 0$ , segue-se que para todo  $x_0 \in D(f_2)$ , existe  $y_0 \in D(g_2)$  tais que

$$\sinh x_0 = \operatorname{tg} y_0, \quad \text{isto é,} \quad f_2(x_0) = g_2(y_0)$$

Tomemos o caso das funções tangente hiperbólica, que será denotada por  $f_3$  e a seno circular com restrição no domínio: daí definamos  $g_3$ .

**Definição 2.12.3.** A função  $g_3 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g_3(y) = \operatorname{sen} y$$

.

Segue da igualdade 2.18 e o fato de que  $\operatorname{tgh} 0 = 0 = \operatorname{sen} 0$  que para todo  $x_0 \in D(f_3)$ , existe  $y_0 \in D(g_3)$  tais que

$$\operatorname{tgh} x_0 = \operatorname{sen} y_0, \quad \text{isto é,} \quad f_3(x_0) = g_3(y_0)$$

Abordaremos então as funções cotangente hiperbólica denotando-a por  $f_4$ , e cossecante circular, considerando as restrições no seu domínio e definindo a função  $g_4$ .

**Definição 2.12.4.** A função  $g_4 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$\forall y \in \mathbb{A}, \quad g_4(y) = \operatorname{cossec}y$$

Dessa forma, pela igualdade 2.19, segue-se que para todo  $x_0 \in D(f_4)$ , existe  $y_0 \in D(g_4)$  tais que

$$\operatorname{cotgh}x_0 = \operatorname{cossec}y_0, \quad \text{isto é,} \quad f_4(x_0) = g_4(y_0)$$

Estudaremos então o caso das funções secante hiperbólica, que será denotada por  $f_5$  e a cosseno circular com restrição no domínio: daí definamos  $g_5$ .

**Definição 2.12.5.** A função  $g_5 : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$\forall y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad g_5(y) = \operatorname{cos}y$$

Segue da igualdade 2.20 e o fato de que  $\operatorname{sech}0 = 1 = \operatorname{cos}0$  que para todo  $x_0 \in D(f_5)$ , existe  $y_0 \in D(g_5)$  tais que

$$\operatorname{sech}x_0 = \operatorname{cos}y_0, \quad \text{isto é,} \quad f_5(x_0) = g_5(y_0)$$

Para finalizar, consideremos o caso das funções cossecante hiperbólico, que será denotada por  $f_6$ , e a cotangente circular, restringindo o seu domínio e definindo a função  $g_6$ .

**Definição 2.12.6.** A função  $g_6 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ , é definida por:

$$\forall y \in \mathbb{A}, \quad g_6(y) = \operatorname{cot}y$$

Dessa forma, pela igualdade 2.21, segue-se que para todo  $x_0 \in D(f_6)$ , existe  $y_0 \in D(g_6)$  tais que

$$\operatorname{cossech}x_0 = \operatorname{cot}y_0, \quad \text{isto é,} \quad f_6(x_0) = g_6(y_0)$$

# Capítulo 3

## TRIGONOMETRIA HIPERBÓLICA EM $\mathbb{C}$

Neste capítulo tem-se o objetivo de apresentar a trigonometria hiperbólica no conjunto dos números complexos. Neste caso, o argumento hiperbólico considerado será um elemento do conjunto  $\mathbb{C} = \{x + yi; x, y \in \mathbb{R}\}$ , onde  $i^2 = -1$  e o módulo de  $z$  é  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para mais detalhes sobre o referido conjunto, consulte Carmo, Manfredo e Wagner (2005).

### 3.1 Exponencial complexa de base $e$

As fórmulas básicas para se calcular a razão trigonométrica hiperbólica do argumento complexo  $z = x + yi$  são as mesmas apresentadas no capítulo 2 para  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Agora resta apresentar a exponencial complexa  $e^{x+yi}$  na forma  $X + Yi$ . Em Soares (2001, p. 51) e em Spiegel et al (p. 43), encontra-se a seguinte definição para a exponencial  $e^{x+yi}$ :

$$e^{x+yi} = e^x \cdot (\cos y + i \operatorname{sen} y) \quad (3.1)$$

Observe que a igualdade 3.1 é motivada pela fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ , que será abordada com mais detalhes posteriormente, e admitindo que  $e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi}$ .

A exponencial complexa  $e^z$  possui as seguintes propriedades<sup>1</sup>:

**Propriedade 3.1.1.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então:*

$$P1) e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2};$$

$$P2) \frac{1}{e^{z_1}};$$

$$P3) \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}.$$

---

<sup>1</sup>Essas propriedades podem ser encontradas também em Soares (2001, p. 51)

*Demonstração.* Tome os números complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ .

P1) Da igualdade dada em 3.1, segue que:

$$\begin{aligned}
 e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1} \cdot (\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1) \cdot e^{x_2} \cdot (\cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2) \\
 &= e^{x_1+x_2} \cdot (\cos y_1 \cdot \cos y_2 + i^2 \operatorname{sen} y_1 \cdot \operatorname{sen} y_2 + i \operatorname{sen} y_1 \cdot \cos y_2 + i \operatorname{sen} y_2 \cdot \cos y_1) \\
 &= e^{x_1+x_2} \cdot [\cos y_1 \cdot \cos y_2 - \operatorname{sen} y_1 \cdot \operatorname{sen} y_2 + i(\operatorname{sen} y_1 \cdot \cos y_2 + \operatorname{sen} y_2 \cdot \cos y_1)] \\
 &= e^{x_1+x_2} \cdot [\cos(y_1 + y_2) + i \operatorname{sen}(y_1 + y_2)] \\
 &= e^{(x_1+x_2)+(y_1+y_2)i} \\
 &= e^{z_1+z_2}.
 \end{aligned}$$

P2) Da igualdade dada em 3.1, segue que:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{e^{z_1}} &= \frac{1}{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)} \\
 &= \frac{1}{e^{x_1}(\cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1)} \cdot \frac{\cos y_1 - i \operatorname{sen} y_1}{\cos y_1 - i \operatorname{sen} y_1} \\
 &= e^{-x_1} \cdot \frac{\cos y_1 - i \operatorname{sen} y_1}{\cos^2 y_1 - i^2 \operatorname{sen}^2 y_1} \\
 &= e^{-x_1} \cdot \frac{\cos(-y_1) + i \operatorname{sen}(-y_1)}{\cos^2 y_1 + \operatorname{sen}^2 y_1} \\
 &= e^{-x_1 - y_1 i} \\
 &= e^{-z_1}.
 \end{aligned}$$

P3) Observe que:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot \frac{1}{e^{z_2}} \tag{3.2}$$

Segue de 3.2 e de P2 que

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1} \cdot e^{-z_2} \tag{3.3}$$

Aplicando P1 em 3.3, vem

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} &= e^{z_1+(-z_2)} \\
 &= e^{z_1-z_2}
 \end{aligned}$$

□

## 3.2 Razões trigonométricas hiperbólicas e circulares de $z \in \mathbb{C}$

As razões trigonométricas hiperbólicas de um argumento complexo são expressas através da exponencial complexa de modo análogo ao caso em que o argumento é um número real. Dessa forma, dado  $z \in \mathbb{C}$ , então:

$$\begin{aligned} \operatorname{senhz} &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} & \text{e} & & \operatorname{coshz} &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \\ \operatorname{tghz} &= \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} & \text{ou} & & \operatorname{tghz} &= \frac{\operatorname{senhz}}{\operatorname{coshz}} \quad (\text{se } \operatorname{coshz} \neq 0). \\ \operatorname{cotghz} &= \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} & \text{ou} & & \operatorname{cotghz} &= \frac{\operatorname{coshz}}{\operatorname{senhz}} \quad (\text{se } \operatorname{senhz} \neq 0). \\ \operatorname{sechz} &= \frac{2}{e^z + e^{-z}} & \text{ou} & & \operatorname{sechz} &= \frac{1}{\operatorname{coshz}} \quad (\text{se } \operatorname{coshz} \neq 0). \\ \operatorname{cossechz} &= \frac{2}{e^z - e^{-z}} & \text{ou} & & \operatorname{cossechz} &= \frac{1}{\operatorname{senhz}} \quad (\text{se } \operatorname{senhz} \neq 0). \end{aligned}$$

Observa-se de 3.1 que  $e^z \in \mathbb{C}$  para qualquer que seja  $z \in \mathbb{C}$ , conseqüentemente, a razão trigonométrica hiperbólica de um número complexo pertence a  $\mathbb{C}$ .

**Lema 3.2.1.** *Seja  $z \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\operatorname{coshz} + \operatorname{senhz} = e^z.$$

*Demonstração.* Tome  $z \in \mathbb{C}$ , segue por definição que:

$$\begin{aligned} \operatorname{coshz} + \operatorname{senhz} &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} + \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \frac{2e^z}{2} \\ &= e^z. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.2.2.** *Seja  $z \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\operatorname{coshz} - \operatorname{senhz} = e^{-z}.$$

*Demonstração.* Tome  $z \in \mathbb{C}$ , segue por definição que:

$$\begin{aligned} \operatorname{coshz} - \operatorname{senhz} &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} - \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= \frac{2e^{-z}}{2} \\ &= e^{-z}. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.2.3.** *Seja  $z \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\cosh(-z) = \cosh z \quad e \quad \sinh(-z) = -\sinh z.$$

*Demonstração.* Tome  $z \in \mathbb{C}$ , segue por definição que:

$$\begin{aligned} \cosh(-z) &= \frac{e^{-z} + e^{-(-z)}}{2} \\ &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \\ &= \cosh z. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sinh(-z) &= \frac{e^{-z} - e^{-(-z)}}{2} \\ &= -\frac{e^z - e^{-z}}{2} \\ &= -\sinh z. \end{aligned}$$

□

Observe que do Lema 3.2.1, do Lema 3.2.2 e da propriedade P1, tem-se

$$\begin{aligned} (\cosh z + \sinh z)(\cosh z - \sinh z) &= e^z \cdot e^{-z} \\ \cosh^2 z - \sinh^2 z &= e^{z-z} \\ &= e^0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ou seja, a identidade fundamental da trigonometria hiperbólica vale também para o argumento complexo.

**Proposição 3.2.1.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cdot \cosh z_2 + \sinh z_1 \cdot \sinh z_2.$$

*Demonstração.* Tome  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Assim,

$$\cosh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1+z_2} + e^{-z_1-z_2}}{2}. \quad (3.4)$$

Pela propriedade P1, segue de 3.4 que

$$\cosh(z_1 + z_2) = \frac{e^{z_1} \cdot e^{z_2} + e^{-z_1} \cdot e^{-z_2}}{2}. \quad (3.5)$$

Pelos Lema 3.2.1 e 3.2.2, segue de 3.5 que

$$\begin{aligned} \cosh(z_1 + z_2) &= \frac{1}{2}[(\cosh z_1 + \sinh z_1) \cdot (\cosh z_2 + \sinh z_2) \\ &\quad + (\cosh z_1 - \sinh z_1) \cdot (\cosh z_2 - \sinh z_2)] \\ &= \cosh z_1 \cdot \cosh z_2 + \sinh z_1 \cdot \sinh z_2. \end{aligned}$$

□

**Proposição 3.2.2.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cdot \cosh z_2 + \cosh z_1 \cdot \sinh z_2.$$

*Demonstração.* A demonstração da proposição 3.2.2 segue de modo análogo à demonstração da proposição 3.2.1. □

**Corolário 3.2.1.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então:*

1.  $\sinh(z_1 - z_2) = \sinh z_1 \cdot \cosh z_2 - \cosh z_1 \cdot \sinh z_2$ ;
2.  $\cosh(z_1 - z_2) = \cosh z_1 \cdot \cosh z_2 - \sinh z_1 \cdot \sinh z_2$ .

*Demonstração.* Tome  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Escreva  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$  e, juntamente com o Lema 3.2.3, aplique a proposição 3.2.2 no item 1 e a proposição 3.2.1 no item 2. □

O seno hiperbólico e o cosseno hiperbólico estão definidos para todo  $z \in \mathbb{C}$ , porém, a mesma afirmação não é válida para as outras quatro razões trigonométricas hiperbólicas, e para analisar suas existências, é necessário e suficiente que sejam resolvidas as seguintes equações

$$\cosh z = 0 \quad \text{e} \quad \sinh z = 0. \quad (3.6)$$

A partir daí, obteremos para quais valores de  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{tgh} z$ ,  $\operatorname{cotgh} z$ ,  $\operatorname{sech} z$  e  $\operatorname{cossech} z$  estão definidas. Assim, seja  $z \in \mathbb{C}$ , isto é,  $z = x + yi$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

1.  $\cosh z = 0$ , se, e somente se,

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} &= 0 \\ e^z &= -e^{-z} \\ e^{2z} &= -1 \\ e^{2x} \cdot (\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) &= -1 \end{aligned} \quad (3.7)$$



De 3.7, deve-se ter  $2x = 0$  e  $2y = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ , isto é,  $z = \frac{(2k + 1)\pi}{2}i, k \in \mathbb{Z}$ .

2.  $\operatorname{senhz} = 0$ , se, e somente se,

$$\begin{aligned} e^z - e^{-z} &= 0 \\ e^z &= e^{-z} \\ e^{2z} &= 1 \\ e^{2x} \cdot (\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) &= 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

De 3.8, deve-se ter  $2x = 0$  e  $2y = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , isto é,  $z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$ .

Das soluções das equações dadas em 3.6, conclui-se que dado  $z \in \mathbb{C}$ , então:

1.  $\operatorname{tghz}$  e  $\operatorname{sechz}$  existem se, e somente se,  $z \neq \frac{(2k + 1)\pi}{2}i$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ;
2.  $\operatorname{cotghz}$  e  $\operatorname{cossechz}$  existem se, e somente se,  $z \neq k\pi i$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Observe agora que da propriedade P1, tem-se:

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^z \cdot e^{2\pi i} \\ &= e^z \cdot (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) \\ &= e^z \end{aligned} \quad (3.9)$$

e

$$\begin{aligned} e^{z+\pi i} &= e^z \cdot e^{\pi i} \\ &= e^z \cdot (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \\ &= -e^z. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Segue da propriedade P2 e, de 3.9 e de 3.10, respectivamente que:

$$e^{-z-2\pi i} = e^{-z} \quad (3.11)$$

$$e^{-z-\pi i} = -e^{-z} \quad (3.12)$$

Logo, de 3.9 e de 3.11, teremos:

$$\begin{aligned} \cosh(z + 2\pi i) &= \cosh z & \text{e} & \operatorname{senh}(z + 2\pi i) = \operatorname{senh} z; \\ \operatorname{sech}(z + 2\pi i) &= \operatorname{sech} z & \text{e} & \operatorname{cossech}(z + 2\pi i) = \operatorname{cossech} z; \end{aligned}$$

e, de 3.10 e de 3.12, teremos:

$$\operatorname{tgh}(z + \pi i) = \operatorname{tgh} z \quad \text{e} \quad \operatorname{cotgh}(z + \pi i) = \operatorname{cotgh} z.$$

Portanto, o seno, o cosseno, a secante e a cossecante hiperbólicas são periódicos em  $\mathbb{C}$  com período  $2\pi i$ , enquanto que a tangente e a cotangente hiperbólicas também são periódicas em  $\mathbb{C}$ , porém com período  $\pi i$ .

Motivado pelas fórmulas de Euler

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (3.13)$$

que serão abordadas na próxima seção, define-se as razões trigonométricas circulares de  $z \in \mathbb{C}$ , da forma a seguir:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} & \text{ou} & \quad \operatorname{sen} z = -i \operatorname{senh}(zi). \\ \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} & \text{ou} & \quad \cos z = \cosh(zi). \\ \operatorname{tg} z &= \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} & \text{ou} & \quad \operatorname{tg} z = -i \frac{\operatorname{senh}(zi)}{\cosh(zi)} \quad (\text{se } \cosh(zi) \neq 0). \\ \operatorname{cotg} z &= i \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} & \text{ou} & \quad \operatorname{cotg} z = \frac{i \cosh(zi)}{\operatorname{senh}(zi)} \quad (\text{se } \operatorname{senh}(zi) \neq 0). \\ \operatorname{sec} z &= \frac{2}{e^{zi} + e^{-zi}} & \text{ou} & \quad \operatorname{sec} z = \frac{1}{\cosh(zi)} \quad (\text{se } \cosh(zi) \neq 0). \\ \operatorname{cossec} z &= \frac{2i}{e^{zi} - e^{-zi}} & \text{ou} & \quad \operatorname{cossec} z = \frac{i}{\operatorname{senh}(zi)} \quad (\text{se } \operatorname{senh}(zi) \neq 0). \end{aligned}$$

Da definição da trigonometria circular em  $\mathbb{C}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z &= \cosh^2 zi + (-i \operatorname{senh} zi)^2 \\ &= \cosh^2 zi + i^2 \operatorname{senh}^2 zi \\ &= \cosh^2 zi - \operatorname{senh}^2 zi \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ou seja, a identidade fundamental da trigonometria circular é válida para o argumento complexo.

**Proposição 3.2.3.** *Dado  $z \in \mathbb{C}$ , então:*

1.  $\cos(-z) = \cos z$ ;
2.  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$

*Demonstração.* Tome  $z \in \mathbb{C}$ .

1. segue da definição, que:

$$\begin{aligned}\cos(-z) &= \cosh(-zi) \\ &= \cosh zi \\ &= \cos z;\end{aligned}$$

2. teremos também, por definição, que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(-z) &= -i\operatorname{senh}(-zi) \\ &= -i(-\operatorname{senh} zi) \\ &= -(-i\operatorname{sen} zi) \\ &= -\operatorname{sen} z.\end{aligned}$$

□

**Proposição 3.2.4.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cdot \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cdot \cos z_1;$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2.$$

*Demonstração.* Tome  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

1. segue da definição, que:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z_1 + z_2) &= -i\operatorname{senh}(z_1 + z_2)i \\ &= -i\operatorname{senh}(z_1 i) \cdot \cosh z_2 i - i\operatorname{senh}(z_2 i) \cdot \cosh z_1 i \\ &= \operatorname{sen} z_1 \cdot \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cdot \cos z_1;\end{aligned}$$

2. também, por definição, teremos:

$$\begin{aligned}\cos(z_1 + z_2) &= \cosh(z_1 + z_2)i \\ &= \cosh(z_1 i) \cdot \cosh z_2 i + \operatorname{senh}(z_1 i) \cdot \operatorname{senh} z_2 i \\ &= \cosh(z_1 i) \cdot \cosh z_2 i - (-i\operatorname{senh} z_1 i) \cdot (-i\operatorname{senh} z_2 i) \\ &= \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2;\end{aligned}$$

□

**Corolário 3.2.2.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , então:*

$$\operatorname{sen}(z_1 - z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cdot \cos z_2 - \operatorname{sen} z_2 \cdot \cos z_1;$$

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 + \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2.$$

*Demonstração.* Tome  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Escreva  $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$  e aplique convenientemente em cada item dessa proposição as proposições 3.2.3 e 3.2.4.  $\square$

Para avaliar a existência da  $\operatorname{tg}z$ ,  $\operatorname{cotg}z$ ,  $\operatorname{sec}z$  e  $\operatorname{cosec}z$  com  $z \in \mathbb{C}$  é necessário obter as soluções das equações a seguir:

$$\cos z = 0 \quad \text{e} \quad z = 0. \quad (3.14)$$

1. Seja  $z \in \mathbb{C}$ , então  $\cos z = 0$ , se, e somente se:

$$\begin{aligned} \cosh zi &= 0 \\ zi &= \frac{(2k+1)\pi}{2}i \\ z &= \frac{(2k+1)\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Seja  $z \in \mathbb{C}$ , então  $\operatorname{sen} z = 0$ , se, e somente se:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} hi &= 0 \\ zi &= k\pi i \\ z &= k\pi. \end{aligned}$$

Das soluções das equações dadas em 3.14, tem-se que dado  $z \in \mathbb{C}$ , então:

1.  $\operatorname{tg}z$  e  $\operatorname{sec}z$  existem se, e somente se,  $z \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ ;
2.  $\operatorname{cotg}z$  e  $\operatorname{cosec}z$  existem se, e somente se,  $z \neq k\pi$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

Veja que dado  $z \in \mathbb{C}$ , teremos:

$$\begin{aligned} \cos(z + 2\pi) &= \cos z \cdot \cos 2\pi - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} 2\pi \\ &= \cos z \end{aligned} \quad (3.15)$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z + 2\pi) &= \operatorname{sen} z \cdot \cos 2\pi + \operatorname{sen} 2\pi \cdot \cos z \\ &= \operatorname{sen} z. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \cos(z + \pi) &= \cos z \cdot \cos \pi - \operatorname{sen} z \cdot \operatorname{sen} \pi \\ &= -\cos z \end{aligned} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(z + \pi) &= \operatorname{senz} \cdot \cos\pi + \operatorname{sen}\pi \cdot \cos z \\ &= -\operatorname{senz}.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Segue de 3.15 e 3.16, que

$$\operatorname{sec}(z + 2\pi) = \operatorname{sec}z \quad \text{e} \quad \operatorname{cossec}(z + 2\pi) = \operatorname{cossec}z,$$

e de 3.17 e 3.18, conclui-se que

$$\operatorname{tg}(z + \pi) = \operatorname{tg}z \quad \text{e} \quad \operatorname{cossec}(z + \pi) = \operatorname{cotg}z,$$

Logo, assim como em  $\mathbb{R}$ , em  $\mathbb{C}$ , o seno, o cosseno, a cossecante e a secante são periódicos de período  $2\pi$ , enquanto que a tangente e cotangente também são periódicas, mas com período  $\pi$ .

Além disso, verifica-se que a periodicidade na trigonometria circular e na trigonometria hiperbólica apresenta uma notável semelhança: em ambas, o período  $p$  é tal que  $|p| = 2\pi$  ou  $|p| = \pi$ , diferenciando apenas que na primeira,  $p \in \mathbb{R}$  e na segunda,  $p$  é um número imaginário puro (parte real de  $p$  é 0).

### 3.3 Fórmulas de Euler

No início do capítulo 2, foi mencionado que Euler deduziu as identidades 3.13. E para deduzir essas identidades, Euler utilizou as séries de Maclaurin<sup>2</sup> para as funções elementares  $e^x$ ,  $\operatorname{sen}x$  e  $\operatorname{cos}x$ , com  $x \in \mathbb{R}$  (MAOR, 1994). As séries são dadas por:

$$\operatorname{sen}x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\tag{3.19}$$

$$\operatorname{cos}x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\tag{3.20}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots\tag{3.21}$$

As séries de Maclaurin e as demonstrações das igualdades 3.19, 3.20 e 3.21 podem ser encontradas em Stewart (2009, v.2, p. 752 - 64). Substituindo  $x$  por  $ix$  na identidade 3.21, teremos:

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots\tag{3.22}$$

<sup>2</sup>Colin Maclaurin, matemático Escocês que viveu de 1698 a 1746 (BOYER e MERZERBACH, 2012, p. 283).

Agora observe que:

$$\begin{aligned} -1 &= i^2 = i^6 = \dots \\ -i &= i^3 = i^7 = \dots \\ 1 &= i^4 = i^8 = \dots \\ i &= i^5 = i^9 = \dots \end{aligned}$$

Logo, a partir de 3.22, teremos:

$$e^{ix} = 1 + i \cdot \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \cdot \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \cdot \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (3.23)$$

Reagrupando a série obtida em 3.23 de forma que os termos reais fiquem separados dos termos imaginários, vem:

$$e^{ix} = \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \cdot \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right). \quad (3.24)$$

De 3.19, 3.20 e 3.24, chegará a:

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \text{sen} x. \quad (3.25)$$

A igualdade 3.25, como já foi dito antes, também é conhecida como fórmula de Euler e, nela substituindo  $ix$  por  $-ix$  e lembrando que as funções trigonométricas circulares seno e cosseno são ímpar e par, respectivamente, terá:

$$e^{-ix} = \cos x - i \cdot \text{sen} x. \quad (3.26)$$

De 3.25 e de 3.26, teremos as igualdades 3.13, que são equivalentes às seguintes:

$$\cosh(xi) = \cos x \quad \text{e} \quad \sinh(xi) = i \cdot \text{sen} x. \quad (3.27)$$

### 3.4 Cálculo das razões trigonométricas hiperbólicas e circulares $x + yi$

Nesta seção, o objetivo é determinar as razões trigonométricas hiperbólica e circular de  $x + yi$  em termos de  $x$  e de  $y$ . Para tanto, serão aplicados resultados obtidos anteriormente neste capítulo. Primeiramente, será abordada a trigonometria hiperbólica. Iniciaremos por  $\cosh(x + yi)$  e  $\sinh(x + yi)$ .

Seja o número complexo  $x + yi$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ . Da proposição 3.2.1, teremos:

$$\cosh(x + yi) = \cosh x \cdot \cosh(yi) + \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{senh}(yi). \quad (3.28)$$

Segue de 3.27 e 3.28 que:

$$\cosh(x + yi) = \cosh x \cdot \operatorname{cos} y + i \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{sen} y. \quad (3.29)$$

Por outro lado, da proposição 3.2.2, teremos:

$$\operatorname{senh}(x + yi) = \operatorname{senh} x \cdot \cosh(yi) + \cosh x \cdot \operatorname{senh}(yi). \quad (3.30)$$

Segue de 3.27 e 3.30 que:

$$\operatorname{senh}(x + yi) = \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{cos} y + i \cosh x \cdot \operatorname{sen} y. \quad (3.31)$$

Considere o caso  $x + yi \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}i$ , para cada  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $\operatorname{tgh}(x + yi)$  e  $\operatorname{sech}(x + yi)$  existem; daí, pelas identidades 3.29 e 3.31, teremos:

$$\operatorname{tgh}(x + yi) = \frac{\operatorname{senh} x \cdot \operatorname{cos} y + i \cosh x \cdot \operatorname{sen} y}{\cosh x \cdot \operatorname{cos} y + i \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{sen} y}$$

e

$$\operatorname{sech}(x + yi) = \frac{1}{\cosh x \cdot \operatorname{cos} y + i \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{sen} y}.$$

Agora considere  $x + yi \neq k\pi i$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Dessa forma,  $\operatorname{cotgh}(x + yi)$  e  $\operatorname{cossech}(x + yi)$  existem; daí, pelas identidades 3.29 e 3.31, teremos:

$$\operatorname{cotgh}(x + yi) = \frac{\cosh x \cdot \operatorname{cos} y + i \operatorname{senh} x \cdot \operatorname{sen} y}{\operatorname{senh} x \cdot \operatorname{cos} y + i \cosh x \cdot \operatorname{sen} y}$$

e

$$\operatorname{cossech}(x + yi) = \frac{1}{\operatorname{senh} x \cdot \operatorname{cos} y + i \cosh x \cdot \operatorname{sen} y}.$$

Passemos agora ao estudo da razão trigonométrica circular do número complexo  $x + yi$ . Pelo item 2 da proposição 3.2.4, teremos:

$$\begin{aligned} \cos(x + yi) &= \cos x \cdot \cos(yi) - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}(yi) \\ &= \cos x \cdot \cosh(yi \cdot i) - \operatorname{sen} x \cdot [-i \operatorname{senh}(yi \cdot i)] \\ &= \cos x \cdot \cosh(-y) - \operatorname{sen} x \cdot [-i \operatorname{senh}(-y)] \\ &= \cos x \cdot \operatorname{cosh} y - i \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{senh} y. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por outro lado, do item 1 da proposição 3.2.4, teremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x + yi) &= \operatorname{sen}x \cdot \cos(yi) + \cos x \cdot \operatorname{sen}(yi) \\ &= \operatorname{sen}x \cdot \cosh(yi \cdot i) + \cos x \cdot [-i \operatorname{senh}(yi \cdot i)] \\ &= \operatorname{sen}x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \operatorname{senh} y.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Considere o caso  $x + yi \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Logo,  $\operatorname{tg}(x + yi)$  e  $\operatorname{sec}(x + yi)$  existem; daí, pelas identidades 3.32 e 3.33, teremos:

$$\operatorname{tg}(x + yi) = \frac{\operatorname{sen}x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \operatorname{senh} y}{\cos x \cdot \cosh y - i \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{senh} y}$$

e

$$\operatorname{sec}(x + yi) = \frac{1}{\cos x \cdot \cosh y - i \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{senh} y}.$$

Agora considere  $x + yi \neq k\pi$ , para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Dessa forma,  $\operatorname{cotg}(x + yi)$  e  $\operatorname{cossec}(x + yi)$  existem; daí, pelas identidades 3.32 e 3.33, teremos:

$$\operatorname{cotg}(x + yi) = \frac{\cos x \cdot \cosh y - i \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \operatorname{senh} y}$$

e

$$\operatorname{cossec}(x + yi) = \frac{1}{\operatorname{sen}x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \operatorname{senh} y}.$$

Note que dado  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se por exemplo,

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

Por outro lado, tomando  $z = 2\pi + yi$ , segue de 3.32,

$$\begin{aligned}\cos(x + yi) &= \cos 2\pi \cdot \cosh y - i \operatorname{sen} 2\pi \cdot \operatorname{senh} y \\ &= \cosh y,\end{aligned}$$

isto é,  $\cos z \geq 1$ , pois a imagem da função cosseno hiperbólico é  $[1, +\infty)$ . E tomando  $z = \frac{\pi}{2} + yi$ , conclui-se, de forma semelhante, que  $\operatorname{sen} z \geq 1$ .

Analisando as razões trigonométricas hiperbólicas e circulares em  $\mathbb{C}$ , verificou-se que existe uma relação bastante estreita entre essas duas trigonometrias, pois em ambos os casos, uma razão trigonométrica qualquer é expressa por uma combinação de razões trigonométricas de argumentos reais das duas trigonometrias.



# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, elaboramos um texto a respeito da **trigonometria hiperbólica** para alunos de iniciação científica, especificamente, e, também, para professores do ensino médio. A meta principal é desenvolver esse texto apoiando-se somente em recursos elementares da matemática. Na construção da trigonometria hiperbólica em  $\mathbb{R}$ , foi utilizado apenas recursos básicos de geometria analítica, geometria plana e noções básicas de limites de sequências e de funções reais. No que concerne ao estudo analítico e gráfico das **funções trigonométricas hiperbólicas**, tem-se que o primeiro caso desenvolveu-se sem a interferência de derivada, isto é, de forma completamente elementar; já o segundo caso demandou recursos matemáticos um pouco mais avançados, pois foram utilizados limite de funções reais e o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função. Quanto à abordagem da trigonometria hiperbólica em  $\mathbb{C}$ , foram utilizadas séries de potências.

Pode-se dar continuidade ao estudo da conexão entre a trigonometria hiperbólica e trigonometria circular haja vista que  $\beta$  define a função gudermanniana de  $\alpha$ , que em notação se escreve  $gd(\alpha) = \beta$ . Além disso, dar continuidade ao estudo das funções hiperbólicas inversas como, por exemplo, suas propriedades.

Portanto, acreditamos que os resultados apresentados nesta dissertação venham contribuir para o enriquecimento matemático tanto de alunos do ensino médio que estejam envolvidos em projetos de iniciação científica quanto de professores de matemática do ensino médio.

# REFERÊNCIAS

- [1] BARTLE, Gardner Robert; SHERBERT, Donald R. **Introduction to Real Analysis**. 4.ed. University of Illinois, Urbana: Champaign, 2011. 402 p.
- [2] BOYER, Carl B.; MERZERBACH, Uta C. **História da Matemática**. Traduzido por Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. 504 p.
- [3] CARMO, Manfredo Perdigão do; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduro. **Trigonometria/Números Complexos**: Coleção do Professor de Matemática. 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. 122 páginas
- [4] DATOLLI, G.; FRANCO, M. Del. **Hyperbolic and Circular Trigonometry and Application to Special Relativity**. Disponível em <<http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1002/1002.4728.pdf>>. Acesso em: 13 de fevereiro de 2014.
- [5] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de; NEVE, Aloisio Ferreira. **Equações Diferenciais Aplicadas**. Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1997. 301 p.
- [6] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. 2.ed. Rio de Janeiro:LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. 1996. 256 p.
- [7] HEFEZ, Abramo; FERNANDES, Cecília de Souza. **Introdução à Álgebra Linear**: Coleção PROFMAT 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 328 p.
- [8] LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. V.1. Traduzido por Cyro de Carvalho Patarra. 3.ed. São Paulo: Editora HARBRA Ltda, 1994. 545 p.
- [9] LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**: Coleção do Professor de Matemática. 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 152 p.
- [10] LIMA, Elon Lages et al. **Temas e problemas elementares**: Coleção PROFMAT.5.ed. Rio de Janeiro: SBM 2013. 329 p.
- [11] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**: Projeto Euclides. Volume 1. 12.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2007. 431 p.

- [12] LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**: Coleção do Professor de Matemática. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 117 p.
- [13] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**: Coleção Professor de Matemática. V.1. 9.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. 280 p.
- [14] LIMA, Elon Lages. **Análise Real**.. V.1. 7.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004. 189 p.
- [15] MAOR, Eli. *e*: **A HISTÓRIA DE UM NÚMERO**. Traduzido por Jorge Califfe. 4.ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. 233 p.
- [16] McMAHON, James. **HYPERBOLIC FUNCTIONS**. 4.ed. New York: John Wiley & Sons, 1906. 171 p.
- [17] ROBINSON, William K. **Slides Rulles with Hyperbolic Function Scales**. Disponível em <<http://www.docucu.com/view/0451389f1275c4a6bb57499c25d8e97a/A-Short-History-of-Hyperbolic-Functions-Hyperbolic-Slide-Rules.doc>>. Acesso em: 13 de fevereiro de 2014.
- [18] SOARES, Márcio G. **Cálculo em Uma Variável Complexa**. 2.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001. 214 p.
- [19] SPIEGEL, Murray R. et al. **Schaum's outline of complex variables**: with an introduction to conformal mapping and its aplication. 2.ed.
- [20] STEWART, James. **Cálculo**. V.1. Traduzido por Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. 6.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2009. 687 p.
- [21] STEWART, James. **Cálculo**. V.2. Traduzido por Antonio Carlos Moretti e Antonio Carlos Gilli Martins. 6.ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2009. 882 p.

# APÊNDICES

# APÊNDICE A - Representação gráfica das funções seno e cosseno hiperbólicos como soma e diferença de funções

Nesta seção tem-se o objetivo de construir os gráficos das funções seno e cosseno hiperbólicos de maneira alternativa, a partir dos gráficos de duas funções exponenciais básicas.

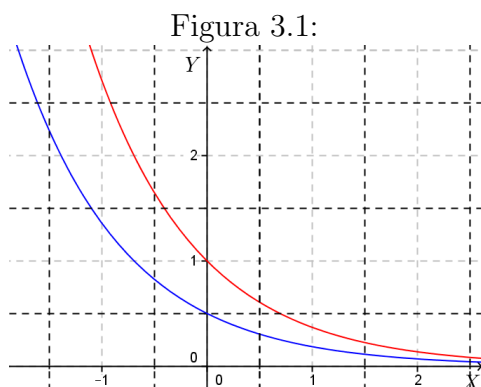
Inicialmente, considere os gráficos das seguintes funções reais:

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}e^x$$

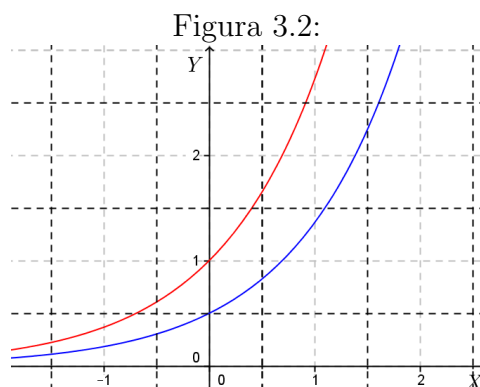
$$f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{2}e^{-x}$$

Por outro lado, os gráficos de  $f_1$  e  $f_2$  são obtidos a partir dos gráficos das exponenciais elementares  $e^x$  e  $e^{-x}$ , respectivamente, aplicando uma contração de fator 0.5 na ordenada do par ordenado dessas funções. A figura 3.1 mostra os gráficos, em vermelho, de  $e^x$  e, em azul, de  $0.5e^x$ ; e a figura 3.2 ilustra os gráficos de  $e^{-x}$ , em vermelho, e de  $0.5e^{-x}$ , em azul.

Observe que a função seno hiperbólico é dada por  $f_1 - f_2$ . Tome então, os

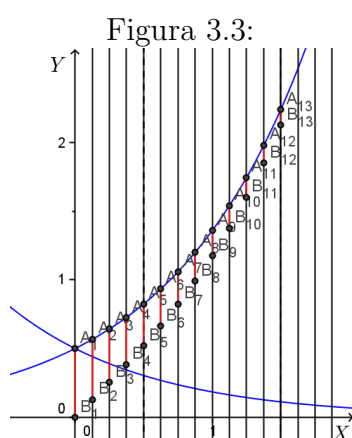


Fonte: Autor

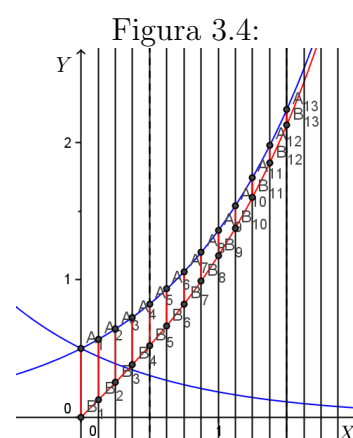


Fonte: Autor

gráficos de  $f_1$  e de  $f_2$  num único sistema de coordenadas cartesianas e, aplicando o método do feixe de retas paralelas ao eixo  $OY$ , obteremos, para  $x \geq 0$ , o gráfico  $f_1 - f_2$ , que é a representação gráfica de  $\sinh(x)$  para  $x \geq 0$ . As figuras 3.3 e 3.4 ilustram o processo. Na figura 3.3, o segmento  $A_i B_i$  sobre a reta  $x = a$  é tal que  $A_i$  pertence ao gráfico de  $f_1$  e  $\overline{A_i B_i} = f_2(a)$ . Dessa forma, temos que  $B_i$  pertence ao gráfico de  $f_1 - f_2$ , isto é,  $B_i$  é um ponto do gráfico de  $\sinh(\cdot)$ . Observe que ao passo que o valor de  $x$  aumenta,  $B_i$  se aproxima de  $A_i$ . Ou seja, o traçado do gráfico da função seno hiperbólico tende a coincidir com a representação gráfica de  $f_1$ . Por fim, na figura 3.4, tem-se o traçado do gráfico de  $\sinh(\cdot)$  para  $x \geq 0$ , como já foi dito anteriormente.

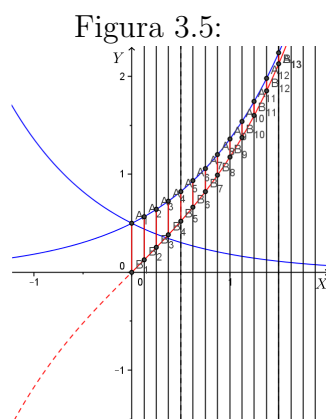


Fonte: Autor

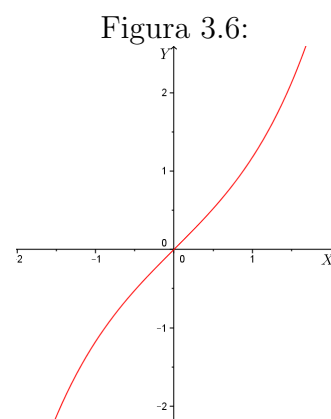


Fonte: Autor

Para a conclusão do esboço do gráfico da função seno hiperbólico, recordemos que essa é uma função ímpar, ou seja, os pontos  $P_1(x, \sinh x)$  e  $P_2(-x, \sinh(-x))$  são simétricos com relação a  $O(0, 0)$ . Veja as figuras 3.5 e 3.6, onde nessa última está, o esboço final.

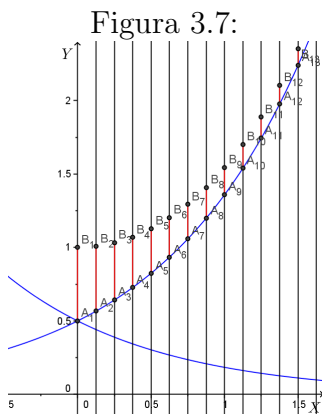


Fonte: Autor

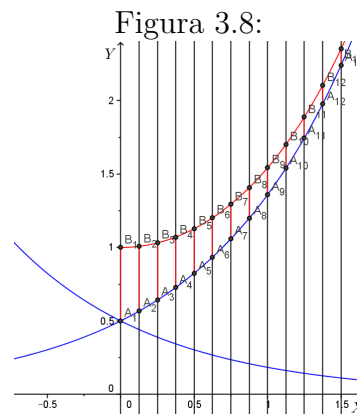


Fonte: Autor

Agora veja que a função cosseno hiperbólico é dada por  $f_1 + f_2$ . Assim, tome os gráficos de  $f_1$  e de  $f_2$  num único sistema cartesiano. Novamente, aplicando o método do feixe de retas paralelas ao eixo  $OY$ , obteremos, para  $x \geq 0$ , o gráfico de  $f_1 + f_2$ . As figuras 3.7 e 3.8 ilustram os processos. Na figura 3.7, o segmento  $A_i B_i$  sobre a reta  $x = a$  é tal que  $A_i$  pertença ao gráfico de  $f_1$  e  $\overline{A_i B_i} = f_2(a)$ . Dessa forma, conclui-se que  $B_i$  é um ponto do gráfico de  $f_1 + f_2$ , isto é,  $B_i$  pertence ao gráfico de  $\cosh(\cdot)$ . Por fim, na figura 3.8, tem-se o traçado do gráfico de  $f$  para  $x \geq 0$ . Para concluir o esboço do gráfico

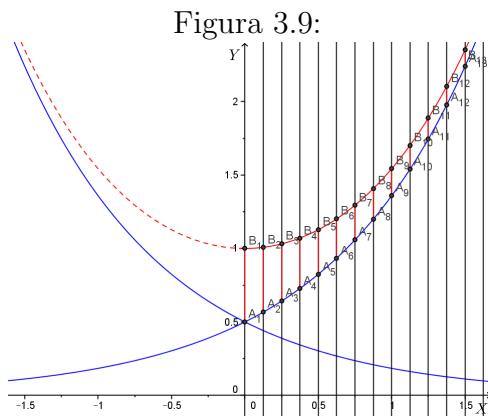


Fonte: Autor

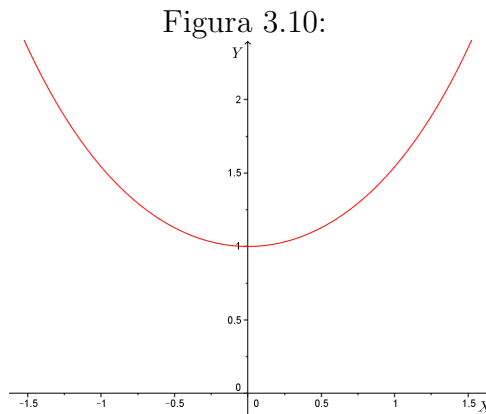


Fonte: Autor

da função cosseno hiperbólico, recordemos que essa é uma função par, isto é, os pontos  $P_1(x, \cosh x)$  e  $P_2(-x, \cosh(-x))$  são simétricos com relação ao eixo  $OY$ . Veja as figuras 3.9 e 3.10; nessa última figura está o esboço final.



Fonte: Autor



Fonte: Autor

# APÊNDICE B - Demonstração da proposição

## 2.8.1

Como foi visto, a proposição 2.8.1 é de fundamental importância para o esboço dos gráficos das funções secante hiperbólica e cossecante hiperbólica. Neste tópico iremos demonstrá-la, para tanto, precisamos da seguinte proposição.

**Proposição 3.4.1.** *Sejam  $f : D(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real e o intervalo  $I \subset D(f)$ :*

1. *se o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $I$ , então, para quaisquer  $x_1, x_2 \in I$  tais que  $x_1 < x_2$ ,  $m(x_2) < m(x_1)$ ;*
2. *se o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para cima em  $I$ , então, para quaisquer  $x_1, x_2 \in I$  tais que  $x_1 < x_2$ ,  $m(x_1) < m(x_2)$*

*Demonstração.* A prova será feita para o caso 1, e a demonstração do caso 2 segue de modo análogo.

1. Seja  $I \subset D(f)$ , e o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $I$ . Por definição, para todo  $x \in I$ , existe  $m(x)$ , já que esse gráfico deve estar abaixo de todas suas retas tangentes em  $I$ .

Tome  $x_1, x_2 \in I$  tais que  $x_1 < x_2$ , isto é,  $x_1 - x_2 < 0$ . Sejam as retas  $r_1$  e  $r_2$  de inclinações  $m(x_1)$  e  $m(x_2)$ , cujas equações são:

$$r_1 : y = m(x_1)(x - x_1) + f(x_1) \quad (3.34)$$

$$r_2 : y = m(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \quad (3.35)$$

Dado que o gráfico de  $f$  tem concavidade voltada para baixo em  $I$ , e  $x_1 \neq x_2$ , temos por definição, que o ponto  $P_1(x_1, f(x_1))$  está abaixo do ponto  $P'_1$  sobre  $r_2$  cuja abscissa é  $x_1$ , assim como  $P_2(x_2, f(x_2))$  está abaixo de  $P'_2$  cuja abscissa é  $x_2$ . Dessa forma, segue de 3.34 e 3.35, que:

$$f(x_1) < m(x_2)(x_1 - x_2) + f(x_2) \quad (3.36)$$

$$f(x_2) < m(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_1). \quad (3.37)$$



De 3.36 e 3.37, teremos:

$$\begin{aligned} m(x_2)(x_1 - x_2) + m(x_1)(x_2 - x_1) &> 0 \\ m(x_2)(x_1 - x_2) - m(x_1)(x_1 - x_2) &> 0 \\ [m(x_2) - m(x_1)](x_1 - x_2) &> 0. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Da hipótese  $x_1 - x_2 < 0$  e de 3.38, teremos:

$$\begin{aligned} m(x_2) - m(x_1) &< 0 \\ m(x_2) &< m(x_1). \end{aligned}$$

□

Agora, enunciaremos e demonstraremos a proposição 2.8.1.

“Seja  $f$  uma função real e  $I \subset D(f)$  tal que para todo  $x \in I$ , existe  $m(x)$ . Se  $x_0$  é a abscissa de um ponto onde o gráfico de  $f$  muda a concavidade, então, se o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}$$

existir, ele deve ser nulo.”

*Demonstração.* Sejam a função  $f$  e  $x_0 \in I \subset D(f)$  tais que existe o limite a seguir

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} \quad (3.39)$$

em que  $x_0$  é a abscissa do ponto onde o gráfico de  $f$  muda a concavidade. Sejam também os intervalos  $I_1 = [a, x_0]$  e  $I_2 = [x_0, b]$  ambos contidos em  $I$ . Segue da hipótese, que para todo  $x \in I_1 \cup I_2$ , existe  $m(x)$ . Suponha, sem perda de generalidade, que o gráfico de  $f$  tenha concavidade para cima em  $I_1$  e, conseqüentemente, seja côncavo para baixo em  $I_2$ . Assim, pela proposição 3.4.1, para cada  $x \in I_1$ ,  $m(x) < m(x_0)$ , isto é:

$$\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} > 0 \quad (3.40)$$

e para todo  $x \in I_2$ ,  $m(x) < m(x_0)$ , isto é:

$$\frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} < 0. \quad (3.41)$$

Pelo Teorema 3.4.4, segue de 3.40 e 3.41, respectivamente, que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (3.42)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (3.43)$$

Por outro lado, de 3.39, segue do teorema dos limites laterais<sup>3</sup>, deve-se ter:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0}. \quad (3.44)$$

Conclui-se de 3.42, 3.43 e 3.44 que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

□

---

<sup>3</sup>esse teorema no ANEXO C

# ANEXOS

# ANEXO A - Definição de limite de funções reais

Serão apresentadas algumas das definições de limite de uma função real, que podem ser encontradas em Leithold (1994, v.1), de Stewart (2009, v.1), Bartle e Sherbert (2011) ou Lima (2004, v.1).

**Definição 3.4.1.** (*Definição de Limite*) Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$ , dizemos que limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  é  $L$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

quando para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon. \quad (3.45)$$

**Definição 3.4.2.** (*Limite lateral à esquerda*) Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$ , dizemos que limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  pela esquerda é  $L_1$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1,$$

quando para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in A, a - \delta < x < a \implies |f(x) - L_1| < \epsilon. \quad (3.46)$$

**Definição 3.4.3.** (*Limite lateral à direita*) Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$ , dizemos que limite de  $f(x)$  quando  $x$  tende para  $a$  pela direita é  $L_2$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2,$$

quando para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in A, a < x < a + \delta \implies |f(x) - L_2| < \epsilon. \quad (3.47)$$

**Definição 3.4.4.** (*Definição de Limite no Infinito Positivo*) Sejam  $A \subset \mathbb{R}$  ilimitado superiormente e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende para  $+\infty$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L,$$

quando para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $K > 0$  tal que

$$x \in A, x > K \implies |f(x) - L| < \epsilon. \quad (3.48)$$

**Definição 3.4.5.** (*Definição de Limite no Infinito Negativo*) Sejam  $A \subset \mathbb{R}$  ilimitado inferiormente e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que o limite de  $f(x)$  é  $L$  quando  $x$  tende para  $-\infty$ , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L,$$

quando para todo  $\epsilon > 0$  dado arbitrariamente, existe  $K < 0$  tal que

$$x \in A, x < K \implies |f(x) - L| < \epsilon. \quad (3.49)$$

**Definição 3.4.6.** (*Definição de Limite Infinito Negativo*) Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$ . Dizemos que  $f(x)$  tende para  $-\infty$  quando  $x$  tende para  $a$  e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty,$$

quando para todo  $N < 0$  dado arbitrariamente, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < N. \quad (3.50)$$

**Definição 3.4.7.** (*Definição de Limite Infinito Positivo*) Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$ . Dizemos que  $f(x)$  tende para  $+\infty$  quando  $x$  tende para  $a$  e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty,$$

quando para todo  $N > 0$  dado arbitrariamente, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x \in A, 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > N. \quad (3.51)$$

## ANEXO B - Propriedades básicas de limite de funções reais - operações

As quatro propriedades referentes ao limite de uma função real apresentadas a seguir podem ser encontradas na obra *Análise Real de Lima* (2004, v.1, p.64). Para aprofundamento no estudo de limite, o leitor poderá consultar a referência citada anteriormente.

Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$  com  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$  e  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$ , então:

$$i) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2;$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L_1 - L_2.$$

$$iii) \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$$

$$iv) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \text{ se } L_2 \neq 0.$$

# ANEXO C - Teoremas de limite de funções reais

Os três primeiros teoremas apresentados a seguir podem ser encontrados juntamente com suas demonstrações em Leithold (1994, v.1) ou em Stewart(2009, v.1). Já o quarto teorema pode ser localizado em Lima (2007, v.1, p. 219-20), localizando o exercício 18.

**Teorema 3.4.1.** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$ . Se o limite de  $f(x)$ , quando  $x$  tende para  $a$ , existe, ele é único.*

**Teorema 3.4.2.** *Dados  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e possivelmente  $a \in A$ , então:*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad (3.52)$$

**Teorema 3.4.3.** *(Teorema do Confronto) Sejam  $f$ ,  $g$  e  $h$ , funções de domínios contidos em  $\mathbb{R}$  que se intersectam num intervalo aberto  $I$  possivelmente contendo  $a$ . Se  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  pertencente a  $I$ , e se*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L.$$

**Teorema 3.4.4.** *Sejam  $f$  e  $g$ , funções de domínios contidos em  $\mathbb{R}$  que se intersectam num intervalo aberto  $I$  contendo possivelmente  $a$ . Se  $f(x) \leq g(x)$  quando  $x$  está próximo de  $a$  e os limites de  $f(x)$  e  $g(x)$  existem quando  $x$  tende para  $a$ , então*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

**Teorema 3.4.5.** *(Teorema da Substituição) Sejam  $X, Y \subset \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  com  $f(X) \subset Y$ . Se  $\forall x \in X$  e  $b \in Y$  tem-se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$  e, além disso,*

$f(x) \neq b \forall x \in X - \{a\}$ , então

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

*Demonstração.* Da hipótese  $\lim_{y \rightarrow b} g(y)$ , segue pela definição 3.4.1 que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta' > 0$  tal que

$$0 < |y - b| < \delta' \implies |g(y) - c| < \epsilon. \quad (3.53)$$

Visto que  $f(x) \in Y \forall x \in X$ , segue de 3.53 que

$$0 < |f(x) - b| < \delta' \implies |g(f(x)) - c| < \epsilon. \quad (3.54)$$

Por outro lado, das hipóteses  $f(x) \neq b \forall x \in X - \{a\}$  e  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , tem-se que para o  $\delta'$  encontrado em 3.53, existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies 0 < |f(x) - b| < \delta'. \quad (3.55)$$

Observe que  $\epsilon$  foi tomado arbitrário; logo, de 3.55 e 3.54, por transitividade, conclui-se que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies |g(f(x)) - c| < \epsilon.$$

Portanto, pela definição 3.4.1,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

□