



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JAILSON GOMES DA SILVA

**ESTUDO DA IMPEDÂNCIA DE PLASMAS ANISOTRÓPICOS POR
MEIO DO TEOREMA DE POYNTING**

Boa Vista,

2015

JAILSON GOMES DA SILVA

**ESTUDO DA IMPEDÂNCIA DE PLASMAS ANISOTRÓPICOS POR
MEIO DO TEOREMA DE POYNTING**

Texto dissertativo apresentado como pré-requisito para obtenção de título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima. Área de Concentração: Física de Plasmas.

Orientador: Prof. Dr. Eliel Eleutério Farias

Boa Vista, RR

2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S586e Silva, Jailson Gomes da.
Estudo da impedância de plasmas anisotrópicos por meio do Teorema de Poynting / Jailson Gomes da Silva. – Boa Vista, 2015.
72 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Eliel Eleutério Farias.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação em Física.

1 – Tensor condutividade. 2 – Teorema de Poynting. 3 – Resistência de plasma. 4 – Reatância de plasma. 5 – Impedância de plasma. I – Título. II – Farias, Eliel Eleutério (orientador).

CDU – 533.9:537.3

JAILSON GOMES DA SILVA

**ESTUDO DA IMPEDÂNCIA DE PLASMAS ANISOTRÓPICOS POR
MEIO DO TEOREMA DE POYNTING**

Texto dissertativo apresentado como pré-requisito para obtenção de título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima. Área de Concentração: Física de Plasmas. Apresentada em 14 de Setembro de 2015 e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Eliel Eleutério Farias
(Presidente) Universidade Federal de Roraima

Prof. Dr. Gildo de Holanda Cavalcanti
(Membro) Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Igor Tavares Padilha
(Membro) Universidade Federal do Amazonas

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
(Membro) Universidade Federal de Roraima

Boa Vista, RR

2015



ATA DA 26ª DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM FÍSICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA

MESTRANDO: Jailson Gomes da Silva

DATA: 14/09/2015 HORÁRIO: 15h LOCAL : Auditório

TÍTULO: "ESTUDO DA IMPEDÂNCIA DE PLASMAS ANISOTRÓPICOS POR MEIO DO TEOREMA DE POYNTING"

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. **Eliei Eleutério Farias** (orientador) Presidente/UFRR

Prof. Dr. **Gildo de Holanda Cavalcanti** Membro/IF/UFR

Prof. Dr. **Igor Tavares Padilha** Membro/ICE/UFAM

Prof. Dr. **Lindeval Fernandes de Lima** Membro/UFRR

Reuniu-se a Banca Examinadora acima descrita, nas formas e termos do art. 32 do Regimento Interno do Programa de Pós - Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima, para Exame de Defesa de Dissertação de Mestrado sob o título "**ESTUDO DA IMPEDÂNCIA DE PLASMAS ANISOTRÓPICOS POR MEIO DO TEOREMA DE POYNTING.**" A sessão foi aberta pelo Presidente da Banca Examinadora Prof. Dr. **Eliei Eleutério Farias**. Após a explanação do candidato, o presidente passou a palavra aos membros da Banca Examinadora. Terminada a arguição, a banca reuniu-se em sessão secreta para atribuições dos conceitos, "A" para aprovado ou "R" para reprovado, os quais transcreveram:

Prof. Dr. **Gildo de Holanda Cavalcanti** Conceito: A

Prof. Dr. **Igor Tavares Padilha** Conceito: A

Prof. Dr. **Lindeval Fernandes de Lima** Conceito: A



Universidade Federal de Roraima - UFRR
Programa de Pós-Graduação em Física - PPGFIS



CONTINUAÇÃO DA ATA DE DISSERTAÇÃO

De acordo com o parágrafo 2º do art. 32 do regimento Interno do PPGFIS, o (a) candidato (a) foi considerado (a) Aprovado.

Encerrada a sessão secreta, o presidente informou o resultado. Nada mais havendo a tratar, foi encerrada a sessão, e para constar, eu Cristiane Aparecida da Silva Pereira, lavrei a presente ata, que assino juntamente com os membros da Banca Examinadora.

Prof. Dr. **Eliel Eleutério Farias**
Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. **Gildo de Holanda Cavalcanti**
Membro da Banca Examinadora

Prof. Dr. **Igor Tavares Padilha**
Membro da Banca Examinadora

Prof. Dr. **Lindeval Fernandes de Lima**
Membro da Banca Examinadora

Sra. **Cristiane Aparecida da Silva Pereira**
Secretária do PPGFIS

Às raízes,
painho e mainha,
Epitácio Gomes da Silva (*in memoriam*) e
Salene Pinheiro Gomes da Silva,
Pelo amparo e exemplo diário de
luta e fé na vida.

AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de agradecer primeiramente, ao professor Eliel Eleutério Farias pela paciência, por me orientar e ter acreditado na realização deste trabalho;

Ao professor Gildo de Holanda Cavalcanti do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense pela ideia, incentivo constante e apoio no desenvolvimento de todo o trabalho;

À minha mãe Solene Pinheiro Gomes da Silva, meus irmãos Jadianny, Syllis, Janderson e Augusta Camille por todo o incentivo e apoio ao longo do curso;

À minha esposa Luara Peixoto e meus filhos Raul e Artur pelo apoio, compreensão, pelo incentivo diário e por servirem como fonte de força e fé;

Aos meus colegas de curso Klívia, Patrícia, Vilmara, Aduan, Sérgio e Wanderley pelo companheirismo, pela partilha de bons lanches e bons momentos;

Ao CNPq pelo apoio financeiro por meio do projeto PROCAD UFRR/UFF com o qual tem financiado as missões docente e discente entre estas instituições, bem como realizado a aquisição de material permanente e custeio;

Finalmente, aos membros da banca por terem aceitado a ler este trabalho e participar da banca de avaliação.

Nunca falho numa experiência, apenas descubro mil maneiras de fazê-la de forma diferente.

(Benjamin Franklin)

RESUMO

Sabemos que a matéria no estado de plasma torna-se condutora de corrente elétrica líquida e responde fortemente a campos eletromagnéticos. Esta resposta pode ser utilizada para sondar grandezas relacionadas ao plasma, e é definida em termos de um tensor condutividade. Neste trabalho apresentamos um breve estudo sobre o cálculo do tensor condutividade para plasmas anisotrópicos utilizando a notação de Einstein e o símbolo de Levi-Civita. Fazendo-se uso deste tensor condutividade particularizado para modelo de plasma frio, procuramos determinar expressões para resistência, reatância e impedância de plasma definidas por meio do teorema de Poynting. Em uma simples análise sobre a expressão de impedância mostramos um caminho alternativo para determinação da frequência e densidade de plasma e em termos de parâmetros experimentais facilmente mensuráveis tais como raio, distância entre eletrodos, diferença de potencial e resistência externa ao plasma. O método apresentado aqui é invasivo, assim como nos casos em que o diagnóstico da frequência e densidade de plasma são realizados por meio da sonda Langmuir, no entanto o mapeamento por meio da impedância mostra-se experimentalmente e matematicamente mais simples de ser implementado, e com a possibilidade de ser aplicado a sistemas pulsados como Tokamak e Theta-pinch.

Palavras-chaves: Tensor condutividade. Teorema de Poynting. Resistência de plasma. Reatância de plasma. Impedância de plasma.

ABSTRACT

We know that matter in the plasma state becomes good conductors and respond strongly to electromagnetic fields. This response may be used to probe quantities related to plasma, and is defined in terms of a conductivity tensor. In this work we present a brief study about the conductivity tensor calculus for anisotropic plasmas using the notation of Einstein and the Levi-Civita symbol. Making use of this conductivity tensor particularized for cold plasma model, we seek to determine expressions for resistance, reactance and plasma impedance defined by the Poynting's theorem. In a simple analysis of the expression impedance we show an alternative way for determining the plasma density and plasma frequency in terms of easily measurable experimental parameters such as radius, distance between electrodes, the potential difference and external resistance to plasma. The method presented here is invasive as well as in cases where the diagnosis frequency and plasma density are performed by Langmuir probe, however the mapping through the impedance is shown mathematically and experimentally simpler to implement, and with the possibility of being applied to pulsed systems as Tokamak and Theta-Pinch.

Keywords: Conductivity tensor. Poynting's theorem. Plasma resistance. Plasma reactance. Plasma impedance.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ilustração de plasmas gerados na superfície solar	17
Figura 2 – Imagem de um raio durante uma tempestade na praia de bombas, Santa Catarina - Brasil	17
Figura 3 – Aurora Boreal visualizada em Fairbanks, Alasca	17
Figura 4 – Aurora Austral visualizada a partir da estação norte americana Amundsen-Scott	17
Figura 5 – Plasma gerado por descarga elétrica AC	18
Figura 6 – Plasma gerado por fonte de Rádio Frequência (RF)	18
Figura 7 – Ilustração de um sistema passivo dentro de um volume V envolto por uma superfície Σ	28
Figura 8 – Ilustração das componentes paralela e normal (\mathbf{E}_{\parallel} e \mathbf{E}_{\perp}) do campo elétrico em relação ao campo magnético \mathbf{B}_0 , e as respectivas componentes do tensor condutividade	37
Figura 9 – Gráficos mostrando a dependência de σ_{\perp}	37
Figura 10 – Ilustração do circuito de perturbação do plasma	50
Figura 11 – Curva $g(\xi)$ para frequência de plasma da ordem de 10^9Hz e $b = 1.42\text{cm}$. .	54
Figura 12 – Curva $g(\xi)$ para frequência de plasma da ordem de 10^9Hz e $b = 1.42\text{cm}$. .	55
Figura 13 – Impedância total do circuito de perturbação em função dos elementos R_{ext} e χ'' , e o circuito equivalente representado em termos de Z	57
Figura 14 – Curva obtida para a parte reativa da equação 4.25	58
Figura 15 – Ilustração do aparato experimental montado durante os meses de dissertação	61

LISTA DE SÍMBOLOS

ϵ_0	Permissividade Elétrica do Vácuo
μ_0	Permeabilidade Magnética do Vácuo
L_p	Indutância de Plasma
C_p	Capacitância de Plasma
J	Densidade de Corrente Elétrica
E	Vetor Campo Elétrico
D	Vetor Deslocamento Elétrico
ω	Frequência Angular
B	Vetor Campo Magnético
V	Volume
c	Velocidade da Luz no Vácuo
u	Densidade de Energia Eletromagnética
u_{el}	Densidade de Energia Elétrica
u_{mg}	Densidade de Energia Magnética
S	Vetor de Poynting
t	Tempo
i	Constante Imaginária ($\sqrt{-1}$)
x	Vetor Posição
ρ_q	Densidade de Carga Elétrica
m_{ion}	Massa iônica
m_e	Massa Eletrônica
q_e	Carga Eletrônica
q_{ion}	Carga iônica
$\overleftrightarrow{\sigma}$	Tensor Condutividade Elétrica

$\overleftrightarrow{\epsilon}$	Tensor Dielétrico
i	Matriz identidade
Z	Impedância
ω_{ce}	Frequência de Plasma Ciclotrônica
ω_e	Frequência de Plasma Eletrônica
ω_{ion}	Frequência de Plasma Iônica
χ_c	Reatância Capacitiva no Vácuo
χ	Reatância
R	Resistência Elétrica
Z_p	Impedância de Plasma
P	Potência Elétrica Média
I	Corrente Elétrica
\mathbf{V}	Vetor Velocidade
η	Densidade de Partículas
ρ_m	Densidade de Massa
\mathbf{P}	Vetor Momento Linear
\mathbf{F}	Força

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	PRODUÇÃO DE PLASMAS	16
1.2	MEDIDAS DE DENSIDADE E TEMPERATURA DE PLASMAS	18
1.3	TENSOR CONDUTIVIDADE	20
2	TEOREMA DE POYNTING E DEFINIÇÃO GERAL DE IMPEDÂNCIA	22
2.1	TEOREMA DE POYNTING	23
2.2	TEOREMA DE POYNTING PARA CAMPOS HARMÔNICOS	25
2.3	DEFINIÇÃO DE RESISTÊNCIA, REATÂNCIA E IMPEDÂNCIA	28
3	CONDUTIVIDADE DE PLASMAS	31
3.1	CONDUTIVIDADE DC	32
3.1.1	Plasma isotrópico	32
3.1.2	Plasma anisotrópico	33
3.2	CONDUTIVIDADE AC	37
3.3	CÁLCULO DO TENSOR CONDUTIVIDADE DE PLASMAS ANISOTRÓPICOS POR MEIO DA NOTAÇÃO DE EINSTEIN E DO SÍMBOLO DE LEVI-CIVITA	39
3.3.1	Uma breve análise do tensor condutividade	45
4	IMPEDÂNCIA DE PLASMAS	50
4.1	IMPEDÂNCIA TOTAL PARA REATÂNCIA NULA	53
4.2	IMPEDÂNCIA TOTAL PARA REATÂNCIA NÃO NULA	56
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	59
6	PERSPECTIVAS FUTURAS	61
	REFERÊNCIAS	62
	APÊNDICE A Cálculo das Componentes do Tensor Dielétrico	65
A.1	Componente x	65
A.2	Componente y	67
A.3	Componente z	69
	ANEXO A Python-Script para Obtenção dos Gráficos	71
A.1	Script - Figura 9	71
A.2	Script - Figura 11	72
A.3	Script - Figura 12	73
A.4	Script - Figura 14	74

1 INTRODUÇÃO

Toda a matéria conhecida existente no universo é frequentemente classificada em termos de quatro estados termodinâmicos: sólido, líquido, gasoso e plasma. Tudo o que conhecemos encontra-se em um destes quatro estados. A diferença entre os estados sólido, líquido e gasoso de uma porção de matéria está basicamente relacionada à energia potencial de ligação entre seus constituintes (átomos e/ou moléculas) e a energia térmica. No estado sólido, a energia potencial de ligação entre os átomos ou moléculas é forte, nos líquidos é relativamente fraca e nos gases é quase inexistente, (BITTENCOURT, 2004).

Se por meio de uma fonte de calor fornecermos energia térmica suficiente a uma dada porção de matéria no estado sólido, esta chegará a um ponto onde sua temperatura se manterá aproximadamente constante. Neste ponto, teremos então a transição da porção de matéria que estava inicialmente no estado sólido para o líquido. Se continuarmos fornecendo energia térmica à porção de matéria depois de estar totalmente no estado líquido, esta depois de um determinado tempo chegará a um outro ponto onde a temperatura é mais uma vez aproximadamente constante. Teremos então, a transição entre os estados líquido e gasoso. Se mais energia térmica for fornecida à porção de matéria, agora no estado gasoso, as moléculas que a compõe dissociaram-se em átomos neutros, íons e elétrons. A esta “sopa” de átomos neutros, íons e elétrons comumente denominamos o estado de plasma. Vale ressaltarmos aqui que todo plasma é constituído de uma “sopa” de partículas ionizadas, mas nem toda “sopa” de partículas ionizadas constitui um plasma. Para que uma determinada porção de matéria seja tratada como estando no estado de plasma, é preciso que haja um número grande de portadores de carga por unidade de volume, (BITTENCOURT, 2004).

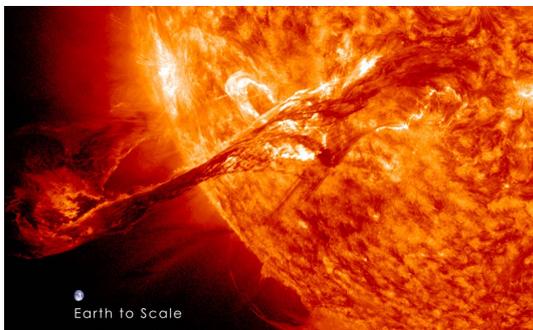
1.1 PRODUÇÃO DE PLASMAS

Embora seja teoricamente simples produzir plasma através do fornecimento de energia térmica a uma determinada porção de matéria, do ponto de vista experimental esta tarefa não é relativamente simples e nem tão pouco a forma mais eficiente de se produzir plasmas, dependendo do tipo de matéria considerada, pois o potencial de ionização pode ser relativamente alto.

Na natureza os plasmas são criados de diversas formas: em processos de fusão nuclear, como o caso do plasma gerado no sol, figura 1; Por descargas elétricas como no caso dos raios em dias de tempestades, figura 2; Através de colisões entre as partículas do vento solar com a alta atmosfera terrestre ¹, figura 3 e 4; Em processos de fotoionização como ocorre na ionosfera terrestre; E outros.

¹ Este fenômeno é denominado Aurora Polar pois ocorre predominantemente em regiões próximas aos polos terrestres. Quando o fenômeno ocorre no polo norte é denominado Aurora Boreal, quando no polo sul é chamada Aurora Austral, (WIKIPEDIA, 2015).

Figura 1 – Ilustração de plasmas gerados na superfície solar



Fonte: Zell (2012)

Figura 2 – Imagem de um raio durante uma tempestade na praia de bombas, Santa Catarina - Brasil



Fonte: Flores (2015)

Figura 3 – Aurora Boreal visualizada em Fairbanks, Alasca



Fonte: Inaglory (2007)

Figura 4 – Aurora Austral visualizada a partir da estação norte americana Amundsen-Scott

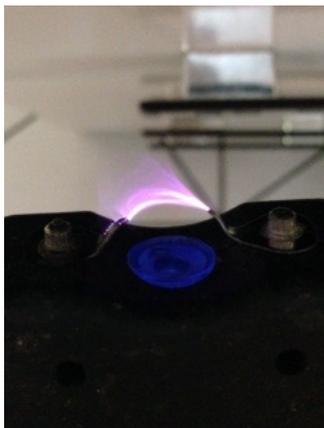


Fonte: Danals (2005)

Em laboratórios, plasmas são produzidos comumente de duas formas, sendo a primeira por meio de descarga elétrica AC ou DC e a segunda através de processos de fotoionização. Nos casos de plasmas gerados por descargas elétricas, um gás é submetido a uma alta diferença de potencial aplicada por meio de dois eletrodos. Esta diferença de potencial gera um campo elétrico apontando na direção do eletrodo de maior potencial para o de menor potencial elétrico. Os elétrons presentes nos átomos que constituem o gás tendem a se mover em sentido contrário ao campo elétrico enquanto as cargas presentes nos núcleos dos átomos tendem a se mover no mesmo sentido do campo elétrico aplicado. Quando o campo é suficientemente intenso a rigidez dielétrica do gás é rompida e pares elétron-íons são formados. Estes pares elétron-íons são então acelerados pelo campo elétrico e neste processo colidem fortemente com partículas neutras formando então novos pares elétron-íons, e assim provocando um processo de ionização em cadeia. Raios em tempestades são exemplos de plasma criados por meio de descargas elétricas. Na figura 5 mostramos um plasma atmosférico gerado por descarga AC de baixa frequência (60Hz),

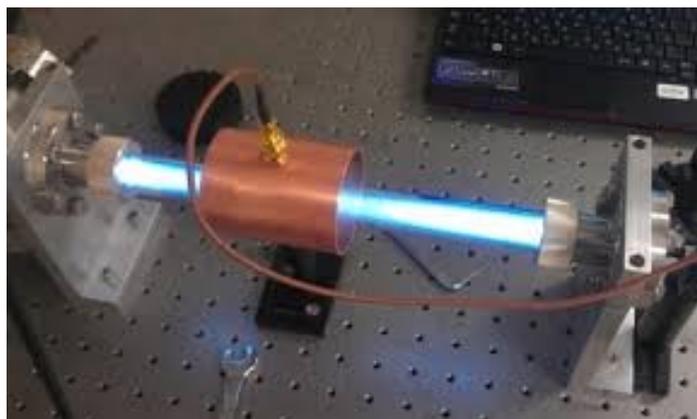
onde uma alta diferença de potencial (cerca de $18000V$) é aplicada a dois eletrodos. Na figura 6 ilustramos um plasma gerado por descarga AC de baixo potencial, mas com frequência em torno de $13,56MHz$, nesse caso o plasma é gerado por meio de uma fonte de Rádio frequência (RF).

Figura 5 – Plasma gerado por descarga elétrica AC



Fonte: Autor

Figura 6 – Plasma gerado por fonte de Rádio Frequência (RF)



Fonte: Ron (2015)

Nos casos de plasmas gerados através de fotoionização, incide-se um feixe de fótons com energia maior ou igual ao potencial de ionização sobre uma determinada porção de matéria (não necessariamente um gás inerte). Quando um átomo da porção de matéria absorve um fóton altamente energético, parte da energia absorvida é utilizada para ionizar o átomo formando assim um par elétron-íon, o restante é convertida pelo par elétron-íon em energia cinética. Novamente, por colisões entre íons, elétrons e átomos neutros, o gás estará em fração de segundos ionizado. A ionosfera terrestre é um exemplo de plasma gerado naturalmente por fotoionização, (BITTENCOURT, 2004).

Seja qual for o plasma, o existente na natureza ou mesmo o reproduzido em laboratório, há pelo menos duas grandezas importantes na descrição destes: a densidade de cargas e a temperatura. Os diferentes tipos de plasmas existentes na natureza ou criados em laboratórios, são descritos em termos destas grandezas. Obter experimentalmente valores razoáveis para elas é, de modo geral, uma tarefa nada trivial, dependendo do ambiente onde o plasma existe ou é criado.

1.2 MEDIDAS DE DENSIDADE E TEMPERATURA DE PLASMAS

As medidas de densidade e temperatura de um plasma são comumente realizadas por meio do uso de um instrumento denominado sonda. Para determinação da temperatura eletrônica utiliza-se a sonda Langmuir, enquanto para determinação da densidade eletrônica utiliza-se o

copo de Faraday, (CANAL, 2009). Seja qual for a sonda a ser utilizada, esta é introduzida diretamente no plasma e os parâmetros do circuito externo de alimentação da sonda são variados. Na obtenção de medidas de densidade eletrônica, varia-se o potencial na sonda e monitora-se a corrente elétrica que passa por ela, trata-se portanto de um método invasivo. O valor da temperatura é então obtido a partir do gráfico $V \times I$. É possível obter o valor da densidade eletrônica utilizando o valor da temperatura obtida a partir do gráfico $V \times I$, (BITTENCOURT, 2004). Embora a implementação experimental deste método seja relativamente simples e de baixo custo, quando comparado com outras técnicas de caracterização de plasmas tais como espectroscopia de emissão, (GRECCO; BOSCO, 2007). A teoria envolvida na análise dos dados é tão complexa quanto essas técnicas além de haver diversas situações em que a sonda Langmuir não pode ser utilizada, como no caso de plasmas gerados no interior da cavidade de lasers gasosos (por exemplo: laser de N_2), pois a região de plasma é inacessível.

Há muitas outras situações onde o uso da sonda Langmuir tornar-se inadequado. Neste contexto, muitos pesquisadores têm se dedicado ao estudo e ao desenvolvimento de novas técnicas e instrumentos capazes de determinar parâmetros de plasma das mais variadas formas, sendo o método de mapeamento por meio da impedância de plasma o que mais se destacou ao longo dos últimos anos.

Na década de 80, Ilić (1981) propôs um método para medir a impedância elétrica de uma classe de reatores de plasma utilizados na fabricação de circuitos integrados. Combinando a técnica de medida da impedância com um modelo de plasma circuito, mostrou como é possível monitorar a densidade e frequência de plasma de forma não invasiva por meio da impedância. Na década de 90, Tsui et al. (1996) propuseram um método para determinar a densidade do plasma e reduzir a largura do período do pulso de um laser a gás, baseando-se no cálculo da impedância do plasma gerado no interior da cavidade do laser. Usando as equações de fluido e as equações de Maxwell, determinaram uma expressão algébrica para impedância do plasma gerado no interior da cavidade e ajustaram a descarga para que ela ocorresse de forma ressonante. Com o casamento de impedância, concluíram que o plasma comportava-se como um circuito L_p e C_p em paralelo, e que a densidade do plasma poderia ser medida a partir dos valores de L_p e C_p . Por outro lado, Brackwell, Walker e Amatucci (2005) mediram a densidade de elétrons de um plasma por meio de uma sonda esférica. A partir da curva de impedância obtida para o sistema plasma-sonda, localizaram transições entre os estados capacitivo e indutivo e determinaram para estes locais da curva a densidade de elétrons e a largura da bainha de plasma. Um grupo de pesquisadores, Motomura et al. (2014), desenvolveu um método não invasivo de monitoramento de impedância de plasma para detecção de anomalias e mapeamento de grandezas, tais como densidade e frequência durante o processo de produção de plasma. Hopkins e King (2014), compararam resultados obtidos por simulações numéricas com medidas experimentais para determinar a habilidade de uma sonda de impedância de plasma (Plasma Impedance Probe - PIP) utilizada para medir densidade e frequência de colisões em plasmas contendo gradiente espacial, bem como variação temporal na densidade de plasma. Verificaram que estes tipo de sonda é

eficiente para medir densidade assim como máximos e mínimos na densidade devido à variação temporal.

Portanto, a busca por modelos capazes de descrever e monitorar plasmas criados em diversos ambientes são atuais e foi neste sentido que realizamos este trabalho.

1.3 TENSOR CONDUTIVIDADE

Enquanto a densidade e temperatura de plasma são importantes para a descrição de um plasma, o tensor condutividade é fundamentalmente importante para a obtenção da resposta dinâmica de um plasma sujeito à alguma excitação eletromagnética. Este tensor é geralmente obtido apenas para algumas configurações simples, como por exemplo, o caso do modelo “field free plasma”. Quando um plasma não uniformemente magnetizado é considerado, a dificuldade na obtenção do tensor condutividade aumenta consideravelmente e na maioria dos casos apenas previsão por simulação computacional é possível, (BRET, 2007).

Há diversas situações experimentais não descritas por não se conhecer o tensor condutividade apropriado, dentre elas, o simples caso onde um plasma é formado por uma descarga elétrica DC unidirecional ou descargas AC de baixas frequências. Neste caso, o plasma conduz uma corrente elétrica líquida, devido ao movimento ordenado das partículas que compõe o plasma, um campo magnético é gerado e deve ser considerado no cálculo do tensor condutividade quando este atinge um certo limiar. Na grande maioria dos casos o campo magnético é não homogêneo, e esta não homogeneidade faz com que a tarefa de obter o tensor condutividade não seja nada trivial.

A determinação do tensor condutividade para um plasma não homogêneo é importante em praticamente todos os ramos da física de plasma e muitos pesquisadores têm se dedicado a obter este tensor para algumas situações de interesse experimental. Recentemente, Goodman e Kazeminezhad (2010) estudaram o tensor condutividade em simulação magnetohidrodinâmica (MHD) para descrever como as ondas de choque MHD podem se formar, propagar e aquecer a fotosfera e cromosfera por compressão e dissipação, ele calcula numericamente o tensor para um meio que inclui a fotosfera e discute um processo de geração de fluxo de energia. Kabanov, Zagar e Mihailovic (2008) descreveram o tensor condutividade elétrica de um meio com duas componentes não homogêneas.

Obter grandezas relacionadas a um plasma é fundamental em todos os ramos da física de plasma, e o método de obtenção a partir do monitoramento de impedância tem despertado um enorme interesse entre os pesquisadores da área, assim sendo, o presente trabalho possui duas vertentes. Na primeira, procuramos determinar expressões em termos de parâmetros experimentalmente mensuráveis para resistência, reatância e impedância de plasma frio sujeito a um campo magnético, e para isto, faremos o uso do teorema de Poynting combinado com teorias de circuitos e eletrodinâmica clássica. Na segunda vertente, propomos um método alternativo

para o cálculo do tensor condutividade de um plasma anisotrópico por meio do uso da notação de Einstein e do símbolo de Levi-Civita.

2 TEOREMA DE POYNTING E DEFINIÇÃO GERAL DE IMPEDÂNCIA

Sabe-se que a corrente elétrica dentro de meio material é dada pela resposta das partículas carregadas deste meio a um campo elétrico a elas aplicado. Essa resposta depende da natureza do meio material. Para boa parte dos materiais isotrópicos sólidos e líquidos, a relação é dada pela lei de Ohm: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, onde sigma representa a resposta do material ao campo elétrico aplicado, e denomina-se *condutividade* elétrica do material, (NUSSENZVEIG, 1997).

Quando consideramos, por exemplo, um elemento de comprimento infinitesimal (dl) de um fio condutor de seção transversal A , sobre o qual circunda uma corrente longitudinal e homogênea \mathbf{J} . Pela lei de Ohm, o campo elétrico também será longitudinal e homogêneo e a queda de potencial entre as duas extremidades do elemento dl será dada por

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E dl, \quad (2.1)$$

onde \mathbf{E} é uniforme e paralelo a dl .

Por outro lado, a corrente que atravessa uma seção transversal A num trecho do fio é

$$I = \int_A \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA = (\sigma E) A, \quad (2.2)$$

onde \mathbf{n} é um vetor normal ao elemento de área dA . Substituindo E , obtido a partir da equação 2.1, na equação acima, obtemos

$$dV = \frac{I}{\sigma A} dl. \quad (2.3)$$

Integrando a equação acima sobre um fio de comprimento total L e seção transversal constante ao longo do fio, temos

$$V = \frac{L}{\sigma A} I, \quad (2.4)$$

e comparando com a definição $V = RI$, teremos:

$$R = \frac{l}{\sigma A} \equiv \frac{\Omega L}{A}. \quad (2.5)$$

R é a resistência elétrica do fio, σ a condutividade e Ω é a resistividade do material.

Para alguns meios materiais, por exemplo o fio condutor considerado acima, os conceitos envolvidos na resposta do meio a campos eletromagnético em termos de parâmetros de um circuito elétrico, tais como resistência, condutividade, resistividade, impedância e etc. são facilmente obtidos a partir da integração dos campos que atuam sobre o meio. Assim, para desenvolvermos o conceito de impedância de plasma, é necessário que o plasma seja tratado como elemento de um circuito elétrico sobre o qual atuam campos eletromagnéticos. Mostraremos que a definição de impedância de plasma é uma consequência do teorema de Poynting e da integração dos campos eletromagnético atuando sobre o plasma, e para tanto, apresentaremos neste capítulo, de acordo com a literatura, os conceitos de resistência, reatância e impedância de um sistema eletromagnético qualquer a partir da aplicação do teorema de Poynting, para que mais a frente (capítulo 4), possamos aplicar estes conceitos a um circuito elétrico no qual o plasma é tratado como elemento pertencente ao circuito.

Dividimos este capítulo da seguinte maneira, na primeira seção, desenvolvemos o teorema de Poynting, na segunda seção, fazemos a mesma coisa, no entanto o teorema de Poynting é desenvolvido para campos complexos e harmonicamente variáveis com o tempo. Na terceira e última seção, definimos os conceitos de resistência, reatância e impedância a partir da combinação de teorias de circuito com eletrodinâmica clássica.

2.1 TEOREMA DE POYNTING

Aplicar o teorema de Poynting é, de modo geral, essencial para conhecer a forma específica dos campos eletromagnéticos dentro de um volume de um determinado meio condutor. Qualquer que seja o plasma, podemos sempre tratá-lo como um meio condutor e portanto aplicar o teorema de Poynting para obtermos os campos elétrico e magnético.

De acordo com Jackson (1975), podemos definir matematicamente a taxa temporal do fluxo de energia associado ao campo eletromagnético por meio do teorema de Poynting. Para isto, consideremos inicialmente uma partícula movendo-se com velocidade \mathbf{V} numa região onde há campo elétrico \mathbf{E} e campo magnético \mathbf{B} , neste caso, o trabalho realizado sobre a partícula pelos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} é $q\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}$. O trabalho associado ao campo magnético é zero pois a força magnética é sempre perpendicular ao deslocamento da partícula. Se ao invés de uma partícula tivermos uma distribuição contínua de cargas em um volume V , a taxa de trabalho realizado sobre o volume V é

$$\int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3x. \quad (2.6)$$

A equação 2.6 representa a conversão de energia eletromagnética em energia mecânica ou térmica. No interior do volume há tanto campo magnético quanto campo elétrico, portanto, o

trabalho realizado sobre o volume V deve reduzir a energia associada aos campos, ou seja, deve haver conservação de energia.

A partir da equação de Ampère – Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.7)$$

podemos obter a densidade de corrente \mathbf{J} , que quando substituída na equação 2.6, resulta:

$$\int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3x = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[c\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] d^3x. \quad (2.8)$$

Se fizermos uso da identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (2.9)$$

e da lei de Faraday na equação 2.8, obtemos:

$$\int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3x = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[-\mathbf{H} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \mathbf{E} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) - c\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right] d^3x. \quad (2.10)$$

A densidade total de energia eletrostática e magnética pode ser definida por:

$$u = \frac{1}{8\pi} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{8\pi} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}, \quad (2.11)$$

e se o meio for linear, isto é, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mu_0 \mathbf{B}$, a taxa de variação da densidade de energia eletromagnética será

$$4\pi \frac{\partial u}{\partial t} = \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Supondo V um volume arbitrário e substituindo a equação 2.12 na 2.10, tem-se o Teorema de Poynting:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.13)$$

onde

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

denomina-se o Vetor de Poynting.

Segundo Nussenzveig (1997), integrando a equação 2.13 sobre um volume V encerrado por uma superfície Σ :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u d^3x = \int_V (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}) d^3x + \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) d^3x \quad (2.14)$$

obtemos o significado físico para $\nabla \cdot \mathbf{S}$, onde, pela conservação da energia e o teorema da divergência, representa o fluxo de energia eletromagnética para fora de V por unidade de volume.

Portanto, a equação 2.13 nos diz que: a taxa de variação da densidade de energia eletromagnética dentro de um volume V é igual ao trabalho realizado pelos campos \mathbf{E} e \mathbf{B} mais a taxa de energia que flui através da superfície Σ .

2.2 TEOREMA DE POYNTING PARA CAMPOS HARMÔNICOS

Para Jackson (1975) é bastante útil ter uma definição geral, com base nos conceitos de campo \mathbf{E} e \mathbf{B} , de parâmetros de circuito tais como resistência e reatância. Mostraremos nesta seção que esta definição é consequência do Teorema de Poynting aplicado a campos variáveis harmonicamente com o tempo. Para isto considera-se que os campos tenham uma dependência temporal do tipo $e^{-i\omega t}$, tal como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}, \quad (2.15)$$

em geral o campo elétrico é representado por uma grandeza complexa, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, mas uma grandeza complexa não é mensurável. Portanto, vamos considerar apenas a componente real, ou seja, a parte mensurável do campo elétrico, e para isto faremos uso da seguinte propriedade dos números complexos: *A componente real de um número complexo é dada pela metade da soma do número com seu próprio conjugado,*

$$a = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad (2.16)$$

onde $z = a + ib$ e $z^* = a - ib$. Com base nesta propriedade, podemos então escrever a componente real $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ como

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}]. \quad (2.17)$$

Efetando o produto escalar em ambos os lados da equação 2.17 pela componente real da densidade de corrente, $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$, obtemos a componente real do produto $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$, que é metade da parte real do produto de uma grandeza complexa pelo complexo conjugado da outra grandeza complexa:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4}[\mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}] \cdot [\mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t} + \mathbf{J}^*(\mathbf{x})e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{Re}[\mathbf{J}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-2i\omega t}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por outro lado, as equações de Maxwell para campos variáveis harmonicamente com o tempo têm a seguinte forma

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_q \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{B} = 0 \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + \frac{i\omega}{c}\mathbf{D} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}, \quad (2.22)$$

onde todas as grandezas são funções complexas de \mathbf{x} . Pode-se então calcular a taxa temporal do trabalho realizado pelos campos integrando a equação 2.18:

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) d^3x &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{Re}[\mathbf{J}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{x})e^{-2i\omega t}] d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int_V \mathbf{Re}[\mathbf{J}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})] d^3x \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_V \mathbf{Re}[\mathbf{J}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})e^{-2i\omega t}] d^3x. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Como estamos considerando campos variáveis no tempo, é interessante tomarmos a média temporal da equação acima, pois o termo do lado esquerdo representa a potência dissipada pelo volume V . Esta potência também varia no tempo e portanto é suficiente considerarmos o valor médio. A parte real do termo $e^{-2i\omega t}$ é $\cos(2\omega t)$, então tomando a média temporal da equação 2.23 o segundo termo do lado direito será nulo. O primeiro termo assim como a equação 2.6, representa a taxa média do trabalho realizado pelos campos elétrico e magnético no volume V , (FARIAS, 2006). Substituindo $\mathbf{J}^*(\mathbf{x})$, que pode ser obtida a partir da equação de Ampère-Maxwell, 2.22, aplicando a identidade vetorial 2.9 e a lei de Faraday dada pela equação 2.21 no primeiro termo do lado direito da equação 2.23, obtemos

$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}^*(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x = \frac{c}{8\pi} \int_V \left\{ \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot [\nabla \times \mathbf{H}^*(\mathbf{x})] - \frac{i\omega}{c} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{D}^*(\mathbf{x}) \right\} d^3x \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) d^3x - \frac{i\omega}{8\pi} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* - \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*) d^3x. \quad (2.25)$$

Definindo, respectivamente, o vetor de Poynting, as densidades de energias eletrostática e magnética como

$$\mathbf{S} \equiv \frac{c}{8\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*), \quad (2.26)$$

$$u_{el} = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*), \quad (2.27)$$

e

$$u_{mg} = \frac{1}{16\pi} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}^*). \quad (2.28)$$

A equação 2.25 pode ser reescrita como sendo:

$$\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x + 2i\omega \int_V (u_{el} - u_{mg}) d^3x + \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) d^3x = 0 \quad (2.29)$$

ou, pelo teorema da divergência

$$\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x + 2i\omega \int_V (u_{el} - u_{mg}) d^3x + \oint_{\Sigma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) d^2x = 0, \quad (2.30)$$

onde \mathbf{n} é normal a superfície Σ .

As equações 2.29 e 2.30 são análogas à equação 2.14, no entanto tratam de equações para campos variáveis harmonicamente com o tempo. A equação 2.30 é complexa e segundo Jackson (1975), a parte real representa a energia dissipada e a parte imaginária está relacionada a energia armazenada e seus fluxos alternantes. Quando a integral de volume que envolve as densidades de energia eletrostática e magnética é real, como é o caso dos dielétrico sem perdas (isolantes onde $\sigma \rightarrow 0$) e condutores perfeitos (bons condutores onde $\sigma \rightarrow \infty$), a parte real do segundo termo da equação 2.30 é zero, e então

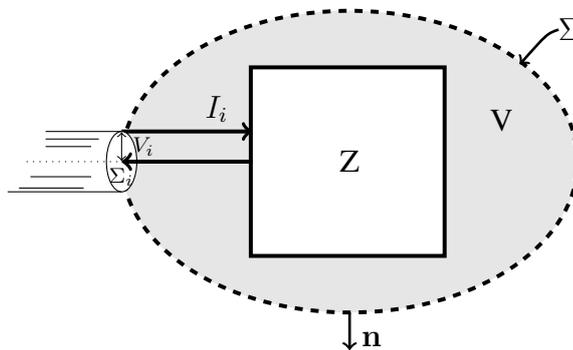
$$\frac{1}{2} \int_V \mathbf{Re}(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x = - \oint_{\Sigma} \mathbf{Re}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) d^2x. \quad (2.31)$$

O taxa temporal do trabalho realizado pelos campos elétrico e magnético sobre o volume V é igual ao fluxo negativo destes através da superfície Σ .

2.3 DEFINIÇÃO DE RESISTÊNCIA, REATÂNCIA E IMPEDÂNCIA

Ainda de acordo com Jackson (1975), pode-se usar o teorema complexo de Poynting para definir a impedância de entrada de um sistema eletromagnético real, bipolar, linear e passivo. Imaginemos que o sistema esteja dentro de um volume V , limitado por uma superfície Σ e alimentado por uma fonte externa que forneça uma diferença de potencial V_i e corrente I_i , ambas harmônicas, como mostra a figura 7.

Figura 7 – Ilustração de um sistema passivo dentro de um volume V envolto por uma superfície Σ .



Fonte: adaptada do livro do Jackson (1975)

A potência média fornecida pela tensão V_i e a corrente I_i é

$$P = \frac{1}{2} I_i^* V_i. \quad (2.32)$$

Supondo que toda potência de entrada seja fornecida ao sistema através da superfície Σ_i , então

$$\frac{1}{2} I_i^* V_i = - \oint_{\Sigma_i} \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_i d^2x \quad (2.33)$$

onde \mathbf{n}_i é um vetor normal a superfície Σ_i . Segundo Fano, Chu e Adler (1963), o termo do lado esquerdo da equação 2.33 representa a potência média fornecida pela fonte externa. Esta potência é uma grandeza complexa, onde a parte real representa a potência média ativa e a parte imaginária a potência média reativa fornecida pela fonte externa ao sistema. Frequentemente, em teoria de circuito, a potência média é definida como sendo $\frac{1}{2} V I^*$ ao invés de $\frac{1}{2} I^* V$, no entanto, deve ser notado que não há diferença alguma nas duas definições com relação a parte real, nos dois casos são iguais! Com relação a parte imaginária, a parte reativa difere-se apenas de um sinal negativo ou positivo dependendo da definição considerada.

Pela conservação da energia, toda potência irradiada para dentro do volume V deve ser consumida pelo sistema, portanto pela equação 2.30,

$$\frac{1}{2}I_i^*V_i = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E})d^3x + 2i\omega \int_V (u_{\text{el}} - u_{\text{mg}})d^3x + \oint_{\Sigma-\Sigma_i} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})d^2x. \quad (2.34)$$

O termo do lado direito representa a potência consumida pelo sistema, onde a parte real está relacionada à energia mecânica e térmica e a parte imaginária à energia armazenada e irradiada para fora da superfície $\Sigma - \Sigma_i$, onde supomos $\Sigma_i \ll \Sigma$ de modo que a potência irradiada para fora de V através da superfície Σ_i possa ser desprezível.

Segundo Fano, Chu e Adler (1963), o termo do lado esquerdo da equação 2.34 pode ser escrito em termos da impedância de entrada do sistema, pois

$$Z = \frac{V_i}{I_i}, \quad (2.35)$$

quando multiplicada em ambos os lados por $I_i^*/2$ resulta,

$$\frac{I_i^*V_i}{2} = \frac{Z|I_i|^2}{2}. \quad (2.36)$$

Substituindo a equação 2.36 na equação 2.34 e comparando com a definição de impedância $Z = R - i\chi$, obtemos

$$R|I_i|^2 = \mathbf{Re} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E})d^3x + 4\omega \mathbf{Im} \int_V (u_{\text{mg}} - u_{\text{el}})d^3x + 2\mathbf{Re} \oint_{\Sigma-\Sigma_i} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})d^2x \quad (2.37)$$

$$\chi|I_i|^2 = 4\omega \mathbf{Re} \int_V (u_{\text{mg}} - u_{\text{el}})d^3x - \mathbf{Im} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E})d^3x - 2\mathbf{Im} \oint_{\Sigma-\Sigma_i} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n})d^2x \quad (2.38)$$

A equação 2.37 nos fornece toda a potência média dissipada no volume V , enquanto a equação 2.38 dá a potência média reativa no volume V . O termo R corresponde à resistência do sistema, e χ à reatância.

Segundo Jackson (1975), a integral que dá o fluxo do vetor de Poynting através da superfície $\Sigma - \Sigma_i$ é considerável apenas quando os campos possuem altas frequência. Portanto, podemos negligenciar o terceiro termo do lado direito nas duas equação acima, pois estamos considerando campos em baixas frequências. Uma outra observação deve ser feita no segundo termo do lado direito da expressão 2.37, pois supomos anteriormente que o meio considerado é linear, e neste caso, as densidade de energia elétrica e magnética são reais, isto é, a parte imaginária da integral que envolve as densidades de energia é nula. Assim, podemos escrever a resistência e reatância do sistema como sendo,

$$R = \frac{1}{|I_i|^2} \mathbf{Re} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x \quad (2.39)$$

$$\chi = \frac{1}{|I_i|^2} \left[4\omega \mathbf{Re} \int_V (u_{\text{mg}} - u_{\text{el}}) d^3x - \mathbf{Im} \int_V (\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}) d^3x \right]. \quad (2.40)$$

Note que a corrente representa apenas uma fator de escala nas expressões de resistência e reatância. Usando a lei de Ohm generalizada, pode-se explicitar a condutividade do sistema pois $\mathbf{J}^* = (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E})^*$, onde $\overleftrightarrow{\sigma}$ é denominado tensor condutividade. Para sistemas onde a condutividade é puramente real, o segundo termo da expressão de reatância será nulo e assim as equações 2.39 e 2.40 podem ser aproximadas:

$$R \simeq \frac{1}{|I_i|^2} \int_V \sigma |\mathbf{E}|^2 d^3x \quad (2.41)$$

$$\chi \simeq \frac{1}{|I_i|^2} \int_V (u_{\text{mg}} - u_{\text{el}}) d^3x. \quad (2.42)$$

Onde R representa as perdas térmicas do sistema e χ a energia armazenada na forma de campos. Se u_{mg} é maior que u_{el} , conforme num indutor, a reatância é positiva e neste caso temos um sistema reativo indutivo. Quando u_{el} é maior que u_{mg} , conforme um capacitor, a reatância é negativa e o sistema é dito reativo capacitivo, (JACKSON, 1975). Convém aqui fazermos uma observação interessante, note que mesmo a condutividade sendo puramente real, o termo reativo, equação 2.42, é diferente de zero se a energias armazenadas forem diferentes. Então, se a condutividade for puramente real ou puramente imaginária não podemos afirmar que haverá ou não reatância nula. Da teoria de circuitos, sabe-se que se reatância não é nula, o sistema no qual está sendo submetido a diferença de potencial V_i e corrente I_i provocará uma diferença de fase entre a corrente e o potencial aplicado. Por outro lado, se a reatância é nula, não haverá diferença de fase e o sistema é dito puramente resistivo. Portanto, o que dirá se a reatância é nula ou não, será a geometria do sistema e não o fato de a condutividade ser real ou imaginária.

Sabe-se que todo plasma é condutor elétrico e por isso podemos, por meio de algumas aproximações, tratá-lo como sendo o sistema de impedância Z representado na figura 7 cuja resistência e reatância são dadas pelas equações 2.39 e 2.40. Note que tanto a equação 2.39 quanto a 2.40 possuem o termo $(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E})$ que, segundo a lei de Ohm pode ser escrito em termos do tensor condutividade, pois $\mathbf{J}^* = \overleftrightarrow{\sigma}^* \cdot \mathbf{E}^*$. Sendo assim, torna-se extremamente importante o conhecimento prévio do tensor condutividade do plasma.

No capítulo a seguir propomos uma breve discussão acerca da condutividade de plasmas e propomos um método para obtenção do tensor condutividade para plasmas anisotrópicos, ou mais especificamente, plasmas magnetizados ¹.

¹ Plasmas magnetizados são plasmas anisotrópicos, indicando que as propriedades do plasma na direção do campo magnético são diferentes da direção perpendicular a ele

3 CONDUTIVIDADE DE PLASMAS

Como visto no capítulo anterior, para determinarmos as expressões para resistência e reatância de plasma e conseqüentemente a impedância, torna-se essencial conhecermos seu tensor condutividade, pois tanto a resistência quanto reatância dependem desse tensor. Neste capítulo, nos dedicaremos exclusivamente a esta tarefa. Na primeira seção, apresentaremos de acordo com a literatura, uma breve discussão sobre o tensor condutividade de plasmas isotrópicos e anisotrópicos quando estes são submetidos a um campo elétrico constante. Na segunda seção, trataremos de discutir o caso de plasmas anisotrópicos sujeitos a campos elétricos harmonicamente variáveis com o tempo e por fim, na terceira seção, apresentamos um método adicional e bastante geral para determinação do tensor condutividade de plasma anisotrópicos utilizando a notação de Einstein e o símbolo de Levi-Civita.

De acordo com a literatura, plasmas são descritos comumente pelo modelo “dois fluidos”, isto é o plasma é tratado como sendo constituído de dois fluidos magnetohidrodinâmico, um associado aos elétrons e outro aos íons. Estes fluidos respondem fortemente a campos elétricos e magnéticos e a resposta macroscópica do plasma aos campos elétrico e magnético aplicados é determinada basicamente por meio da sua condutividade, que pode ser obtida a partir da equação de movimento das partículas, dada pela equação de Lorentz, pois esta relaciona os campos à dinâmica da partículas que constituem o plasma. De modo geral, a equação do movimento com o termo de Lorentz é

$$\eta_{\alpha} m_{\alpha} \frac{d}{dt} \mathbf{V}_{\alpha} = q_{\alpha} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{\alpha} \times \mathbf{B} \right), \quad (3.1)$$

nesta equação η é a densidade de partículas por unidade de volume, m é a massa e \mathbf{V} representa a velocidade. O subscrito α representa o tipo de partícula considerada na equação, que pode ser elétrons ou íons. Para o caso dos elétrons,

$$\eta_e m_e \frac{d}{dt} \mathbf{V}_e = q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \right). \quad (3.2)$$

Se considerarmos o efeito da força de atrito (\mathbf{F}_{col}) devido às colisões entre os elétrons e as partículas neutras presentes no plasma, a nova força resultante pode ser reescrita como

$$\eta_e m_e \frac{d}{dt} \mathbf{V}_e = q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \right) - m_e \nu_c (\mathbf{V}_e - \mathbf{V}_{\text{alvo}}). \quad (3.3)$$

onde ν_c é a frequência efetiva de colisão dos elétrons e \mathbf{V}_{alvo} a velocidade dos alvos (partículas neutras). Segundo Bittencourt (2004) o termo \mathbf{F}_{col} pode ser representado fenomenologicamente

pelo produto da frequência efetiva de colisão dos elétrons pelo valor médio da velocidade relativa entre elétrons e as partículas neutras. Uma equação análoga à equação 3.3 pode ser obtida para os íons.

Sabe-se que a massa dos elétrons é muito menor que a massa das partículas neutras, portanto podemos negligenciar a velocidade das partículas neutras ¹. Reescrevendo a equação 3.3, temos

$$\eta_e m_e \frac{d}{dt} \mathbf{V}_e = q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B} \right) - m_e \nu_c \mathbf{V}_e. \quad (3.4)$$

Segundo Bittencourt (2004) o significado físico do termo \mathbf{F}_{col} pode ser visto da seguinte maneira: Na ausência de campo elétrico e magnético, temos

$$\eta_e m_e \frac{d}{dt} \mathbf{V}_e = -m_e \nu_c \mathbf{V}_e \quad (3.5)$$

cujas solução geral é

$$\mathbf{V}_e(t) = \mathbf{V}_{0e} e^{-\nu_c t}, \quad (3.6)$$

isto é, as colisões entre os elétrons e as partículas neutras faz com que a velocidade dos elétrons decaia exponencialmente a uma taxa definida pela frequência de colisão.

3.1 CONDUTIVIDADE DC

De acordo com Bittencourt (2004), vamos agora a partir da equação de movimento (3.4) determinar uma expressão para condutividade DC (corrente contínua) de uma plasma, para tanto, consideraremos o campos elétrico aplicado como sendo constante e uniforme.

3.1.1 Plasma isotrópico

Na ausência de um campo magnético, a equação do movimento tem a seguinte forma,

$$\eta_e m_e \frac{d}{dt} \mathbf{V}_e = q_e \mathbf{E} - m_e \nu_c \mathbf{V}_e. \quad (3.7)$$

Se consideramos o estado estacionário do plasma ($\mathbf{V}_e = \text{constante}$), no qual a força devido ao campo elétrico aplicado é balanceada pela força devido às colisões entre elétrons e partículas neutras, teremos

¹ Negligenciar a velocidade das partículas neutras não significa que as partículas neutras não se movem no plasma, mas que a velocidade das partículas individualmente é completamente aleatória de modo que o valor médio da velocidade é nulo

$$q_e \mathbf{E} - m_e \nu_c \mathbf{V}_e = 0. \quad (3.8)$$

Sabe-se que o movimento dos elétrons gera uma densidade de corrente dada por

$$\mathbf{J} = q_e \eta_e \mathbf{V}_e, \quad (3.9)$$

que quando combinada com a equação 3.8 e comparada com a lei de Ohm, resulta

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \mathbf{E}, \quad (3.10)$$

onde σ_0 é dado por

$$\sigma_0 = \frac{q_e^2 \eta_e}{m_e \nu_c}. \quad (3.11)$$

σ_0 é a condutividade DC e dá a resposta do plasma ao campo elétrico constante e uniforme. Note que ela é puramente real e isotrópica, mas não significa *a priori*, que há diferença de fase entre a densidade de corrente e campo elétrico aplicado.

3.1.2 Plasma anisotrópico

Sabe-se que na presença de um campo magnético o plasma torna-se espacialmente anisotrópico, assim a equação 3.4 no estado estacionário é dada por

$$q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0 \right) - m_e \nu_c \mathbf{V}_e = 0, \quad (3.12)$$

onde \mathbf{B}_0 é um campo magnético constante e uniforme. Combinando a equação 3.9 com 3.12, obtemos

$$\mathbf{J} = \sigma_0 \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0 \right), \quad (3.13)$$

onde σ_0 é dada pela equação 3.11. Um resultado importante pode ser obtido quando negligenciamos a frequência de colisões entre as partículas. Note que se $\nu_c \rightarrow 0$ (modelo MHD ideal) temos que $\sigma_0 \rightarrow \infty$ e pela equação 3.13 devemos ter

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0 = 0. \quad (3.14)$$

Tomando o produto vetorial com \mathbf{B}_0 pela direita em ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B}_0 &= -\frac{1}{c} (\mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0) \times \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{E} \times \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{c} \mathbf{V}_{e\perp} |\mathbf{B}_0|^2 \\ \mathbf{V}_{e\perp} &= \frac{c}{|\mathbf{B}_0|^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

A equação acima, segundo Bittencourt (2004) nos diz que quando a frequência de colisão dos elétrons é negligenciável, os elétrons possuem um “velocidade de deriva” perpendicular tanto ao campo elétrico quanto ao campo magnético. Deve-se notar que este resultado é independente da massa e carga das partículas, e o mesmo resultado pode ser obtido para o movimento dos íons, bastando para isso considerar a equação de movimento aplicada aos íons. Portanto, quando desprezamos as colisões, tanto os elétrons quanto os íons se movem juntos a uma velocidade de deriva dada pela equação 3.15, e neste caso não há densidade de corrente ($\mathbf{J} = 0$). Quando a frequência de colisão não é desprezível, temos uma densidade de corrente denominada “Hall current” dada por

$$\mathbf{J} = q_e n_e (\mathbf{V}_{e\perp} - \mathbf{V}_{íon\perp}), \quad (3.16)$$

pois sabe-se que os íons possuem massa muito maior que os elétrons, assim nas colisões os íons têm seus movimentos retardados em relação ao movimento dos elétrons, que possuem maior mobilidade. Como $q_e = -e$, onde e é a carga elementar dos elétrons, e $\mathbf{V}_{e\perp} > \mathbf{V}_{íon\perp}$, a densidade de corrente dada pela equação 3.16 será negativa, e conseqüentemente apontará no sentido oposto de $(\mathbf{E} \times \mathbf{B}_0)$.

Segundo a lei de Ohm generalizada, a densidade de corrente é

$$\mathbf{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.17)$$

onde σ é denominado tensor condutividade e é representado por uma matriz 3×3 . Para uma breve análise acerca da expressão 3.13, consideremos o campo magnético diferente de zero apenas na direção do eixo z , isto é, $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{k}$. Da equação 3.13, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \sigma_0 \mathbf{E} + \frac{1}{c} \sigma_0 B_0 (\mathbf{V}_e \times \hat{k}) \\
\mathbf{J} &= \sigma_0 \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\sigma_0 B_0 q_e \eta_e}{q_e \eta_e} (\mathbf{V}_e \times \hat{k}) \\
\mathbf{J} &= \sigma_0 \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\sigma_0 B_0}{q_e \eta_e} (\mathbf{J} \times \hat{k})
\end{aligned} \tag{3.18}$$

que na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \sigma_0 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} + \frac{1}{c} \frac{\sigma_0 B_0}{q_e \eta_e} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ J_x & J_y & J_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{3.19}$$

e de onde obtemos

$$J_x = \sigma_0 E_x + \frac{\omega_{ce}}{\nu_c} J_y, \tag{3.20}$$

$$J_y = \sigma_0 E_y - \frac{\omega_{ce}}{\nu_c} J_x, \tag{3.21}$$

$$J_z = \sigma_0 E_z, \tag{3.22}$$

onde

$$\omega_{ce} = \frac{q_e B_0}{cm_e} \tag{3.23}$$

A equação 3.23 é denominada “frequência ciclotrônica” associada ao movimento dos elétrons em torno das linhas de campo magnético. Combinando as equações 3.20 e 3.21 para eliminarmos J_y na primeira e J_x na segunda, obtemos

$$J_x = \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_x + \frac{\nu_c \omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_y, \tag{3.24}$$

$$J_y = \frac{-\nu_c \omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_x + \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \omega_{ce}^2)} \sigma_0 E_y, \tag{3.25}$$

$$J_z = \sigma_0 E_z, \tag{3.26}$$

que quando escritas na forma de produto matricial, resulta

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & \sigma_H & 0 \\ -\sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

com

$$\sigma_{\perp} = \frac{\nu_c^2}{(\nu_c^2 + \omega_{ce}^2)} \sigma_0 \quad (3.28)$$

$$\sigma_H = \frac{\nu_c \omega_{ce}}{(\nu_c^2 + \omega_{ce}^2)} \sigma_0 \quad (3.29)$$

$$\sigma_{\parallel} \equiv \sigma_0 = \frac{q_e^2 \eta_e}{m_e \nu_c}. \quad (3.30)$$

Comparando a expressão acima com a lei de Ohm generalizada, dada pela equação 3.17, obtemos o tensor condutividade DC para plasma anisotrópico:

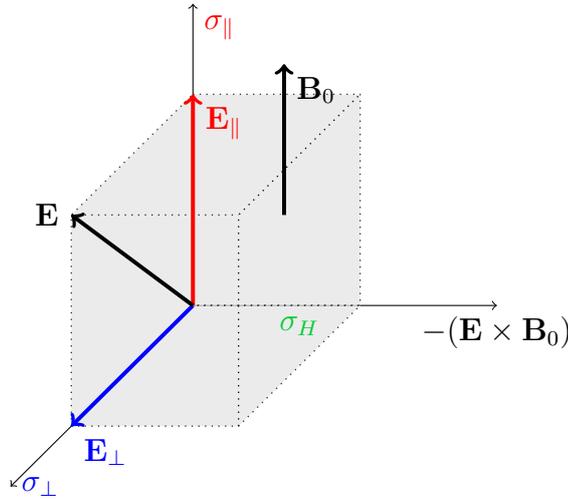
$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & \sigma_H & 0 \\ -\sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Para Bittencourt (2004), σ_{\perp} dá a condutividade elétrica DC do plasma na direção da componente normal do campo elétrico ao campo magnético, enquanto σ_H dá a condutividade do plasma na direção simultaneamente normal aos campos elétrico e magnético, e σ_{\parallel} representa a condutividade na direção simultaneamente paralela aos campos elétrico e magnético, ver figura 8. Note que a condutividade ao longo da direção do campo magnético é a mesma que a do plasma isotrópico.

A dependência de σ_H e σ_{\perp} em função da razão ω_{ce}/ν_c nos diz que se ela aumenta, σ_H e σ_{\perp} decaem rapidamente, sendo que o decaimento de σ_{\perp} mostra-se mais acentuado que o de σ_H . Para valores grandes desta razão as condutividades nas direções perpendiculares aos campos elétrico e magnético tornam-se relativamente pequenas em comparação com a condutividade na direção simultaneamente paralela aos campos, isto é, para ω_{ce}/ν_c muito grande, temos σ_{\parallel} e σ_{\perp} aproximadamente nulas e portanto, a componente σ_{\parallel} é predominante, como mostra a figura 9². Note que na ausência de campo magnético, o tensor condutividade dado pela matriz 3.31 se reduz a uma matriz diagonal cujo elementos são σ_0 , como esperado.

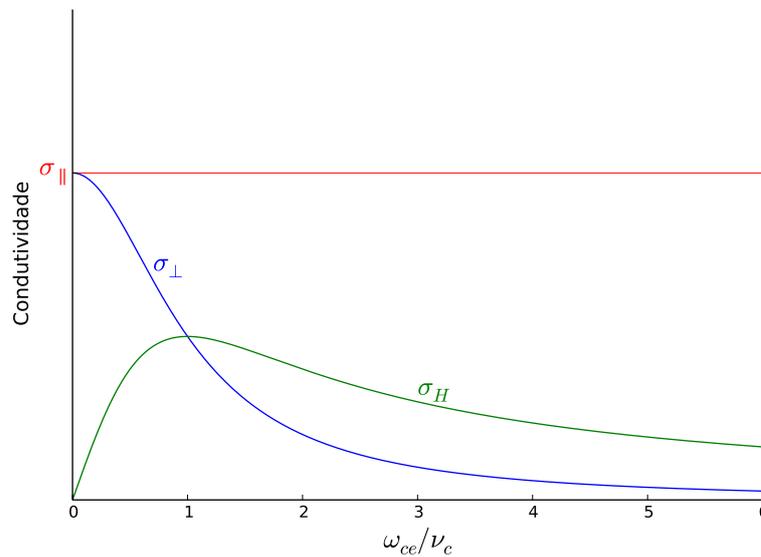
² Todos os gráficos apresentados neste trabalho foram obtidos a partir de scripts escritos (anexo A) e interpretados em Python 2.7

Figura 8 – Ilustração das componentes paralela e normal (\mathbf{E}_{\parallel} e \mathbf{E}_{\perp}) do campo elétrico em relação ao campo magnético \mathbf{B}_0 , e as respectivas componentes do tensor condutividade



Fonte: Autor

Figura 9 – Gráficos mostrando a dependência de σ_{\perp} e σ_H em função da razão ω_{ce}/ν_c



Fonte: Autor

3.2 CONDUTIVIDADE AC

Se agora considerarmos o campo elétrico aplicado ao plasma variando harmonicamente com o tempo, $\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, espera-se que a velocidade dos elétrons seja do tipo $\mathbf{V}_e(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, e neste caso a equação de movimento será dada por

$$-i\omega m_e \mathbf{V}_e = q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0 \right) - m_e \nu_c \mathbf{V}_e, \quad (3.32)$$

nesta equação omitimos a dependência espacial (\mathbf{r}) e supomos que velocidade dos alvos (partículas neutras com quem os elétrons colidem) sejam nulas. Podemos reescrever equação 3.32 da seguinte maneira

$$m_e(\nu_c - i\omega) \mathbf{V}_e = q_e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_e \times \mathbf{B}_0 \right). \quad (3.33)$$

esta equação é perfeitamente análoga à equação 3.12, cuja única diferença está no termo $-i\omega$. Se considerarmos o campo magnético como sendo $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{k}$, obtemos a solução para 3.33 de forma semelhante à obtida para 3.12. Portanto, o tensor condutividade AC do plasma será

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\perp} & \sigma_H & 0 \\ -\sigma_H & \sigma_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\parallel} \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde

$$\sigma_{\perp} = \frac{(\nu_c - i\omega)^2}{(\nu_c - i\omega)^2 + \omega_{ce}^2} \sigma_0, \quad (3.35)$$

$$\sigma_H = \frac{(\nu_c - i\omega)\omega_{ce}}{(\nu_c - i\omega)^2 + \omega_{ce}^2} \sigma_0, \quad (3.36)$$

$$\sigma_{\parallel} \equiv \sigma_0 = \frac{\eta_e q_e^2 (\nu_c + i\omega)}{m_e (\nu_c^2 + \omega^2)}. \quad (3.37)$$

observe que se considerarmos $\omega = 0$ nas equações acima, recaímos sobre o caso de condutividade DC. Por outro lado, se fizermos $\nu_c = 0$, a condutividade do plasma não é infinita como no caso DC, e os elementos do tensor condutividade AC do plasma se reduzem a

$$\sigma_{\perp} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \sigma_0, \quad (3.38)$$

$$\sigma_H = \frac{i\omega\omega_{ce}}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} \sigma_0, \quad (3.39)$$

$$\sigma_{\parallel} \equiv \sigma_0 = i \frac{\eta_e q_e^2}{m_e \omega}. \quad (3.40)$$

Por estas expressões é fácil ver que se $\omega_{ce} = 0$, isto é, na ausência de campo magnético, a condutividade AC do plasma torna-se isotrópica, como esperado. Deve-se notar que no caso de um campo elétrico contínuo, obtivemos uma condutividade puramente real, e no caso de campo elétrico alternado obtivemos um tensor condutividade com elemento imaginários.

Até aqui, apresentamos algumas discussões gerais acerca da condutividade DC e AC de plasmas encontradas na literatura. Na seção a seguir, propomos um cálculo ainda mais geral do tensor condutividade AC de plasmas anisotrópicos. Diferente do que fizemos até aqui, o campo magnético \mathbf{B}_0 será tratado de maneira mais geral, não restringiremos sua direção e levaremos em conta a contribuição gerada pelo campo magnético oriundo do campo elétrico aplicado, que segundo a lei de Faraday, é dada pelo rotacional do campo elétrico. A contribuição iônica também será explicitada no tensor.

3.3 CÁLCULO DO TENSOR CONDUTIVIDADE DE PLASMAS ANISOTRÓPICOS POR MEIO DA NOTAÇÃO DE EINSTEIN E DO SÍMBOLO DE LEVI-CIVITA

Como dito anteriormente, estamos interessados na determinação da resistência e reatância de plasma através da aplicação do teorema de Poynting combinado com a teoria de circuitos e eletrodinâmica clássica. Nesta seção nos dedicaremos exclusivamente ao cálculo do tensor condutividade, e para tanto nos restringiremos ao caso de um plasma uniformemente magnetizado que, após o equilíbrio é perturbado por meio de um campo elétrico variável harmonicamente com o tempo. Consideraremos o modelo “dois fluidos” para descrever o plasma, isto é, consideraremos o plasma sendo composto de dois fluidos, um associado aos íons e outro aos elétrons. Em nosso tratamento o movimento dos íons será importante apenas nas equações perturbadas, as frequências de colisões associadas aos movimentos dos íons e elétrons serão, a princípio, negligenciadas nas equações de movimento. As grandezas denotadas com acento til representarão grandezas perturbadas, grandezas com 0 subscrito representarão grandezas associadas a condição de equilíbrio.

A fim de obtermos o tensor condutividade para o plasma magnetizado sujeitos às restrições descritas no parágrafo anterior, faz-se necessário obtermos inicialmente o tensor dielétrico do plasma, em seguida, usando as equações de Maxwell, determinaremos a expressão para o tensor condutividade.

Se após o equilíbrio o plasma é perturbado por um campo elétrico do tipo $\mathbf{E} = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Então, é natural que as demais grandezas sofram perturbações e assim, as expressões para velocidade, densidade e campo magnético serão dadas por:

$$\eta = \eta_0 + \tilde{\eta}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad (3.43)$$

onde η_0 , \mathbf{V}_0 e \mathbf{B}_0 representam respectivamente a densidade de cargas, velocidade das partículas e campo magnético na condição de equilíbrio. Lembrando que \mathbf{B}_0 pode ser tratado como sendo o campo magnético gerado pelo próprio plasma no caso de este está conduzindo uma corrente líquida, como no caso de plasma gerado por descarga DC, bem como um campo magnético gerado externamente e aplicado ao plasma. Por questões de simplicidade, a partir daqui, omitiremos o termo que indica a dependência espacial e temporal, (\mathbf{r}, t) , nas expressões em que há variáveis perturbadas de primeira ordem. Por exemplo, onde lê-se $\tilde{\mathbf{V}}$, entende-se por $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$. Esta notação estende-se às demais grandezas perturbadas.

Substituindo η e \mathbf{V} na equação de movimento, negligenciando os termos de ordem zero e perturbados de segunda ordem. A equação de movimento das partículas devido à força de Lorentz aplicada a elétrons e íons será dada respectivamente por:

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{elétrica}} + \mathbf{F}_{\text{magnética}} = q \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right), \quad (3.44)$$

obtemos,

$$-i\omega\eta_{0e}\tilde{\mathbf{V}}_e = \frac{\eta_{0e}q_e}{m_e} \left(\tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e} \times \tilde{\mathbf{B}} + \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{V}}_e \times \mathbf{B}_0 \right) \quad (3.45)$$

para os elétrons e,

$$-i\omega\eta_{0\text{ion}}\tilde{\mathbf{V}}_{\text{ion}} = \frac{\eta_{0\text{ion}}q_{\text{ion}}}{m_{\text{ion}}} \left(\tilde{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{V}}_{\text{ion}} \times \mathbf{B}_0 \right) \quad (3.46)$$

para os íons. O termo $\mathbf{V}_{0\text{ion}} \times \tilde{\mathbf{B}}$ foi tomado como sendo igual a zero, pois supomos que no equilíbrio o movimento é exclusivamente dos elétrons, ou seja, $(\mathbf{V}_{0\text{ion}} = 0)$.

Introduzindo o símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} , onde

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ se } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ ou } (2, 3, 1) \\ -1 \text{ se } (3, 2, 1), (2, 1, 3) \text{ ou } (1, 3, 2) \\ 0 \text{ se } i = j, j = k \text{ ou } k = i \end{array} \right\}, \quad (3.47)$$

e a notação de Einstein. A i -ésima componente de um produto vetorial pode ser expressa como $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \epsilon_{ijk} A^j B^k$. Assim, a i -ésima componente dos vetores $\tilde{\mathbf{V}}_e$ e $\tilde{\mathbf{V}}_{\text{ion}}$ nas equações 3.45 e 3.46 podem ser escrita como:

$$-\frac{i\omega m_e}{q_e} \tilde{\mathbf{V}}_e)_i = \tilde{\mathbf{E}})_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} V_{0e}^j \tilde{B}^k + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \tilde{V}_e^j B_0^k \quad (3.48)$$

$$-\frac{i\omega m_{\text{ion}}}{q_{\text{ion}}} \tilde{\mathbf{V}}_{\text{ion}})_i = \tilde{\mathbf{E}})_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \tilde{V}_{\text{ion}}^j B_0^k. \quad (3.49)$$

De acordo com a lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = \frac{4\pi}{c} \tilde{\mathbf{J}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{E}} \quad (3.50)$$

onde \mathbf{J} é a densidade total de corrente. Podemos representar a densidade total de corrente \mathbf{J} como sendo a soma das densidades de corrente eletrônica e iônica, onde a densidade de corrente eletrônica é dada pela densidade de corrente de equilíbrio mais o termo perturbado, e a densidade de corrente iônica corresponde apenas ao termo perturbado pois $\mathbf{V}_{0\text{ion}} = 0$. Assim a i -ésima componente da equação 3.50 será dada por:

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_i = \frac{4\pi}{c} \left[\eta_{0e} q_e \tilde{\mathbf{V}}_e)_i + \eta_{0\text{ion}} q_{\text{ion}} \tilde{\mathbf{V}}_{\text{ion}})_i \right] + \frac{4\pi}{c} \tilde{\eta}_e q_e \mathbf{V}_{0e})_i - \frac{i\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}})_i. \quad (3.51)$$

Substituindo as equações 3.48 e 3.49 na equação 3.51, a i -ésima componente da equação de Ampère-Maxwell pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_i &= \frac{4\pi i \eta_{0e} q_e^2}{\omega c m_e} \left[\tilde{\mathbf{E}})_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} V_{0e}^j \tilde{B}^k + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \tilde{V}_e^j B_0^k \right] \\ &+ \frac{4\pi i \eta_{0\text{ion}} q_{\text{ion}}^2}{\omega c m_{\text{ion}}} \left[\tilde{\mathbf{E}})_i + \frac{1}{c} \epsilon_{ijk} \tilde{V}_{\text{ion}}^j B_0^k \right] \\ &+ \frac{4\pi}{c} \tilde{\eta}_e q_e \mathbf{V}_{0e})_i - \frac{i\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}})_i. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A partir da lei da indução de Faraday, obtemos $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = \frac{i\omega}{c} \tilde{\mathbf{B}}$. $\therefore \tilde{\mathbf{B}} = \frac{c}{i\omega} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}}$. Usando o símbolo de Levi-Civita a k -ésima componente do rotacional correspondente ao campo magnético perturbado pode ser expressa por:

$$\tilde{B}^k = \frac{c}{i\omega} \nabla \times \tilde{\mathbf{E}})_k = \frac{c}{i\omega} \epsilon_{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n. \quad (3.53)$$

Usando a equação de Maxwell (lei de Gauss) para a divergência do campo elétrico perturbado, $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 4\pi \tilde{\rho}_q$, a representação para frequência de plasma $\omega_{pe}^2 = 4\pi \eta_{0e} q_e^2 / m_e$ e

$\omega_{\text{píon}}^2 = 4\pi\eta_{0\text{íon}}q_{\text{íon}}^2/m_{\text{íon}}$ respectivamente para elétrons e íons e substituindo a equação 3.53 na equação 3.52, obtemos:

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_i &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_i + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{ijk} V_{0e}^j \epsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\ &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{ijk} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^j + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^j \right) B_0^k + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^j \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Podemos agora escrever as componentes x , y e z para $(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_i$ tomando $i = 1, 2$, e 3 , respectivamente. Assim

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{1jk} V_{0e}^j \epsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\ &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{1jk} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^j + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^j \right) B_0^k + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^j \epsilon_{1jk} \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_y + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{2jk} V_{0e}^j \epsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\ &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{2jk} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^j + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^j \right) B_0^k + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^j \epsilon_{2jk} \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_z &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_z + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{3jk} V_{0e}^j \epsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\ &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{3jk} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^j + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^j \right) B_0^k + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^j \epsilon_{3jk} \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Por outro lado, se introduzirmos matematicamente o tensor dielétrico partindo da equação de Ampère-Maxwell, teremos

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}} \\ (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) &= \left(\frac{4\pi}{c} \overleftrightarrow{\sigma} - \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \iota \right) \tilde{\mathbf{E}}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde $\overleftrightarrow{\sigma}$ é o tensor condutividade e ι a matriz identidade. O tensor dielétrico é então definido por

$$\overleftrightarrow{\epsilon} = \left(\frac{\mathbf{i}4\pi}{\omega} \overleftrightarrow{\sigma} + \iota \right) \quad (3.59)$$

e a equação 3.58 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}}) = -\frac{\mathbf{i}\omega}{c} \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \tilde{\mathbf{E}}$$

Usando a convenção de Einstein para a i -ésima componente,

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_i = -\frac{\mathbf{i}\omega}{c} \varepsilon_{ij} \tilde{\mathbf{E}}^j,$$

abrindo o somatório para j , obtemos

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_i = -\mathbf{i}\frac{\omega}{c} \left(\varepsilon_{i1} \tilde{E}^x + \varepsilon_{i2} \tilde{E}^y + \varepsilon_{i3} \tilde{E}^z \right). \quad (3.60)$$

Portanto, as componentes x , y , e z serão dadas por:

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x = -\mathbf{i}\frac{\omega}{c} \left(\varepsilon_{11} \tilde{E}^x + \varepsilon_{12} \tilde{E}^y + \varepsilon_{13} \tilde{E}^z \right), \quad (3.61)$$

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y = -\mathbf{i}\frac{\omega}{c} \left(\varepsilon_{21} \tilde{E}^x + \varepsilon_{22} \tilde{E}^y + \varepsilon_{23} \tilde{E}^z \right), \quad (3.62)$$

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_z = -\mathbf{i}\frac{\omega}{c} \left(\varepsilon_{31} \tilde{E}^x + \varepsilon_{32} \tilde{E}^y + \varepsilon_{33} \tilde{E}^z \right). \quad (3.63)$$

Comparando as equações 3.61, 3.62 e 3.63 com as obtidas anteriormente (3.55, 3.56 e 3.57), é possível determinarmos as nove componentes do tensor dielétrico, Apêndice A. Assim,

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

onde

$$\varepsilon_{11} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right) - V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} \right], \quad (3.65)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3.66)$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (3.67)$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (3.68)$$

$$\varepsilon_{22} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right) - V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (3.70)$$

$$\varepsilon_{31} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial z} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (3.71)$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial z} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (3.72)$$

$$\varepsilon_{33} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} \right) - V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right]. \quad (3.73)$$

e

$$\left(\omega_{pe}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{pion}^2 \tilde{V}_{ion}^y \right) B_0^z = \left(\omega_{pe}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{pion}^2 \tilde{V}_{ion}^z \right) B_0^y \quad (3.74)$$

$$\left(\omega_{pe}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{pion}^2 \tilde{V}_{ion}^x \right) B_0^y = \left(\omega_{pe}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{pion}^2 \tilde{V}_{ion}^y \right) B_0^x \quad (3.75)$$

$$\left(\omega_{pe}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{pion}^2 \tilde{V}_{ion}^x \right) B_0^z = \left(\omega_{pe}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{pion}^2 \tilde{V}_{ion}^z \right) B_0^x \quad (3.76)$$

Combinando os resultados acima com a equação 3.58 obtemos, finalmente, o tensor condutividade AC para um plasma anisotrópico que será dado por,

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{-\mathbf{i}\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} (\varepsilon_{11} - 1) & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & (\varepsilon_{22} - 1) & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & (\varepsilon_{33} - 1) \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

Este resultado é bastante geral, pois a única restrição que fizemos no cálculo do tensor dielétrico do plasma foi de que o valor médio da velocidade dos íons deve ser zero ($\mathbf{V}_{0ion} = 0$) quando o plasma estiver em equilíbrio. Em primeira análise, note que as componentes do tensor dependem explicitamente apenas das componentes da velocidade dos elétrons, \mathbf{V}_{0e} , e não do campo magnético. Sabe-se que as componentes da velocidade média das partículas que compõe o plasma dependem da temperatura de plasma e pressão, e portanto, embora não esteja explicitada

no tensor está dependência, ela existe e pode ser que possa ser obtida por meio das componentes da velocidade média da partículas na condição de equilíbrio.

Uma observação importante é o fato de não aparecer explicitamente nenhuma das componentes dos campos magnéticos \mathbf{B}_0 na expressão obtida para o tensor. Isto não significa *a priori* que não haja esta dependência, pois segundo Dendy (1990) o campo magnético altera o movimento da partículas na direção perpendicular a ele, e portanto na direção do campo as partículas mantêm velocidade constante (se não houver campo elétrico nesta direção é claro!). A aceleração provocada pelo campo magnético \mathbf{B}_0 na direção perpendicular faz as partículas oscilarem com velocidade constante em torno das linhas do campo \mathbf{B}_0 . A frequência desta oscilação é denominada frequência ciclotrônica e no caso dos elétrons, é definida por

$$\omega_{ce} = \frac{q_e}{cm_e} \mathbf{B}_0, \quad (3.78)$$

onde q_e é carga e m_e a massa do elétron. Sendo assim, mesmo o campo não aparecendo explicitamente na expressão do tensor, pode ser que seja possível explicitá-lo a partir das componentes de \mathbf{V}_{0e} , pois no caso de não haver campo elétrico perpendicular a \mathbf{B}_0 , teríamos:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{V}_{0e\perp} = -(\omega_{ce} \times \mathbf{V}_{0e}) = \text{constante}. \quad (3.79)$$

onde $\mathbf{V}_{0e\perp}$ é a velocidade dos elétrons perpendicular à direção do campo magnético \mathbf{B}_0 . Assim, espera-se que haja uma corrente de deriva na direção do campo magnético. Como esta tarefa foge do escopo dessa dissertação, visto que estamos interessados apenas no modelo de plasma no qual assumiremos $\mathbf{V}_{0e} = 0$, deixaremos esta tarefa para um outro momento.

Vamos agora fazer um breve análise acerca do tensor condutividade de um plasma magnetizado, como dito anteriormente, plasmas magnetizados são plasmas anisotrópicos e portanto, espera-se que a condutividade na direção do campo magnético seja diferente da direção perpendicular.

3.3.1 Uma breve análise do tensor condutividade

Considerando o tensor obtido nesta seção, equação 3.77, podemos, segundo a lei de Ohm, determinar a densidade de corrente de um plasma, para isto, consideremos que o plasma está sujeito a um campo elétrico de perturbação orientado apenas na direção do eixo z , isto é,

$$\mathbf{E} = \tilde{E} e^{-i\omega t} \hat{k} \quad (3.80)$$

onde \tilde{E} é constante e \hat{k} um vetor unitário apontando na direção do eixo z , de modo que \mathbf{E} seja variável harmonicamente com o tempo e independente da posição. Segundo a lei de Ohm generalizada, teremos

$$\mathbf{J} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.81)$$

Nesta expressão, \mathbf{J} é a densidade de corrente e pode ser representada por uma matriz 3×1 . $\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E}$ representa o produto entre a matriz do tensor condutividade pela matriz do campo elétrico, pois o campo elétrico pode ser representado por uma matriz 3×1 e $\overleftrightarrow{\sigma}$ por uma matriz 3×3 , então

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \frac{-i\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} (\varepsilon_{11} - 1) & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & (\varepsilon_{22} - 1) & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & (\varepsilon_{33} - 1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{E}e^{-i\omega t} \end{bmatrix}, \quad (3.82)$$

de onde obtemos

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \frac{-i\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} \varepsilon_{13}\tilde{E}e^{-i\omega t} \\ \varepsilon_{23}\tilde{E}e^{-i\omega t} \\ (\varepsilon_{33} - 1)\tilde{E}e^{-i\omega t} \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

substituindo ε_{13} , ε_{23} e ε_{33} , temos

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \frac{-i\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{i}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{E}e^{-i\omega t} \\ \frac{i}{\omega} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{E}e^{-i\omega t} \\ \left(-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2} - \frac{i}{\omega} \left[\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} \right) - V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right] \right) \tilde{E}e^{-i\omega t} \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

como consideramos \tilde{E} constante em relação à posição, então a derivada parcial de \tilde{E} em relação a x , y , e z é zero, logo, a matriz densidade de corrente será dada por

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i\omega \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2} \right) \tilde{E}e^{-i\omega t} \end{bmatrix}, \quad (3.85)$$

e portanto,

$$J_z = \frac{i\omega}{4\pi} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2} \right) \tilde{E}e^{-i\omega t} \longrightarrow J_z = \tilde{J}_z = \sigma_z \tilde{E}e^{-i\omega t} \quad (3.86)$$

onde

$$\sigma_z = \frac{\mathbf{i}\omega}{4\pi} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} \right). \quad (3.87)$$

Substituindo ω_{pe}^2 por $4\pi\eta_{0e}q_e^2/m_e$ e negligenciando a frequência de plasma associada ao íons admitindo ser muito menor que frequência de plasma eletrônica ³, obtemos

$$\sigma_z = \mathbf{i} \frac{\eta_{0e}q_e^2}{m_e\omega}. \quad (3.88)$$

Esta equação é perfeitamente análoga à equação 3.40 e dá a condutividade na direção paralela ao campo elétrico de perturbação. Se levarmos em conta as componente y e x do campo elétrico variando da mesma forma que a componente z , o resultado que obtemos é

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{-\mathbf{i}\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} \right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Deve-se notar que chegaríamos a este resultado independente da existência ou não de um campo magnético constante, \mathbf{B}_0 . Como dito anteriormente, na presença de um campo magnético constante e uniforme, teríamos que no equilíbrio, isto é, na ausência de campo elétrico de perturbação, as partículas no plasma seriam aceleradas na direção perpendicular a \mathbf{B}_0 e assim, deveríamos esperar que houvesse uma densidade de corrente nesta direção, no entanto, esta não aparece, pois mesmo que sejam explicitadas as componentes de \mathbf{V}_{0e} em função do campo magnético \mathbf{B}_0 nas componente do tensor condutividade, ela desaparece quando tomamos as derivadas espaciais do campo elétrico. Por outro lado, poderíamos afirmar que esta isotropia na condutividade ocorre porque desprezamos o termo de ordem zero ($\mathbf{V}_{0e} \times \mathbf{B}_0$) na equação de movimento, mas quando este termo é levado em conta, o resultado obtido para o tensor condutividade AC, equação 3.77, é exatamente o mesmo. Portanto, a equação 3.77 nos diz que o tensor condutividade AC de plasmas anisotrópico depende principalmente das variações espaciais e temporais do campo elétrico de perturbação e não tão somente do campo magnético externo.

Para justificar a isotropia encontrada na condutividade, podemos no entanto, afirmar que esta ocorreu porque não explicitamos nas equações 3.55, 3.56 e 3.57, a dependência de \tilde{V}_e^j e \tilde{V}_{ion}^j em função do campo elétrico perturbado. Por este motivo, quando fizemos a comparação com

³ A massa dos íons é cerca de 10^3 vezes maior que a dos elétrons, assim $\omega_{\text{pe}} \gg \omega_{\text{pion}}$ torna-se uma aproximação razoável

as equações 3.61, 3.62 e 3.63, encontramos três equações isoladas envolvendo \vec{B}_0 e perdemos assim, a dependência do tensor em relação ao campo magnético \vec{B}_0 .

Poderíamos chegar à mesma equação 3.87, supondo diretamente que na ausência de campo elétrico de perturbação, $\mathbf{V}_{0e} = 0$, ou seja, a velocidade média dos elétrons na condição de equilíbrio é nula, o que nos levaria a $\mathbf{J}_0 = q_e \eta_0 \mathbf{V}_{0e} = \mathbf{0}$. De acordo com a equação 3.77 o tensor condutividade seria neste caso, dado por:

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{-\mathbf{i}\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} (\varepsilon_{11} - 1) & 0 & 0 \\ 0 & (\varepsilon_{22} - 1) & 0 \\ 0 & 0 & (\varepsilon_{33} - 1) \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

fazendo $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2}\right)$, temos

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{-\mathbf{i}\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

e negligenciando a frequência do plasma do íons teremos,

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\mathbf{i}\omega}{4\pi} \begin{bmatrix} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{bmatrix}. \quad (3.92)$$

Onde o tensor condutividade é um escalar. Este tensor condutividade é puramente imaginário e isotrópico, descrevendo assim a resposta do plasma a campos elétricos oscilante no tempo. Este mesmo resultado pode ser encontrado a partir dos tensores condutividades AC obtidos por Bittencourt (2004) e (DENDY, 1990), quando negligenciados, respectivamente, a frequência de colisões e velocidade dos elétrons na ausência de campo elétrico de perturbação. Se considerarmos novamente um campo elétrico de perturbação do tipo $\mathbf{E} = \tilde{E}e^{-i\omega t}$ orientado na direção z , aplicando a lei de Ohm, teremos

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{i}\omega \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2}\right) \tilde{E}e^{-i\omega t} \end{bmatrix}, \quad (3.93)$$

o que nos leva a $J_x = J_y = 0$ e $J_z = \tilde{J}_z = \sigma_z \tilde{E}e^{-i\omega t}$, onde

$$\sigma_z = \frac{\mathbf{i}\omega}{4\pi} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pion}^2}{\omega^2}\right). \quad (3.94)$$

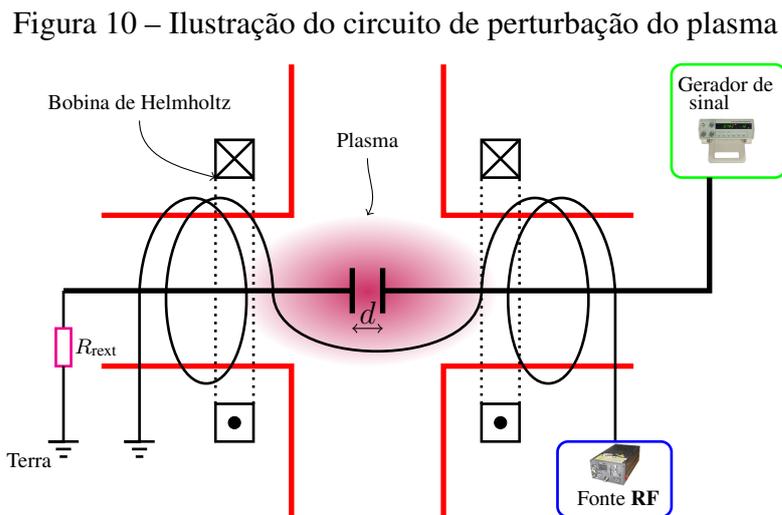
Este tensor é exatamente o mesmo que o dado pela equação 3.87.

Inicialmente, propomos o cálculo do tensor para plasmas anisotrópicos devido à presença de um campo magnético externo, e o resultado que obtivemos foi que a condutividade AC de plasmas magnetizados é aparentemente isotrópica, isto é, independe da direção de \mathbf{B}_0 .

No capítulo a seguir propomos um breve estudo sobre a impedância de plasmas sujeitos a campos elétrico de perturbação unidirecional. Procuraremos definir a impedância de plasma por meio da expressão obtida no capítulo 2 através do teorema de Poynting e do tensor condutividade AC calculado nesta seção e particularizado para o caso \mathbf{V}_{0e} .

4 IMPEDÂNCIA DE PLASMAS

Utilizando o tensor condutividade obtido no capítulo anterior, particularizado para o caso em que $V_{0e} = 0$ (equação 3.92), procuraremos agora determinar uma expressão para impedância a partir das expressões de resistência e reatância para um plasma anisotrópico gerado por uma fonte de rádio frequência (RF). Para tanto, consideremos um plasma gerado por uma fonte de rádio frequência que, após o equilíbrio é então perturbado através de um campo elétrico $\mathbf{E} = \tilde{E}e^{-i\omega t}$ na direção \hat{k} (\hat{k} é um vetor unitário na direção do eixo z), aplicado por meio de dois discos circulares de raio b , separados por uma distância d entre si ao longo da direção \hat{k} . O campo magnético uniforme \mathbf{B}_0 é gerado por um par de bobinas de Helmholtz e alinhado de modo que seja paralelo ao campo elétrico de perturbação ($\mathbf{B}_0 \parallel \mathbf{E}$). Considere também uma resistência externa (R_{rext}) limitando a corrente no circuito de perturbação. O sistema está ilustrado na figura 10:



Fonte: Autor

Considerando as equações de resistência e reatância obtidas na seção 2.2 e tomando $\mathbf{J}^* = (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E})^*$, temos:

$$R = \frac{1}{|I_i|^2} \mathbf{Re} \int_V (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E})^* \cdot \mathbf{E} d^3x \quad (4.1)$$

$$\chi = \frac{1}{|I_i|^2} \left[4\omega \mathbf{Re} \int_V (u_{mg} - u_{el}) d^3x - \mathbf{Im} \int_V (\overleftrightarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E})^* \cdot \mathbf{E} d^3x \right]. \quad (4.2)$$

Note que a condutividade não é real!

Para o cálculo da resistência, teremos

$$(\overleftarrow{\sigma} \cdot \mathbf{E})^* \cdot \mathbf{E} = (\overleftarrow{\sigma})^* |\mathbf{E}|^2 = -\frac{\mathbf{i}\omega}{4\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(\frac{V_{ext}}{d} \right)^2. \quad (4.3)$$

Aqui V_{ext} é a diferença de potencial e d a distância entre os dois discos. Como o resultado deste produto é um número inteiramente imaginário entende-se que a resistência de plasma neste caso é zero,

$$R = 0, \quad (4.4)$$

este resultado também foi obtido por Farias, Cavalcante e Borges (2006) e já era esperado, pois ao calcularmos o tensor não levamos em conta as colisões entre as partículas. Embora a resistência encontrada em nosso modelo seja zero, o valor encontrado experimentalmente pode não ser!

Para o cálculo da reatância, teremos

$$\chi = \frac{4\omega}{|I_i|^2} \mathbf{Re} \int_V (u_{mg} - u_{el}) d^3x + \frac{1}{|I_i|^2} \int_V \frac{\omega}{4\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left(\frac{V_{ext}}{d} \right)^2 d^3x \quad (4.5)$$

definindo $I_i = V_{rext}/R_{rext}$, substituindo as expressões para as densidades de energias u_{mg} e u_{el} dadas pelas equações 2.28 e 2.27, e reorganizando os termos na equação 4.5, obtemos

$$\chi = \frac{\omega}{4\pi} \left(\frac{R_{rext}}{V_{rext}} \right)^2 \mathbf{Re} \int_V \left[|\tilde{\mathbf{B}}|^2 - \left(\frac{V_{ext}}{d} \right)^2 \right] d^3x + \frac{\omega}{4\pi} \left(\frac{R_{rext}}{V_{rext}} \frac{V_{ext}\omega_{pe}}{\omega d} \right)^2 \int_V d^3x. \quad (4.6)$$

o segundo termo na equação 4.6 pode ser facilmente resolvido, trata-se simplesmente de uma integral de volume. Por outro lado precisamos conhecer $|\tilde{\mathbf{B}}|$ para resolvermos o primeiro termo. Aplicando a lei de Ampère-Maxwell escrita em termos do tensor dielétrico (equação 3.63) e em coordenadas cilíndricas a fim de obtermos $\tilde{\mathbf{B}}$, temos

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_z = -\frac{\mathbf{i}\omega}{c} \varepsilon_{33} \tilde{E} \hat{k} \quad (4.7)$$

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{B}_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} \tilde{B}_r \right] = -\frac{\mathbf{i}\omega}{c} \varepsilon_{33} \tilde{E} \quad (4.8)$$

note que neste caso resta apenas a componente na direção \hat{k} do rotacional de $\tilde{\mathbf{B}}$, pois supomos haver campo elétrico perturbado apenas na direção \hat{k} . Admitindo \tilde{B}_r independente de θ , teremos

$$\frac{1}{r} \left[\frac{d}{dr} (r \tilde{B}_\theta) \right] = -\frac{\mathbf{i}\omega}{c} \varepsilon_{33} \tilde{E} \quad (4.9)$$

cuja solução para $\omega_{\text{pion}} \ll \omega_{\text{pe}}$, será dada por

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{B}_\theta = -\frac{i\omega}{2c} \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2}\right) \frac{V_{\text{ext}}}{d} r \hat{\theta}, \quad (4.10)$$

onde $\hat{\theta}$ é um vetor unitário na direção θ . Logo,

$$|\tilde{\mathbf{B}}|^2 = \frac{\omega^2}{4c^2} \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2}\right)^2 \left(\frac{V_{\text{ext}}}{d}\right)^2 r^2. \quad (4.11)$$

Substituindo 4.11 na equação 4.6 e resolvendo as duas integrais de volume, obtemos a expressão para a reatância como sendo,

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{V_{\text{ext}}}{V_{\text{rext}}}\right)^2 \frac{R_{\text{rext}}^2}{\chi_c} \left[\frac{\omega^2 b^2}{8c^2} \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2}\right)^2 - 1 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \right], \quad (4.12)$$

onde $\chi_c = \frac{d}{\omega A}$ é a reatância capacitiva dos eletrodos imersos, quando estes estão no vácuo, V_{ext} a diferença de potencial sobre os dois discos imersos no plasma (imposta pelo gerador de sinal) e V_{rext} a queda de potencial sobre o resistor externo. Podemos reescrever a equação acima numa forma mais simplificada tomando $\frac{1}{\xi} = \frac{\omega_{\text{pe}}}{\omega}$:

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{V_{\text{ext}}}{V_{\text{rext}}}\right)^2 \frac{R_{\text{rext}}^2}{\chi_c} \left[\frac{\omega_{\text{pe}}^2 \xi^2 b^2}{8c^2} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}\right) \right]. \quad (4.13)$$

Escrevendo χ_c em função de ξ , temos

$$\chi_c = \frac{d}{\omega A} = \frac{d}{\xi \omega_{\text{pe}} A} = \frac{d}{\xi \omega_{\text{pe}} \pi b^2}, \quad (4.14)$$

então,

$$\chi = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{V_{\text{ext}}}{V_{\text{rext}}}\right)^2 R_{\text{rext}}^2 \frac{\xi \omega_{\text{pe}} \pi b^2}{d} \left[\frac{\omega_{\text{pe}}^2 \xi^2 b^2}{8c^2} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2}\right) \right]. \quad (4.15)$$

Da teoria de circuito, temos que a corrente elétrica no circuito de perturbação deve ser a mesma em qualquer ponto, logo

$$\left(\frac{V_{\text{ext}}}{V_{\text{rext}}}\right)^2 R_{\text{rext}}^2 = \frac{V_{\text{ext}}^2}{\frac{V_{\text{ext}}^2}{R^2 + \chi^2}} = \chi^2,$$

pois, como vimos, a resistência de plasma é nula ($R = 0$). Substituindo o resultado acima na equação 4.15 obtemos

$$h(\xi)\chi^2 - 4\pi\chi = 0, \quad (4.16)$$

onde

$$h(\xi) = \frac{\xi\omega_{pe}\pi b^2}{d} \left[\frac{\omega_{pe}^2 \xi^2 b^2}{8c^2} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^2 - \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right) \right]. \quad (4.17)$$

Assim, para resistência de plasma igual a zero, obtemos duas soluções para equação 4.16, são elas:

$$\chi' = 0$$

e

$$\chi'' = \frac{4d}{\xi\omega_{pe}b^2} \left(\frac{1}{\frac{\omega_{pe}^2 \xi^2 b^2}{8c^2} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^2 - \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)} \right). \quad (4.18)$$

Dividiremos a análise da impedância total do circuito de perturbação em duas partes, na primeira trataremos de determinar a impedância total quando $\chi = 0$ e a segunda quando $\chi = \chi''$.

4.1 IMPEDÂNCIA TOTAL PARA REATÂNCIA NULA

Para a solução $\chi' = 0$ teríamos a impedância de plasma dada por $Z_p = 0$, pois teoricamente, encontramos $R = 0$, e neste caso, a impedância total do circuito de perturbação será $Z = R_{\text{ext}}$, ou seja, a solução $\chi = \chi' = 0$ nos fornece a condição para que o circuito de perturbação seja puramente resistivo. Neste caso, toda a potência média fornecida pelo gerador de sinal é dissipada através de R_{ext} , o plasma funciona como um condutor perfeito ($\sigma \rightarrow \infty$) e toda energia reativa armazenada na forma de campos é devolvida para a fonte.

Sabe-se que em circuitos com elementos resistivos e reativos, a queda de potencial sobre estes depende da frequência de oscilação do potencial. Na equação 4.15, não explicitamos esta dependência, no entanto, para obtermos $\chi = 0$, é suficiente tomarmos

$$g(\xi) = \frac{\xi\omega_{pe}\pi b^2}{d} \left[\frac{\omega_{pe}^2 \xi^2 b^2}{8c^2} \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right)^2 - \left(\frac{\xi^2 - 1}{\xi^2} \right) \right] = 0 \quad (4.19)$$

para quaisquer valores de V_{ext} e V_{rext} diferente de zero. As soluções para $g(\xi) = 0$ são:

$$\xi^2 = 1 \tag{4.20}$$

e

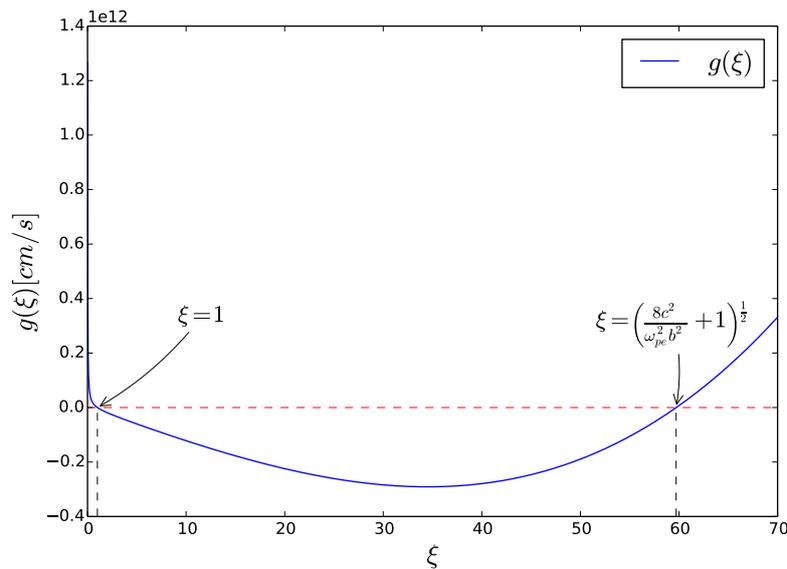
$$\xi^2 = \frac{8c^2}{\omega_{pe}^2 b^2} + 1. \tag{4.21}$$

Para uma breve análise sobre a expressão $g(\xi)$, consideremos os seguintes valores:

- Raio dos discos no circuito de perturbação, $b = 1.42\text{cm}$;
- Distância de separação entre os discos, $d = 0.5\text{cm}$;
- Velocidade da luz no vácuo, $c = 2.99 \times 10^{10}\text{cm/s}$;
- Frequência de plasma, $\omega_{pe} \simeq 10^9\text{Hz}$. Este valor pode ser teoricamente considerado, pois de acordo com a literatura, frequências de plasmas gerados por excitação **RF** são da ordem de algumas dezenas de Gigahertz, ver Rakhimova et al. (2006).

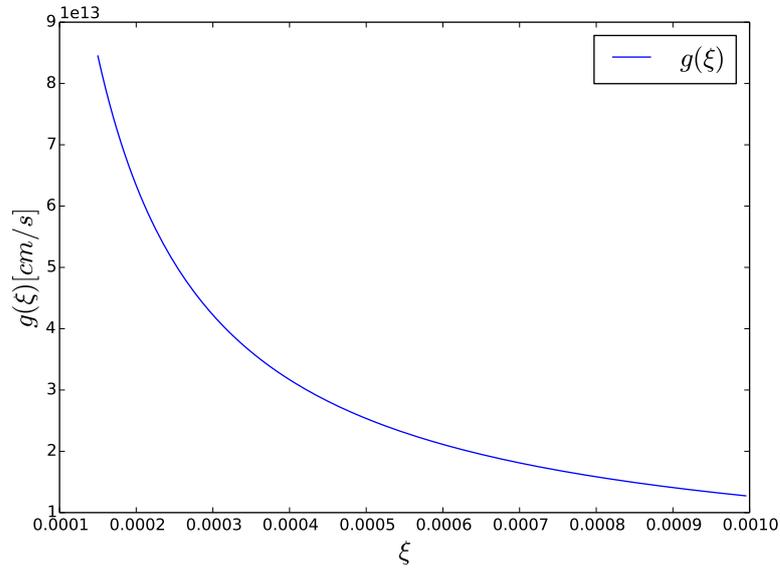
Na figura 11 mostramos uma visão geral da curva $g(\xi)$ para frequência de perturbação superior a frequência de plasma.

Figura 11 – Curva $g(\xi)$ para frequência de plasma da ordem de 10^9Hz e $b = 1.42\text{cm}$



Fonte: Autor

As raízes $\xi = 1$ e $\xi = \left(\frac{8c^2}{\omega_{pe}^2 b^2} + 1\right)^{1/2}$ fornecem a condição para que o circuito seja puramente resistivo. Assim, para $\chi = 0$ é necessário que a frequência do campo de perturbação seja no mínimo igual à frequência de plasma.

Figura 12 – Curva $g(\xi)$ para frequência de plasma da ordem de 10^9 Hz e $b = 1.42$ cm

Fonte: Autor

De fato, estamos experimentalmente interessados no comportamento de χ quando a frequência de perturbação é no máximo uma ou duas unidades de Gigahertz, pois o circuito de perturbação é alimentado por meio de um gerador de sinal, rever figura 10, cuja frequência a ser obtida pelos gerador de sinal disponível em nosso laboratório, pode chegar no máximo a duas unidades de Gigahertz. Portanto, em nosso modelo, só faz sentido estudarmos o comportamento de χ quando a frequência de perturbação é muito menor que a frequência de plasma, ou seja, para valores de ξ da ordem de 10^{-4} e 10^{-3} . Na figura 12 mostramos a curva $g(\xi)$ para estes valores, onde a frequência de plasma é suposta aproximadamente 10^9 Hz e a frequência de perturbação varia de 100KHz a 1MHz de dez em dez KHz.

Vamos agora reescrever a equação 4.15 em termos de $g(\xi)$, então

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{V_{\text{ext}}}{V_{\text{rext}}} \right)^2 R_{\text{rext}}^2 g(\xi) \\ \frac{\chi}{\chi^2} &= \frac{g(\xi)}{4\pi} \\ \frac{4\pi V_{\text{rext}}}{R_{\text{rext}} V_{\text{ext}}} &= g(\xi),\end{aligned}\tag{4.22}$$

ou explicitando ω e ω_{pe} em $g(\xi)$, teremos

$$\frac{4\pi V_{\text{rext}}}{R_{\text{rext}} V_{\text{ext}}} = \frac{\omega \pi b^2}{d} \left[\frac{\omega^2 b^2}{8c^2} \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \right)^2 - 1 + \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \right].\tag{4.23}$$

Chegamos a uma expressão na qual a diferença de potencial sobre o resistor externo bem como sobre os dois discos imersos no plasma podem ser facilmente medidas. Então, monitorando-se a razão ($V_{\text{rext}}/V_{\text{ext}}$) em função da frequência ω no circuito de perturbação, conhecendo-se os valores de d , b e R_{rext} no circuito é provável que possamos via ajuste de curva determinar a frequência e densidade de plasma, ω_{pe} , supondo é claro que a perturbação não altere as características fundamentais do plasma.

Até aqui analisamos apenas uma das duas soluções obtidas para χ , vamos agora considerar a solução diferente de zero.

4.2 IMPEDÂNCIA TOTAL PARA REATÂNCIA NÃO NULA

De acordo com solução 4.18, a impedância de plasma será dada por:

$$Z_p = R - \mathbf{i}\chi'' = -\mathbf{i}\frac{4d}{\xi\omega_{\text{pe}}b^2} \left(\frac{1}{\frac{\omega_{\text{pe}}^2\xi^2b^2}{8c^2} \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\right)} \right), \quad (4.24)$$

onde $\xi = \omega/\omega_{\text{pe}}$.

Portanto, a expressão para impedância total do circuito será

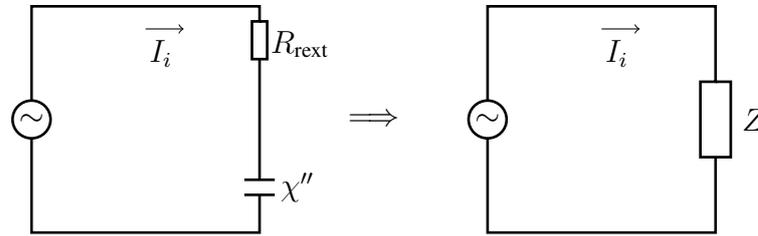
$$Z = (R_{\text{rext}} + R) - \mathbf{i}(0 + \chi'') = R_{\text{rext}} - \mathbf{i}\chi'', \quad (4.25)$$

pois a resistência de plasma é nula, e R_{rext} é puramente resistivo. Assim, o circuito de perturbação é constituído de dois elementos: um elemento puramente resistivo, R_{rext} , e um elemento puramente reativo, χ'' , cuja a reatância é dada pela equação 4.18. Na figura 13 é mostrado o desenho esquemático do circuito de perturbação equivalente com representação em termos da impedância total, onde

$$Z = R_{\text{rext}} - \mathbf{i}\frac{4d}{\xi\omega_{\text{pe}}b^2} \left(\frac{1}{\frac{\omega_{\text{pe}}^2\xi^2b^2}{8c^2} \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\right)^2 - \left(\frac{\xi^2-1}{\xi^2}\right)} \right). \quad (4.26)$$

A expressão aqui obtida para Z total depende apenas do raio, da distância entre os discos, da frequência do campo elétrico de perturbação e frequência de plasma. Experimentalmente, podemos tratar o raio e a distância entre os discos como constantes. Podemos supor também a frequência de plasma como sendo constante, pois supomos que a perturbação é tal que não altera a frequência de plasma. Para verificarmos o comportamento da parte reativa da equação 4.25, consideremos novamente os seguinte valores:

Figura 13 – Impedância total do circuito de perturbação em função dos elementos R_{rext} e χ'' , e o circuito equivalente representado em termos de Z



Fonte: Autor

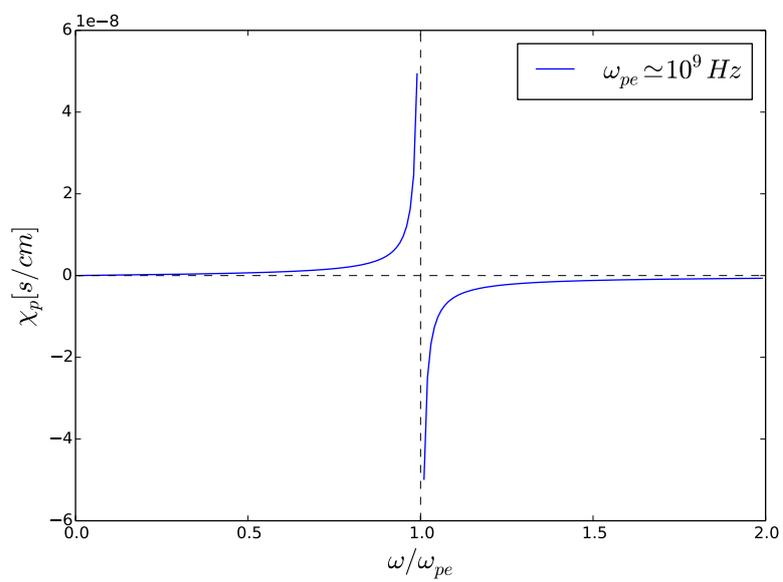
- Raio dos discos no circuito de perturbação, $b = 1.42\text{cm}$;
- Distância de separação entre os discos, $d = 0.5\text{cm}$;
- Velocidade da luz no vácuo, $c = 2.99 \times 10^{10}\text{cm/s}$;
- Frequência de plasma, $\omega_{\text{pe}} \simeq 10^9\text{Hz}$.

Substituindo estes valores na parte reativa da equação 4.25, obtemos a curva apresentada na figura 14, mostrando que para frequência de perturbação ligeiramente maior que a frequência de plasma a reatância é negativa, divergindo quando $\xi \rightarrow \infty$. Para valores de ω ligeiramente menor que ω_{pe} temos uma reatância positiva e divergente para $\xi \rightarrow 0$. Assim, o plasma apresenta baixa reatância para campos elétricos oscilando em baixas frequências, bem como para frequências maiores que ω_{pe} . Note que χ_p também diverge quando de $\xi \rightarrow 1$, mostrando que para este valor o plasma torna-se puramente resistivo, conforme havíamos visto ao analisar a função $g(\xi)$. Um resultado teórico semelhante foi obtido por Brackwell, Walker e Amatucci (2005), no entanto a perturbação feita por eles consiste numa diferença de potencial aplicada a uma sonda esférica e não a dois discos paralelos como no nosso caso.

O gerador de sinal que dispomos em nosso laboratório só pode chegar a frequências da ordem de duas unidades de Mhz, assim para frequência de plasma da ordem de Ghz, ξ é aproximadamente zero. Pela figura 14 nota-se que para valores desta ordem ou menores a reatância de plasma é nula.

Como mencionado, em nosso modelo, não consideramos as colisões entre as partículas e assim encontramos uma resistência de plasma nula. A reatância conforme a figura 14 é praticamente nula para baixas frequências então, espera-se teoricamente que o plasma entre os discos funcione como um ótimo condutor, isto é, $\sigma \rightarrow \infty$. Muito embora, experimentalmente, podemos esperar que o plasma apresente uma resistência elétrica diferente de zero.

Figura 14 – Curva obtida para a parte reativa da equação 4.25



Fonte: Autor

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação realizamos uma revisão bibliográfica acerca do modelo plasma circuito, nas referências estudadas observamos técnicas diferentes para a obtenção da impedância de plasma. No estudo apresentado descrevemos uma abordagem de forma diferenciada da que é encontrada na literatura recente. As expressões obtidas para resistência e reatância de plasma foram restritas a uma configuração básica, onde o campo elétrico de perturbação possui uma única componente paralela ao campo magnético unidimensional imposto externamente. Tratamos ainda o plasma como sendo frio, isto é, negligenciamos a frequência de plasma iônica supondo ser muito pequena em relação à frequência de plasma eletrônica. Admitimos ainda que a velocidade dos elétrons na ausência de campo elétrico perturbado fosse zero de modo que a corrente elétrica líquida no circuito de perturbação fosse nula. Estas considerações fizeram com que o tensor condutividade fosse dado por uma matriz diagonal com três componentes iguais, eliminando assim toda a dependência do tensor em relação ao campo magnético \mathbf{B}_0 , e conseqüentemente facilitando a obtenção da expressão para resistência, reatância e impedância.

Mesmo com todas as aproximações descritas acima o cálculo do tensor condutividade de plasmas anisotrópico a partir da notação de Einstein e do símbolo de Levi-Civita mostra-se bastante geral, e aponta um caminho diferente dos existentes na literatura para obtenção do tensor condutividade de plasmas. Quando consideramos um plasma magnetizado no qual era aplicado um campo elétrico harmônico e independente das coordenadas espaciais, vimos que a condutividade do plasma torna-se independente de \mathbf{B}_0 e portanto, isotrópica. Este resultado só foi obtido porque não explicitamos nas equações 3.55, 3.56 e 3.57, a dependência de \tilde{V}_e^j e \tilde{V}_{ion}^j em função do campo elétrico perturbado. Por este motivo, quando fizemos a comparação com as equações 3.61, 3.62 e 3.63, encontramos três equações isoladas envolvendo \vec{B}_0 e perdemos assim, a dependência do tensor em relação ao campo magnético \vec{B}_0 . Quando negligenciamos a frequência ciclotrônica associada aos elétrons, a frequência de plasmas dos íons e a frequência ciclotrônica, admitindo $\mathbf{B}_0 = 0$ nos tensores obtidos na literatura, mais especificamente, o obtido no livro do Bittencourt (2004) e no livro do Dendy (1990), o resultado que obtemos para a condutividade de um plasma anisotrópico é exatamente o mesmo que o obtido em nosso trabalho. Mostrando assim, embora para um caso simples, total acordo entre a previsão teórica obtida pelo tensor condutividade proposto em nosso trabalho com os obtidos na literatura.

Na expressão para impedância obtivemos a resistência associada ao plasma como sendo zero, pois ao calcularmos o tensor condutividade não consideramos os efeitos provocados pelas colisões das partículas que compõem o plasma. Estas colisões geram forças dissipativas e devem ser consideradas no cálculo, por este motivo já era esperado que o valor teórico para resistência fosse zero, muito embora em medidas experimentais esperamos que ela não seja nula.

Quanto à expressão para reatância, numa breve análise, chegamos a uma forma aparente-

mente simples de se obter frequência e densidade de plasma a partir de parâmetros experimentais facilmente mensuráveis, exigindo apenas o uso de equipamentos comuns em qualquer laboratório, tais como osciloscópio e gerador de sinal. Embora o método apresentado neste trabalho para mapear grandezas associadas a um plasma seja indireto e invasivo assim como no caso da sonda Langmuir, este é experimentalmente mais fácil de ser implementado e a teoria envolvida na determinação das grandezas associadas ao plasma é relativamente menor e mais simples.

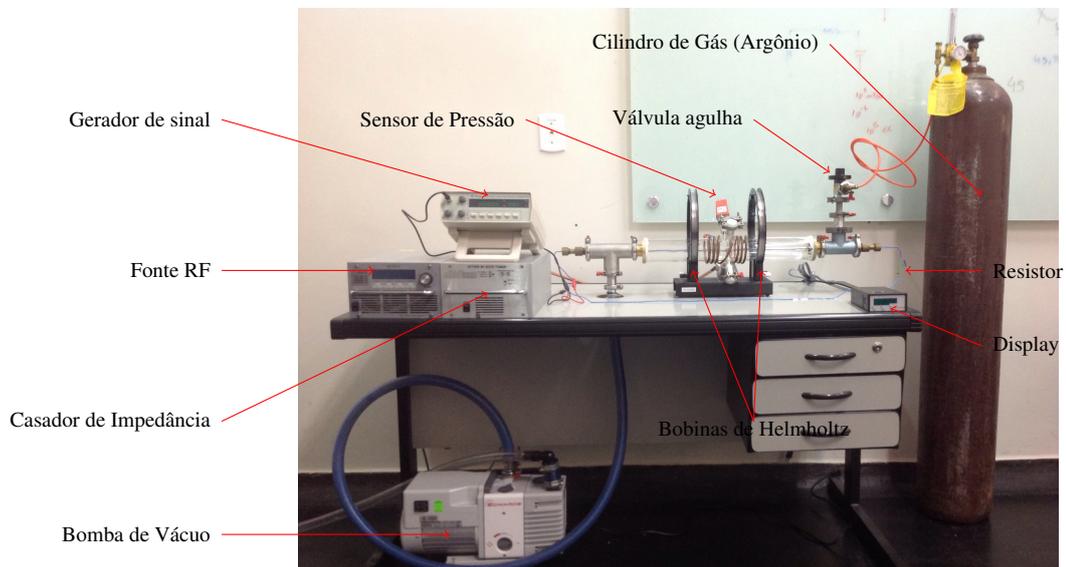
Além de encontrarmos uma expressão para determinação da frequência de plasma, vimos teoricamente, que o plasma apresenta uma reatância significativa apenas quando a frequência de perturbação é relativamente alta e próxima à frequência de plasma. Mesmo este resultado teórico sendo válido apenas para a configuração proposta em nosso trabalho, a curva obtida para reatância não nula apresenta características extremamente semelhantes e com a mesma ordem de grandeza de outras obtidas na literatura, por exemplo, a obtida por Brackwell, Walker e Amatucci (2005).

Portanto, o estudo realizado neste trabalho, de modo geral, mostrou-se bastante satisfatório e indica um longo caminho, mas promissor, a ser percorrido no sentido de se produzir plasma por descarga elétrica com eficiência, pois envolve um amplo conhecimento acerca do comportamento do plasma como elemento de um circuito elétrico, este comportamento é determinado pelo seu tensor condutividade que por sua vez é mostra-se bastante complexo, dependendo do modelo físico e matemático adotado.

6 PERSPECTIVAS FUTURAS

- Verificar experimentalmente a validade do modelo proposto para determinação de densidade e frequência de plasma por meio de comparação de medidas realizada com sonda Langmuir;
- Analisar, pelo menos teoricamente, a expressão para impedância quando o campo elétrico de perturbação é perpendicular ao campo magnético externo;
- Utilizar o tensor descrito aqui para calcularmos a impedância associada a um plasma em termos dos parâmetros geométricos da descarga que o gera. Baseado na variação da impedância em função destes parâmetros ajustá-los de forma que plasma seja criado num processo de ressonância com a fonte;
- Para obtermos um modelo ainda mais completo, pretendemos futuramente acrescentar o termo associado aos efeitos de colisões das partículas, utilizando por exemplo o Modelo de Drude, e assim obtermos valores diferentes de zero para a resistência;
- Conclusão da montagem do aparato experimental:

Figura 15 – Ilustração do aparato experimental montado durante os meses de dissertação



Fonte: Autor

REFERÊNCIAS

- BITTENCOURT, J. A. *Fundamentals of Plasma Physics Classical Electrodynamics*. 3. ed. New York: Springer, 2004. Citado 9 vezes nas páginas 16, 18, 19, 31, 32, 34, 36, 48 e 59.
- BRACKWELL, D. D.; WALKER, D. N.; AMATUCCI, W. E. **Measurement of Absolute Electron Density with a Plasma Impedance Probe**. *Review of Scientific Instruments*, v. 76, p. 23503–1–23603–6, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 19, 57 e 60.
- BRET, A. **Beam-Plasma Dielectric Tensor with Mathematica**. *Computer Physics Communications*, v. 176, p. 362–366, 2007. Citado na página 20.
- CANAL, G. P. *Desenvolvimento e Caracterização de um Dispositivo de Limpeza a Plasma para Processos em Nanotecnologia*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF, 2009. Citado na página 19.
- DANALS, C. *25-second exposure of the aurora australis from Amundsen-Scott S.P.S.* National Science Foundation, 2005. Acessado em: 07 de jul. 2015. Disponível em: <https://en.m.wikipedia.org/wiki/Aurora#/media/File:Amundsen-Scott_marsstation_ray_h_edit.jpg>. Citado na página 17.
- DENDY, R. O. *Plasma Dynamics*. 1. ed. New York: Clarendon Press - Oxford, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 45, 48 e 59.
- FANO, R. M.; CHU, L. J.; ADLER, R. B. *Electromagnetic Fields, Energy, and Forces*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1963. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- FARIAS, E. E. *Estudo do Plasma Produzido por Descarga Elétrica no Limiar da Transição Townsend - “Glow”*. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, 2006. Citado na página 26.
- FARIAS, E. E.; CAVALCANTE, G. H.; BORGES, F. O. **Plasma Impedance Obtained by Poynting’s Theorem and MHD Theory**. *Journal of Applied Physics*, 2006. Citado na página 51.
- FLORES, L. *Foto do Mês - Abril*. 2015. Acessado em: 08 de jul. 2015. Disponível em: <<http://www.inpe.br/webelat/homepage/menu/noticias/foto.do.mes.php>>. Citado na página 17.
- GOODMAN, M. L.; KAZEMINEZHAD, F. **Simulation of Magnetohydrodynamic Shock Wave Generation, Propagation, and Heating in the Photosphere and Chromosphere Using a Complete Electrical Conductivity Tensor**. *The Astrophysical Journal*, v. 708, p. 268–287, 2010. Citado na página 20.
- GRECCO, A. F.; BOSCO, E. D. **Relatório Final do Projeto de Iniciação Científica: Desenvolvimento de um Aplicativo Computacional para Automatização da Análise de Dados de Sondas Eletrostáticas Utilizadas para Medidas de Temperatura e Densidade de Plasmas Quentes**. *Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais*, p. 1–24, 2007. Citado na página 19.

HOPKINS, M. A.; KING, L. B. **Assessment of Plasma Impedance Probe for Measuring Electron Density and Collision Frequency in a Plasma with Spatial and Temporal Gradients.** *Journal of Applied Physics - AIP*, v. 21, n. 53501, p. 1–11, 2014. Citado na página 19.

ILIÉ, D. B. **Impedance Measurement as a Diagnostic for Plasma Reactors .** *Review Scientific Instruments*, v. 52, p. 1542–1545, 1981. Citado na página 19.

INAGLORY, B. *English: Red and green Aurora in Fairbanks, Alaska.* Wikipedia, 2007. Acessado em: 07 de jul. 2015. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Red_and_green_aurora.jpg>. Citado na página 17.

JACKSON, J. D. *Classical Electrodynamics*. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1975. Citado 6 vezes nas páginas 23, 25, 27, 28, 29 e 30.

KABANOV, V. V.; ZAGAR, K.; MIHAILOVIC, D. **Electrical Conductivity of Inhomogeneous two Components Media in two Dimensions .** 2008. Citado na página 20.

MOTOMURA, T. et al. **Note: Practical monitoring system using characteristic impedance measurement during plasma processing.** *Review of Scientific Instruments*, v. 85, n. 026103, p. 1–3, 2014. Citado na página 19.

NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo*. 1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 25.

RAKHIMOVA, T. V. et al. **Experimental and Theoretical Study of RF Plasma at Low and High Frequency.** *IEEE Transactions on Plasma Science*, v. 34, n. 03, p. 867–877, 2006. Citado na página 54.

RON, G. *Electromagnetically Induced Transparency (EIT).* Ron Group - Fundamental Interactions, 2015. Acessado em: 09 de jul. 2015. Disponível em: <<http://www.phys.huji.ac.il/~gron/Other/EIT/EIT.html>>. Citado na página 18.

TSUI, K. H. et al. **Plasma Impedance and Electron Density in a Pulsed Laser Channel.** *Journal of Applied Physics - AIP*, p. 8269–8273, 1996. Citado na página 19.

WIKIPEDIA. *Aurora.* Wikipedia, 2015. Acessado em: 07 de jul. 2015. Disponível em: <<https://en.m.wikipedia.org/wiki/Aurora>>. Citado na página 16.

ZELL, H. *Massive Filament Eruption whit Superimposed Earth fo Scale.* Nasa, 2012. Acessado em: 08 de jul. 2015. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission_pages/sunearth/news/gallery/earth-scale.html>. Citado na página 17.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Cálculo das Componentes do Tensor Dielétrico

A.1 Componente x

De acordo com o símbolo de Levi Civita,

$$\epsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{l} +1 \text{ se } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ ou } (2, 3, 1) \\ -1 \text{ se } (3, 2, 1), (2, 1, 3) \text{ ou } (1, 3, 2) \\ 0 \text{ se } i = j, j = k \text{ ou } k = i \end{array} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Para $i = 1$ podemos ter $j = 2$ e $k = 3$ com $\epsilon_{123} = 1$, ou $j = 3$ e $k = 2$ com $\epsilon_{132} = -1$. Para os casos onde j e/ou k são iguais 1 temos que $\epsilon_{1jk} = 0$ e estes casos não nos interessa, pois ao abrirmos o somatório não haverá contribuição destes termos. Sendo assim a componente x do rotacional de $\tilde{\mathbf{B}}$,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{1jk} V_{0e}^j \epsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\ &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{1jk} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^j + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^j \right) B_0^k + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^j \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{123} V_{0e}^y \epsilon^{3mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\ &+ \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{132} V_{0e}^z \epsilon^{2mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n + \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{123} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^y \right) B_0^z \\ &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{132} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^y \\ &+ \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^j \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n, \end{aligned}$$

substituindo os valores de $\epsilon_{123} = 1$ e $\epsilon_{132} = -1$, obtemos

$$\begin{aligned} (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \epsilon^{3mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\ &- \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \epsilon^{2mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n + \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^y \right) B_0^z \\ &- \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^y \\ &+ \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^j \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n. \end{aligned}$$

Podemos agora abrir o somatório em m e n . Note que devemos ter $m = 1$ e $n = 2$, ou $m = 2$ e $n = 1$ para ϵ^{3mn} , logo

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \left(\epsilon^{312} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^y + \epsilon^{321} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^x \right) \\
 &- \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \epsilon^{2mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n + \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^y \right) B_0^z \\
 &- \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^z \right) B_0^y \\
 &+ \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n,
 \end{aligned}$$

substituindo os valores de $\epsilon^{312} = 1$ e $\epsilon^{321} = -1$, teremos

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^y - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^x \right) \\
 &- \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \epsilon^{2mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n + \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^y \right) B_0^z \\
 &- \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^z \right) B_0^y \\
 &+ \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^x + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^y + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^z \right).
 \end{aligned}$$

Para ϵ^{2mn} devemos ter $m = 3$ e $n = 1$, ou $m = 1$ e $n = 3$. Então,

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^y - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^x \right) \\
 &- \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \left(\epsilon^{231} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^x + \epsilon^{213} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^z \right) + \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^y \right) B_0^z \\
 &- \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^z \right) B_0^y \\
 &+ \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^x + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^y + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^z \right),
 \end{aligned}$$

substituindo os valores $\epsilon^{231} = 1$ e $\epsilon^{213} = -1$, teremos

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_x + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^y - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^x \right) \\
 &- \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \left(\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^x - \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^z \right) + \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^y \right) B_0^z \\
 &- \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^z \right) B_0^y \\
 &+ \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^x + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^y + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^z \right).
 \end{aligned}$$

Reorganizando os termos na equação acima,

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x &= \left[\left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} - \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{1}{c} V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} \right] \tilde{E}^x \\
 &+ \left(\frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial y} \right) \tilde{E}^y + \left(\frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{E}^z \\
 &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^y \right) B_0^z - \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^z \right) B_0^y. \quad (\text{A.3})
 \end{aligned}$$

Comparando a expressão A.3 com a expressão A.4,

$$(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x = -\mathbf{i} \frac{\omega}{c} \left(\varepsilon_{11} \tilde{E}^x + \varepsilon_{12} \tilde{E}^y + \varepsilon_{13} \tilde{E}^z \right) \quad (\text{A.4})$$

obtemos as seguintes relações:

$$\varepsilon_{11} = \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left[\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right) + V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} \right], \quad (\text{A.5})$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (\text{A.6})$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^y \right) B_0^z = \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^z \right) B_0^y. \quad (\text{A.8})$$

A.2 Componente y

Efetuada os mesmos procedimentos realizados para a componente x do rotacional de $\tilde{\mathbf{B}}$, só que agora para a componente y do rotacional de $\tilde{\mathbf{B}}$, podemos obter outras três componentes do tensor dielétrico. Partindo da equação:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{píon}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{E}^y + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \varepsilon_{2jk} V_{0e}^j \epsilon^{kmn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\
 &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \varepsilon_{2jk} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^j + \omega_{\text{píon}}^2 \tilde{V}_{\text{íon}}^j \right) B_0^k + \frac{1}{c} V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n, \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Agora, para $i = 2$ devemos ter $j = 1$ e $k = 3$ com $\varepsilon_{213} = -1$, ou $j = 3$ e $k = 1$ com $\varepsilon_{132} = -1$. Para os casos onde j e/ou k são iguais 2 temos que $\varepsilon_{2jk} = 0$ e estes casos não nos interessa, pois ao abrirmos o somatório não haverá contribuição destes termos. Sendo assim a componente y do rotacional de $\tilde{\mathbf{B}}$ será dada por

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_y + \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{213} V_{0e}^x \epsilon^{3mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\
 &+ \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \epsilon_{231} V_{0e}^z \epsilon^{1mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n + \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{213} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^x \right) B_0^z \\
 &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \epsilon_{231} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^x + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n,
 \end{aligned}$$

substituindo os valores de ϵ_{213} e ϵ_{231} , teremos

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_y - \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \epsilon^{3mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n \\
 &+ \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \epsilon^{1mn} \frac{\partial}{\partial x_m} \tilde{E}^n - \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^x \right) B_0^z \\
 &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^x + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n.
 \end{aligned}$$

Abrindo os termos dependente de m e n , obtemos

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_y - \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \left(\epsilon^{312} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^y + \epsilon^{321} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^x \right) \\
 &+ \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \left(\epsilon^{123} \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^z + \epsilon^{132} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^y \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^x \right) B_0^z \\
 &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^x + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n,
 \end{aligned}$$

substituindo os valores de $\epsilon^{321} = \epsilon^{132} = -1$ e $\epsilon^{312} = \epsilon^{123} = 1$, teremos

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_y - \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^y - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^x \right) \\
 &+ \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^z - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^y \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^x \right) B_0^z \\
 &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^x + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x_n} \tilde{E}^n,
 \end{aligned}$$

abrindo o somatório em n , obtemos

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y &= \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} - 1 \right) \frac{\mathbf{i}\omega}{c} \tilde{\mathbf{E}}_y - \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^y - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^x \right) \\
 &+ \frac{1}{c} \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \left(\frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^z - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^y \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^x \right) B_0^z \\
 &+ \frac{\mathbf{i}}{\omega c^2} \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^x + \frac{1}{c} \mathbf{V}_{0e}^y \left(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{E}^x + \frac{\partial}{\partial y} \tilde{E}^y + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{E}^z \right),
 \end{aligned}$$

e finalmente reorganizando os termos da equação anterior e comparando com a equação A.9 obtemos outras três componentes do tensor dielétrico juntamente com outra relação entre as componentes do campo magnético:

$$\varepsilon_{21} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\varepsilon_{22} = \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left[\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{1}{c} V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} \right] \quad (\text{A.11})$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial y} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (\text{A.12})$$

$$\left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^x \right) B_0^z = \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^z + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^z \right) B_0^x. \quad (\text{A.13})$$

A.3 Componente z

Analogamente, se efetuarmos os mesmos procedimentos que os realizados para $(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_x$ e $(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_y$, agora para a componente $(\nabla \times \tilde{\mathbf{B}})_z$, obteremos

$$\varepsilon_{31} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial z} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (\text{A.14})$$

$$\varepsilon_{32} = \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left(\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial z} + V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (\text{A.15})$$

$$\varepsilon_{33} = \left(1 - \frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{\text{pion}}^2}{\omega^2} \right) - \frac{\mathbf{i}}{\omega} \left[\frac{\omega_{\text{pe}}^2}{\omega^2} \left(V_{0e}^x \frac{\partial}{\partial x} + V_{0e}^y \frac{\partial}{\partial y} \right) - V_{0e}^z \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (\text{A.16})$$

$$\left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^x + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^x \right) B_0^y = \left(\omega_{\text{pe}}^2 \tilde{V}_e^y + \omega_{\text{pion}}^2 \tilde{V}_{\text{ion}}^y \right) B_0^x. \quad (\text{A.17})$$

ANEXOS

ANEXO A – Python-Script para Obtenção dos Gráficos

A.1 Script - Figura 9

```

#coding: utf-8
import console
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
console.clear()
#
#
a = 1
fig, ax = plt.subplots()
x = np.arange(0, 6, 0.01)
#
Cond = 1/(1+ x**2)
Cond1 = x/(1+ x**2)
plt.plot(x, Cond, x, Cond1)
plt.ylim([0,1.5])
#
# legenda nos eixos
plt.xlabel(r"$\omega_{ce}/\nu_{c}$ $", fontsize=20)
plt.ylabel ( "Condutividade", fontsize=15)
#
# desenha reta em y = sigma
l = plt.axhline(y=a, linewidth=0.5, color='r')
#
ax.spines['right'].set_visible(False)
ax.spines['top'].set_visible(False)
ax.xaxis.set_ticks_position('bottom')
ax.yaxis.set_ticks_position('left')
ax.set_yticks([a])
ax.set_yticklabels([r"$\sigma_{\parallel}$"],
                    fontsize=20, color='red')
#
plt.annotate(r"$ \sigma_{H}$", xy=(3, .32),
            fontsize=20, color='green' )
plt.annotate(r"$ \sigma_{\bot}$", xy=(.7, .7),

```

```
        fontsize=20, color='blue' )  
#  
plt.savefig('Conductivity.pdf')  
plt.show()
```

A.2 Script - Figura 11

```
#coding: utf-8  
import console  
import numpy as np  
import matplotlib.pyplot as plt  
console.clear()  
#  
#  
eta = np.arange(0.01, 70, 0.001)  
leg=[]  
b = 1.42 # raio dos discos (eletrodos)  
d = 0.5 # distancia entre os discos  
cl = 2.9979*(10**10) # Velocidade da luz  
wp = 10**9  
M = (np.pi*eta*wp*b**2)/d  
F = ((wp*b*eta)**2)/(8*cl**2)  
G = ((eta**2 - 1)/eta**2 )**2  
H = ((eta**2 - 1)/eta**2)  
Gxi = M*(F*G - H)  
plt.plot(eta, Gxi)  
  
plt.xlabel(r"$ \xi $", fontsize=20)  
plt.ylabel (r"$ g(\xi) [cm/s]$", fontsize=20)  
texto = r"$g(\xi)$"  
leg.append(texto)  
plt.legend(leg, loc=1, fontsize=20)  
  
plt.annotate(r"$ \xi = 1 $", xy=(1, 0),  
            xycoords='data',  
            xytext=(60, 60), fontsize=18,  
            textcoords='offset points',  
            ha="left", va="bottom",  
            arrowprops=dict(arrowstyle="->", linewidth=0.5,
```

```

        connectionstyle="arc3,rad=-0.1"),
    )
plt.annotate(
    r"$\xi = \left(\frac{8c^2}{\omega_{pe}^2 b^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$",
    xy=(59.71, 0), xycoords='data',
    xytext=(-60, 60), fontsize=18,
    textcoords='offset points',
    arrowprops=dict(arrowstyle="->",
                    linewidth=0.5,
                    connectionstyle="arc3, rad=-0.1"),
    )
l = plt.axhline(y=0, linewidth=0.5,
               color='r', linestyle='--')
l = plt.axvline(x = 59.71, ymax=0.22,
               linewidth=0.5, linestyle='--',
               color= 'black')
l = plt.axvline(x = 1, ymax=0.22, linewidth=0.5,
               linestyle='--', color= 'black')
plt.savefig('G(xi).pdf')
plt.show()

```

A.3 Script - Figura 12

```

#coding: utf-8
import console
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import rc
console.clear()
#
#
#
#
eta = np.arange(0.00015, 0.001, 0.000005)
leg=[]
b = 1.42 # raio dos discos (eletrodos)
d = 0.5 # distancia entre os discos
cl = 2.9979*(10**10) # Velocidade da luz

```

```
wp = 10**9
M = (np.pi*eta*wp*b**2)/d
F = ((wp*b*eta)**2)/(8*c1**2)
G = ((eta**2 - 1)/eta**2)**2
H = ((eta**2 - 1)/eta**2)
Gxi = M*(F*G - H)
plt.plot(eta, Gxi)
plt.xlabel(r"$ \xi $", fontsize=20)
plt.ylabel (r"$ g(\xi) [cm/s]$", fontsize=20)
texto = r"$g(\xi)$"
leg.append(texto)
plt.legend(leg, loc=1, fontsize=20)
plt.savefig('G(xi=0).pdf')
plt.show()
```

A.4 Script - Figura 14

```
#coding: utf-8

import console
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from pylab import*
console.clear()
#
#
#
#
#
eta = np.arange(0, 2, 0.01)
#
b = 1.42 # raio dos discos (eletrodos)
d = 0.5 # distancia entre os discos
c1 = 2.9979*(10**10) # Velocidade da luz
leg = []
a = 9
while a <=9:
wp = 10**a
Xc = (4*d)/(eta*wp*b**2)
```

```
F = (1/8)*((wp*b*eta**2)/(cl**2))
G = (1 - 1/eta**2)**2
H = -1 + 1/eta**2
X = Xc*(1/(F*G + H))
texto = '$\omega_{pe} \simeq 10^{\%d}Hz$' %a
leg.append(texto)
plt.plot(eta, X,)
plt.legend(leg, loc=1, fontsize=20)
a = a + 1
l = plt.axvline(x=1, linewidth=0.5,
               linestyle='--', color='black')
l = plt.axhline(y=0, linewidth=0.5,
               linestyle='--', color='black')
plt.xlabel('$ \omega/\omega_{pe}$', fontsize=20)
plt.ylabel ('$ \chi_p [s/cm]$', fontsize=20)

plt.savefig('ReactancedeplasmaRF.pdf')
plt.show()
```