UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

SAMUEL MACEDO DA SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS: uma abordagem matricial

Boa Vista, RR

2017

SAMUEL MACEDO DA SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS: uma abordagem matricial

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira

Boa Vista, RR

2017

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

S586n Silva, Samuel Macedo da.
Números complexos: uma abordagem matricial / Samuel Macedo da Silva. – Boa Vista, 2017.
72 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 – Números complexos. 2 – Matrizes. 3 – Forma matricial dos números complexos. I – Título. II – Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU – 514.116

SAMUEL MACEDO DA SILVA

NÚMEROS COMPLEXOS: uma abordagem matricial

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Defendida em 27 de abril de 2017 e avaliada pela seguinte banca examinadora.

Prof. Dr. Joselito de Oliveira
Orientador

Prof. Dr. Ulisses Lima Parente
UECE

Prof. Dr. Elzimar de Oliveira Rufino
UFRR

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pela vida, e por ter me dado saúde e força nos momentos de dificuldade.

A minha mãe , Welima Macedo da Silva, mulher guerreira, que fez tudo o que estava ao seu alcance para que hoje, eu pudesse estar aqui, dando amor, carinho e educação. A ela devo tudo o que me tornei hoje.

Ao Prof. Dr. Joselito de Oliveira, meu orientador, por me apoiar e sempre motivar os estudos.

Aos demais professores presenciais do PROFMAT Alberto Martin Martinez Castañeda, Lindeval Fernandes de Lima, Raimundo Nonato Araujo Pedro, Gilson Costa de Souza e Patrício Antonio Perez Flores.

E a todos que contribuiram de alguma forma para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

A presente dissertação tem por objetivo apresentar uma maneira diferenciada de trabalhar os números complexos no Ensino Médio, que se dá através de pares ordenados ou forma algébrica. Usa-se, para tanto, conhecimentos básicos da álgebra das matrizes. Apresenta-se aqui a forma matricial dos números complexos e demonstra-se suas propriedades básicas, comparando-as com aquelas presentes na literatura matemática. Destaca-se a representação matricial da famosa equação de Euler. Por fim, apresenta-se uma proposta de atividade, baseada na resolução de problemas, para ser desenvolvida por professores e alunos do Ensino Médio.

Palavras-chave: Números complexos. Matrizes. Forma Matricial dos números Complexos.

ABSTRACT

The present dissertation aims to present a different way of working the complex numbers in Basic Education, that occurs through ordered pairs or algebraic form. We use basic knowledge of matrix algebra. Here we present the matrix form of the complex numbers and demonstrate their basic properties, comparing them with those present in the mathematical literature. It stands out the matrix representation of the famous equation of Euler. Finally, a proposal of activity, based on problem solving, is presented to be developed by teachers and students of Basic Education.

Key-words: Complex numbers. Matrices. Matrix form of complex numbers.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1	Representação geométrica de z	17
2	Representação geométrica de $\overline{z}$	18
3	Representação geométrica de $|z|$	20
4	Forma trigonométrica de z	23
5	Circunferência centrada na origem de raio r	38
6	Representação geométrica de θ.	54

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	**9**
1	**PRELIMINARES**	**10**
1.1	NÚMEROS COMPLEXOS	10
1.1.1	**CONHECENDO UM POUCO DA HISTÓRIA**	**10**
1.1.2	**A DEFINIÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO E SUAS PROPRIEDADES**	**10**
1.2	FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	14
1.3	PLANO DE ARGAND-GAUSS	17
1.4	CONJUGADO	18
1.5	USO DO CONJUGADO NA DIVISÃO	20
1.6	MÓDULO	20
1.7	FORMA POLAR OU TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS	23
1.8	FÓRMULA DE EULER	23
1.9	TEORIA DE MATRIZES	24
1.9.1	**DEFINIÇÃO DE MATRIZES**	**24**
1.9.1.1	TIPOS DE MATRIZES	25
1.9.2	**OPERAÇÕES COM MATRIZES**	**26**
2	**ABORDAGEM MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS**	**37**
2.1	ABORDAGEM MATRICIAL	37
2.2	CONJUGADO MATRICIAL	48
2.3	NORMA MATRICIAL	50
2.4	FORMA POLAR MATRICIAL	54
2.5	A EQUAÇÂO DE EULER NA FORMA MATRICIAL	56
2.6	TABELA COMPARATIVA ENTRE OS COMPLEXOS USUAIS E OS COMPLEXOS MATRICIAIS	61
3	**CONSIDERAÇÕES FINAIS**	**62**
	REFERÊNCIAS	**63**
	APÊNDICE A ESPAÇOS VETORIAIS DAS MATRIZES	**64**
A.1	Espaço Vetorial	64
A.2	Produto Interno	66
A.3	Norma	69
	APÊNDICE B ATIVIDADE PRÁTICA	**71**

INTRODUÇÃO

A matemática é uma das áreas de maior importância para a humanidade, pois serve de ferramente para o estudo de diversas ciências, tais como física, química, engenharia, etc. Também é de grande utilidade no dia a dia dos indivíduos, pois sem a mesma, muitas das atividades diárias, como ir ao mercado, passar um troco, até mesmo fazer aquela receita de bolo, não poderiam ser realizadas.

De acordo com MEC (2000), a matemática ocupa posição singular como linguagem devido sua universalidade de qualificação e expressão, e é instrumento de de grande importância paras as disciplinas do ensino médio, como física, química e biologia, por exemplo, pois é nesse momento que, nas ciências, se torna necessário uma construção abstrata mais elaborada.

Segundo Churchill (1975), a influência da teoria das funções de variável complexa pode ser notada em quase todos os ramos da matemática. Além de ser proeminente na matemática pura e de posssuir uma estrutura lógica elegante, a teoria representa um dos instrumentos mais poderosos dos matemáticos aplicados, engenheiros e físicos.

Para Hefez e Fernandez (2012), as matrizes são ferramentas básicas da álgebra linear, pois através delas resolvemos sistemas de equações lineares e representamos tranformações lineares entre espaços vetoriais. Aqui temos mais um motivo pelo qual a teoria das matrizes se faz importante, pois essa teoria nos servirá de ferramenta primordial para a introdução da teoria dos números complexos.

Portanto, na presente dissertação, temos como objetivo realizar uma abordagem sobre os números complexos e suas propriedades via teoria das matrizes.

Para facilitar o entendimento, o presente trabalho foi dividido em dois capítulos, sendo o primeiro dedicado a tratar sobre os números complexos, na forma tradicional, visto nas escolas da rede estadual pública,e suas principais propriedades. Será tratado também sobre as matrizes e suas propriedades.

No capítulo dois, faremos uma abordagem matricial dos números complexos, mostrando assim, uma nova maneira de definir os números complexos, ultilizando matrizes quadradas de ordem dois. Poisteriormente, demonstraremos as propriedades já conhecidas dos números complexos utilizando a forma matricial.

1 PRELIMINARES

Neste capítulo será apresentado a definição e as propriedades dos números complexos, e também a teoria de matrizes.

1.1 NÚMEROS COMPLEXOS

1.1.1 CONHECENDO UM POUCO DA HISTÓRIA

Os números complexos surgiram no séc. XVI, com o objetivo de solucionar equações polinomias. Estes, por muito tempo foram tidos como números que existiam apenas na nossa imaginação, daí o motivo de chamarmos o número complexo $i = \sqrt{-1}$ de "algarísmo imaginário". O primeiro passo para formalizar o conceito de um número complexo foi a representação geométrica desses números como pontos no plano, e o primeiro matemático a ter uma visão clara de tal representação foi o alemão Carl Friedriich Gauss, em 1797. O corpo dos números complexos $\mathbb{C}$ foi finalmente definido pelo irlandês William Rowan Hamilton, em 1837. Veja em (FERNANDES; BERNARDEZ, 2008).

1.1.2 A DEFINIÇÃO DE NÚMERO COMPLEXO E SUAS PROPRIEDADES

Nesta seção estudaremos os números complexos por meio de pares ordenados, forma ensinada tradicionalmente no ensino médio, bem como suas propriedades.

Definição 1.1.1. *O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é o conjunto dos pares ordenados $z = (a, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}$, em que são definidas as operações de soma e de produto da seguinte forma: Dados $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ então:*

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

ii) $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2)$

De acordo com esta definição, temos a seguinte proposição:

Proposição 1.1.1. *A soma e o produto têm as seguintes propriedades:*

1 Propriedades da soma

S1 Associatividade

Para todo $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{C}$ vale

$$[(a, b) + (c, d)] + (e, f) = (a, b) + [(c, d) + (e, f)]$$

S2 Comutatividade

Para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ *vale*

$$(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$$

S3 Elemento neutro

O elemento neutro aditivo é o par ordenado $(0,0)$*, isto é,*

$$(a,b)+(0,0)=(a,b)$$

para todo $(a,b) \in \mathbb{C}$.

S4 Inverso aditivo

Para cada elemento $(a,b) \in \mathbb{C}$*, o simétrico aditivo é o par ordenado* $(-a,-b)$ *que satisfaz*

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$$

2 Propriedades do produto

P1 Associatividade

Para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ *vale*

$$[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$$

P2 Comutatividade

Para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$ *vale*

$$(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$$

P3 Distributividade do produto em relação à soma (à esquerda e à direita)

Para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{C}$ *vale*

$$(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$$

e

$$[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)$$

P4 Elemento neutro

O elemento neutro do produto é o par ordenado $(1,0)$ *tal que*

$$(a,b)\cdot(1,0)=(a,b)$$

P5 Inverso multiplicativo

Para todo $(a, b) \in \mathbb{C}$ não nulo o inverso multiplicativo é o par ordenado

$$\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \quad \textit{tal que} \quad (a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

Demonstração. De fato, temos:

S2 *Associatividade*

$$\begin{aligned}[(a,b)+(c,d)]+(e,f) &= (a+c,b+d)+(e,f)\\ &= [(a+c)+e,(b+d)+f]\\ &= [a+(c+e),b+(d+f)]\\ &= (a,b)+(c+e,d+f)\\ &= (a,b)+[(c,d)+(e,f)]\end{aligned}$$

S2 *Comutatividade*

$$\begin{aligned}(a,b)+(c,d) &= (a+c,b+d)\\ &= (c+a,d+b)\\ &= (c,d)+(a,d)\end{aligned}$$

S3 *Elemento neutro*

$(0,0)$ é o elemento neutro. De fato,

$$\begin{aligned}(a,b)+(0,0) &= (a+0,b+0)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

S4 *Inverso aditivo*

$-(a,b) = (-a,-b)$ é o inverso aditivo. De fato,

$$\begin{aligned}(a,b)+(-a,-b) &= (a+(-a),b-(-b))\\ &= (0,0)\end{aligned}$$

P1 *Associatividade*

$$\begin{aligned}
[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f) &= (ac-bd, ad+bc)\cdot(e,f)\\
&= [(ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e]\\
&= [ace-bde-adf-bcf, acf-bdf+ade+bce]\\
&= [a(ce-df)-b(de+cf), a(de+cf)+b(ce-df)]\\
&= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de)\\
&= (a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]
\end{aligned}$$

P2 *Comutatividade*

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot(c,d) &= (ac-bd, ad+bc)\\
&= (ca-db, cb+da)\\
&= (c,d)\cdot(a,b)
\end{aligned}$$

P3 *Distributividade do produto em relação à soma (à esquerda e à direita)*

a) Distributividade à esquerda

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)] &= (a,b)\cdot(c+e, d+f)\\
&= [a(c+e)-b(d+f), a(d+f)+b(c+e)]\\
&= [ac+ae-bd-bf, ad+af+bc+be]\\
&= [(ac-bd)+(ae-bf), (ad+bc)+(af+be)]\\
&= (ac-bd, ad+bc)+(ae-bf, af+be)\\
&= (a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)
\end{aligned}$$

b) Distributividade à direita

$$\begin{aligned}
[(a,b)+(c,d)]\cdot(e,f) &= (a+c, b+d)\cdot(e,f)\\
&= [(a+c)e-(b+d)f, (a+c)f+(b+d)e]\\
&= [ae+ce-bd-df, af+cf+be+de]\\
&= [(ae-bf)+(ce-df), (af+be)+(cf+de)]\\
&= (ae-bf, af+be)+(ce-df, cf+de)\\
&= (a,b)\cdot(e,f)+(c,d)\cdot(e,f)
\end{aligned}$$

P4 *Elemento neutro*

$(1,0)$ é o elemento neutro. De fato,

$$\begin{aligned}
(a,b)\cdot(1,0) &= (a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1)\\
&= (a,b)
\end{aligned}$$

P5 *Inverso multiplicativo*

Dado $z = (a, b)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, mostremos que existe $z^{-1} = (x, y)$ tal que $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$. De fato:

$$(a, b) \cdot (x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases}$$

Assim,

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad e \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Portanto, $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right)$ é o inverso multiplicativo.

□

Observação 1.1.1. *Dados* $z_1 = (a, b), z_2 = (c, d) \in \mathbb{C}$ *com* $z_2 \neq (0, 0)$*, a divisão de* z_1 *por* z_2 *é dada por* $\dfrac{z_1}{z_2} = \left(\dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \dfrac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} \right)$.

1.2 FORMA ALGÉBRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Primeiramente, considerando o conjunto $A = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, temos a seguinte proposição, que pode ser encontrada em (NASCIMENTO, 2015, p.45).

Proposição 1.2.1. *A função* $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ *definida por* $\phi(x) = (x, 0)$ *é:*

i. *Bijetiva;*

ii. $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$*, para todo* $a,\ b \in \mathbb{R}$*;*

iii. $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$*, para todo* $a,\ b \in \mathbb{R}$*.*

Demonstração. Para provar **i**, vamos mostrar que ϕ é sobrejetiva e injetiva.

1. todo par $(x, 0) \in A$ é o correspondente, segundo ϕ, de $x \in \mathbb{R}$, ou seja, ϕ é sobrejetiva;

2. dados $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, os seus correspondentes $(x, 0) \in A$ e $(y, 0) \in A$ são distintos, de acordo com a definição de igualdade de pares ordenados (ou seja, ϕ é injetiva).

Prova de **ii**

$$\begin{aligned}\phi(a+b) &= (a+b,0)\\ &= (a,0)+(b,0)\\ &= \phi(a)+\phi(b)\end{aligned}$$

Prova de **iii**

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= (ab,0)\\ &= (a\cdot b-0\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 0)\\ &= (a,0)\cdot(b,0)\\ &= \phi(a)\cdot\phi(b)\end{aligned}$$

□

Devido ao fato da aplicação $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow A$ ser bijetiva, que conserva as operações de adição e multiplicação, concluímos que os números complexos da forma $(a, 0)$ se comportam exatamente da mesma maneira que os números reais em relação à soma e ao produto. Assim, identificamos o número real a, com o par ordenado $a = (a, 0)$. Dessa forma, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é visto como um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$.

Agora, o número complexo $(0, 1)$ é chamado de ***unidade imaginária*** e é representado por i. Notemos que:

$$i^2 = i\cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (0\cdot 0-1\cdot 1, 0\cdot 1+1\cdot 0) = (-1,0) = -(1,0) = -1$$

Portanto,

$$i^2 = -1.$$

Observação 1.2.1 (Potências de i)**.** *Seja i a unidade imaginária, então temos as potências de i:*

$$\begin{array}{lllll} i^0=1 & i^4=1 & i^8=1 & i^{12}=1 & \\ i^1=i & i^5=i & i^9=i & i^{13}=i & \vdots \\ i^2=-1 & i^6=-1 & i^{10}=-1 & i^{14}=-1 & \vdots \\ i^3=-i & i^7=-i & i^{11}=-i & i^{15}=-i & \end{array} \tag{1.1}$$

Note que, as potências de i vão em ciclos, $1, i, -1$ e $-i$. Assim, dado $n \in \mathbb{N}$, existe uma maneira prática para determinar i^n. De fato, como $n \in \mathbb{N}$, existem $q, r \in \mathbb{N}$ tal que $n = 4q + r$, ou seja, divisão de n por 4. Assim, temos:

$$\begin{aligned} i^n &= i^{4q+r} \\ &= i^{4q} \cdot i^r \\ &= (i^4)^q \cdot i^r \\ &= 1 \cdot i^r \\ &= i^r \end{aligned}$$

Portanto, $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

Vamos obter agora a forma algébrica dos números complexos. Assim, dado um número complexo qualquer $z = (a, b)$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, temos:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1),$$

ou seja,

$$z = a + bi.$$

Logo, o par (a, b) e a expressão $a + bi$ representam o mesmo número complexo. O número real a é chamado parte real de z e o número real b é chamado parte imaginária de z. Em símbolos indica-se por: $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.

Observação 1.2.2. *Todo número complexo cuja parte imaginária é nula, denomina-se **real**. E todo número complexo cuja parte real é nula e a imaginária não, é chamado de **imaginário puro**.*

Em resumo, o número complexo $z = a+bi$ herda as caracteríscas e propriedades do par ordenado (a, b), assim sendo, o conjunto $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$ munido das operações soma e produto, definidas da seguinte forma: dados $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, temos:

i) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

ii) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$

é um corpo, visto que satisfaz as seguintes propriedades: para todo $z = a+bi$, $w = c+di$ e $t = e + fi$, temos:

1. Propriedades da soma:

S1 Associatividade

$$[(a + bi) + (c + di)] + (e + fi) = (a + bi) + [(c + di) + (e + fi)]$$

S2 Comutatividade

$$(a + bi) + (c + di) = (c + di) + (a + bi)$$

S3 Elemento neutro

$$(a+bi)+(0+0i)=a+bi$$

S4 Inverso aditivo

$$(a+bi)+(-a-bi)=0+0i=0$$

2. Propriedades do produto:

P1 Associatividade

$$[(a+bi)(c+di)]\,(e+fi)=(a+bi)\,[(c+di)(e+fi)]$$

P2 Comutatividade

$$(a+bi)(c+di)=(c+di)(a+bi)$$

P3 Distributividade do produto em relação à soma (à direita e à esquerda)

$$(a+bi)\,[(c+di)+(e+fi)]=(a+bi)(c+di)+(a+bi)(e+fi)$$

$$[(a+bi)+(c+di)]\,(e+fi)=(a+bi)(e+fi)+(c+di)(e+fi)$$

P4 Elemento neutro

$$(a+bi)(1+0i)=a+bi$$

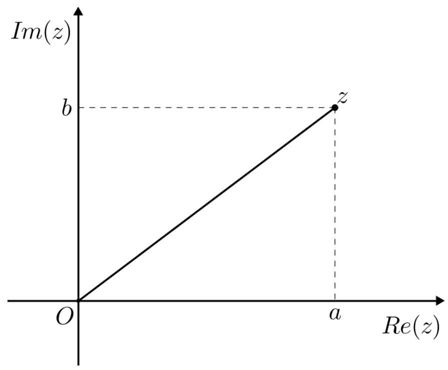
P5 Inverso multiplicativo

$$(a+bi)\left(\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i\right)=1+0i=1$$

1.3 PLANO DE ARGAND-GAUSS

Representando o número complexo $z=a+bi$ geometricamente, temos:

Figura 1 – Representação geométrica de z



Fonte: (NASCIMENTO, 2015)

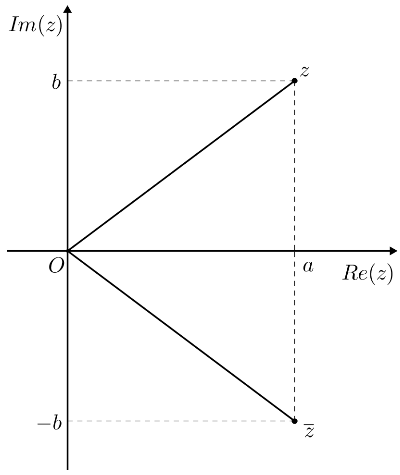
O plano formado pelos dois eixos é chamado de Plano de *Argand-Gauss*, onde o eixo horizontal é chamado de *real* e o vertical de *imaginário*. Esta representação geométrica de z pode ser visto em NETO (2005, p. 4).

1.4 CONJUGADO

Definição 1.4.1. *Dado o número complexo $z = a + bi$, o conjugado de z é o número complexo $\overline{z} = a - bi$.*

Observe que, geometricamente, $\overline{z}$ significa a reflexão do eixo horizontal (Veja figura 2).

Figura 2 – Representação geométrica de $\overline{z}$



Fonte: (NASCIMENTO, 2015)

Teorema 1.4.1. *Se $z \in \mathbb{C}$, então:*

1. $z + \overline{z} = 2 \cdot Re(z)$;
2. $z - \overline{z} = 2 \cdot Im(z) \cdot i$;
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$;
4. $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$.

Demonstração. Seja $z = a + bi$, então:

1. $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \cdot Re(z)$;
2. $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2 \cdot Im(z) \cdot i$;
3. $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
4. $z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$.

□

Teorema 1.4.2. *Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então:*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$;
2. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
3. $Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = Re(\overline{z_1} \cdot z_2)$ e $Im(z_1 \cdot \overline{z_2}) = -Im(\overline{z_1} \cdot z_2)$

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos que:

1. A soma $z_1 + z_2$ é dada por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + bi) + (c + di) \\ &= (a + c) + (b + d)i \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}. \end{aligned}$$

2. O produto $z_1 \cdot z_2$ é dado por:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi)(c + di) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \end{aligned}$$

Assim sendo, temos:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 \cdot z_2} &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (ac - adi) + (-cbi + bdi^2) \\ &= a(c - di) - bi(c - di) \\ &= (a - bi)(c - di) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \end{aligned}$$

3. Como $\overline{z_1} = a_1 - b_1 i$ e $\overline{z_2} = a_2 - b_2 i$, temos:

$$z_1 \cdot \overline{z_2} = (a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 b_2 - (a_1 b_2 - a_2 b_1)i$$

$$\overline{z_1} \cdot z_2 = (a_1 - b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 b_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)i$$

Assim, observamos facilmente que:

$$Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = Re(\overline{z_1} \cdot z_2) \quad \text{e} \quad Im(z_1 \cdot \overline{z_2}) = -Im(\overline{z_1} \cdot z_2)$$

$\square$

1.5 USO DO CONJUGADO NA DIVISÃO

Definição 1.5.1. *Dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, com $z_2 \neq 0$, a divisão de z_1 por z_2 é dada por:*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i.$$

Observação 1.5.1. *Para determinar $\frac{z_1}{z_2}$ basta multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador.*

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} \\ &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i. \end{aligned}$$

1.6 MÓDULO

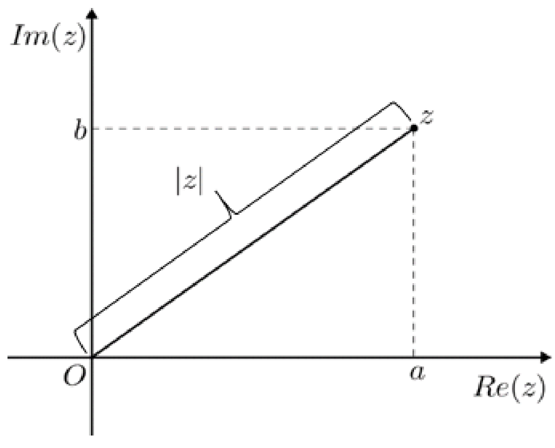
Definição 1.6.1. *Dado um número complexo $z = a + bi$, chama-se **módulo** de z ao número real não negativo*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Podemos também denotar por ρ ou r o módulo de z, ao invés de $|z|$.

Observe que, geometricamente, $|z|$ significa a distância usual da origem até o ponto (a, b) do plano, que é representado pelo número complexo $z = a + bi$ (Veja a figura 1).

Figura 3 – Representação geométrica de $|z|$



Fonte: (NASCIMENTO, 2015)

No que se segue, serão apresentadas algumas propriedades de módulo.

Teorema 1.6.1. *Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos:*

1. $|z| \geqslant 0$;
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
3. $|z| = |\overline{z}|$;
4. $Re(z) \leqslant |Re(z)| \leqslant |z|$;
5. $Im(z) \leqslant |Im(z)| \leqslant |z|$;
6. $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Demonstração. Fazendo $z = a + bi$, temos:

1. $a^2 \geqslant 0$ e $b^2 \geqslant 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \geqslant 0 \Rightarrow |z| \geqslant 0$;
2. $|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$;
3. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$;
4. $a \geqslant 0 \Rightarrow a = |a|$ e $a < 0 \Rightarrow a < |a|$, logo, $a \leqslant |a|$.
   $a^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leqslant |z|$.
   Portanto, como $a \leqslant |a|$ e $|a| \leqslant |z|$, segue que:
   $$a \leqslant |a| \leqslant |z|;$$
5. $b \geqslant 0 \Rightarrow b = |b|$ e $b < 0 \Rightarrow b < |b|$, logo, $b \leqslant |b|$.
   $b^2 \leqslant a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{b^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |b| \leqslant |z|$.
   Portanto, como $b \leqslant |b|$ e $|b| \leqslant |z|$, segue que:
   $$b \leqslant |b| \leqslant |z|.$$
6. Segue da própria definicão de módulo e do teorema 1.4.1 ítem 4. □

Teorema 1.6.2. *Se z_1 e z_2 são números complexos quaisquer, então:*

1. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$;
3. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ *(Desigualdade triangular)*;
4. $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$.

Demonstração. Dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos:

1. Como $z\overline{z} = |z|^2$ e $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, segue-se que $|z_1 \cdot z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_z|^2$, logo:
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

2. Notemos inicialmente que, para $z_2 \neq 0$:
$$\left|\frac{1}{z_2}\right| = \left|\frac{1}{c+di}\right| = \left|\frac{c-di}{(c+di)(c-di)}\right| = \left|\frac{c-di}{c^2+d^2}\right| = \left|\frac{\sqrt{c^2+d^2}}{c^2+d^2}\right| = \frac{1}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{1}{|z_2|}$$
Temos, então:
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \left|\frac{1}{z_2}\right| = |z_1| \cdot \frac{1}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3. De fato,
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2. \end{aligned}$$
e como
$$|z_1|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1 + z_2|^2)$$
então,
$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

4. Temos que
$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 - 2Re(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \\ &\geq |z_1|^2 - 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 - 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 \\ &= (|z_1| - |z_2|)^2, \end{aligned}$$
Portanto,
$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &\geq (|z_1| - |z_2|)^2 \\ |z_1 - z_2)| &\geq ||z_1| - |z_2||. \end{aligned}$$
□

Observação 1.6.1. *Note que* $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ *e* $|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - z_2||$.

$$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$$

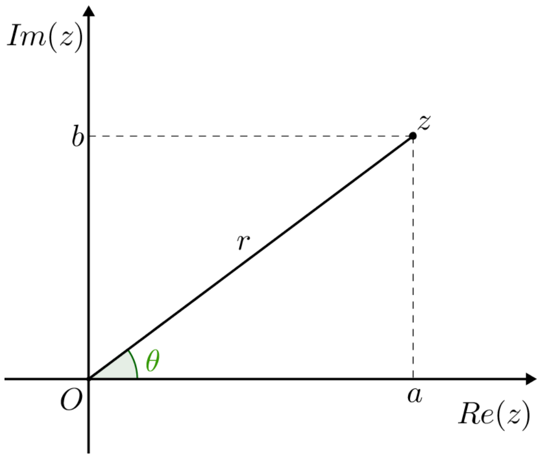
e

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - (-z_2)| \geq ||z_1| - |-z_2|| = ||z_1| - |z_2||.$$

1.7 FORMA POLAR OU TRIGONOMÉTRICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Sejam $z = a + bi$ e $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Assim, podemos representar z no plano através do ponto $P(a, b)$. Seja θ o ângulo formado com o eixo real positivo e o segmento OP no sentido anti-horário, onde O é a origem do sistema, como mostra a figura abaixo.

Figura 4 – Forma trigonométrica de z



Fonte: Autor

Então $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ e $sen\,\theta = \dfrac{b}{r}$. Daí $a = r\cos\theta$ e $b = rsen\,\theta$.

Portanto,

$$z = r\cos\theta + irsen\,\theta.$$

que é a forma polar dos número complexos.

1.8 FÓRMULA DE EULER

Nosso objetivo aqui é definir a exponencial no caso de expoente puramente imaginário, ou seja, definir e^{yi}. Para isso vamos recorrer às séries de Taylor das funções e^x, $sen\,x$ e $\cos x$. Veja (AVILA, 2013) e (FERNANDES; BERNARDEZ, 2008).

$$sen\,x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{1.2}$$

$$cos\,x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{1.3}$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{1.4}$$

Fazendo $x = iy$ e substituindo em 1.4, temos que:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \frac{(iy)^6}{6!} + \frac{(iy)^7}{7!} + \cdots \\ &= 1 + i \cdot \frac{y}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i \cdot \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \cdot \frac{y^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - i \cdot \frac{y^7}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

Agora, reorganizando a equação acima, temos:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i \cdot \left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right). \tag{1.5}$$

Logo, de 1.2, 1.3 e 1.5 temos que:

$$e^{iy} = cos\, y + i \cdot sen\, y, \forall y \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

A igualdade 1.6 é denominada fórmula de Euler.

1.9 TEORIA DE MATRIZES

Esta seção será dedicada à teoria de matrizes, que possibilitará o desenvolvimento do capítulo II. Veja (HEFEZ; FERNANDEZ, 2012) e (LIPSCHUTS; LIPSON, 2011).

1.9.1 DEFINIÇÃO DE MATRIZES

Segundo Hefez e Fernandez (2012) as matrizes são as ferramentas básicas da Álgebra Linear, pois elas são utilizadas na resolução de sistemas de equações lineares, e também representam as transformações lineares entre espaços vetoriais.

Definição 1.9.1. *Dados m e n em $\mathbb{N}$, uma matriz real de ordem $m \times n$ é uma tabela $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, onde m representa o números de linhas, n o de colunas e a_{ij} representa as entradas da matriz, onde m, n e a_{ij} representam os números de linhas, colunas e elementos internos da matriz, respectivamente.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Usaremos o símbolo $\mathcal{M}(m, n)$ para denotar o conjunto de matrizes $m \times n$.

1.9.1.1 TIPOS DE MATRIZES

i) Matriz linha: Toda matriz do tipo $1 \times n$;

ii) Matriz coluna: Toda matriz do tipo $m \times 1$;

ii) Matriz quadrada: Toda matriz do tipo $n \times n$;

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz quadrada de ordem n, as entradas a_{ii}, com $1 \leqslant i \leqslant n$, formam a diagonal principal.

iii) Matriz diagonal de ordem n: é uma matriz quadrada em que todos os elementos não pertencentes à diagonal principal são iguais a zero;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

iv) Matriz identidade de ordem n: é uma matriz diagonal em que as entradas da diagonal principal são iguais ao número 1;

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

v) Matriz triangular superior de ordem n: matriz quadrada em que todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vi) Matriz triangular inferior de ordem n: matriz quadrada em que todos os elementos a cima da diagonal principal são iguais a zero;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vii) Matriz nula: matriz em que todas as entradas são iguais a zero.

1.9.2 OPERAÇÕES COM MATRIZES

Esta seção será dedicada às operações com matrizes, que serão fundamentais para a continuidade desta dissertação.

Definição 1.9.2 (igualdade de matrizes)**.** *Duas matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{m\times n}$*, de mesma ordem, são iguais, quando* $a_{ij} = b_{ij}$ *para todo* i, j *com* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq n$*, escrevemos* $A = B$*.*

Exemplo 1.9.1. *Se* x *e* y *são números reais, e as matrizes* $\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *são iguais, então* $x = -1$ *e* $y = 2$*.*

Definição 1.9.3 (adição de matrizes)**.** *Se* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$ *são duas matrizes de mesma ordem* $m \times n$*, a soma de* A *e* B*, denotada por* $A + B$*, é a matriz* $C = [c_{ij}]$*, também de ordem* $m \times n$ *tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para todo* i, j *com* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq n$*.*

Ou seja,

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Observação 1.9.1. *Dada uma matriz* $A = [a_{ij}]$*, define-se a matriz oposta de* A*, como a matriz* $-A = [-a_{ij}]$*.*

Proposição 1.9.1. *Se* A*,* B *e* C *são matrizes de mesma ordem, então vale as seguintes propriedades com relação a adição:*

(i) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(associatividade da adição);*

(ii) $A + B = B + A$ *(comutatividade da adição);*

(iii) $A + 0 = 0 + A$*, onde* 0 *é a matriz nula (elemento neutro);*

(iv) $A + (-A) = 0$*.*

Demonstração. Dado as matrizes $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ e $C = [c_{ij}]$, temos:

(i)

$$\begin{aligned} A + (B + C) &= [a_{ij}] + [b_{ij} + c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})] \\ &= [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}] \\ &= [a_{ij} + b_{ij}] + [c_{ij}] \\ &= (A + B) + C \end{aligned}$$

Onde usamos a associatividade dos números reais.

(ii)

$$\begin{aligned} A+B &= [a_{ij}]+[b_{ij}] \\ &= [a_{ij}+b_{ij}] \\ &= [b_{ij}+a_{ij}] \\ &= [b_{ij}]+[a_{ij}] \\ &= B+A \end{aligned}$$

Onde usamos a comutatividade dos números reais.

(iii)

$$\begin{aligned} A+0 &= [a_{ij}]+[0_{ij}] \\ &= [a_{ij}+0_{ij}] \\ &= [a_{ij}] \\ &= A \end{aligned}$$

Onde usamos o elemento neutro dos números reais.

(iv)

$$\begin{aligned} A+(-A) &= [a_{ij}]+[-a_{ij}] \\ &= [a_{ij}+(-a_{ij})] \\ &= [0_{ij}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Onde usamos o oposto aditivo dos números reais.

□

Definição 1.9.4 (produto de uma matriz por um escalar)**.** *Dada uma matriz* $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ *e um número real* a*, definimos o produto por escalar, como* $aA=[aa_{ij}]_{m\times n}$.

Exemplo 1.9.2. *Por exemplo,*

$$-3\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ -3 & -3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Proposição 1.9.2. *Sejam* A *e* B *matrizes de mesma ordem,* a *e* a' *números reais, as seguintes propriedades se verificam:*

(i) $a(A+B)=aA+aB$;

(ii) $(a+a')A=aA+a'A$;

(iii) $a(a'A)=(aa')A$;

(iv) $1A=A$.

Demonstração. Dado as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, e os números reais a, a':

(i)
$$\begin{aligned} a(A+B) &= a\,[a_{ij}+b_{ij}] \\ &= [a(a_{ij}+b_{ij})] \\ &= [aa_{ij}+ab_{ij}] \\ &= [aa_{ij}]+[ab_{ij}] \\ &= a\,[a_{ij}]+a\,[b_{ij}] \\ &= aA+aB \end{aligned}$$

Onde usamos a distributividade do produto em relação a soma dos números reais.

(ii)
$$\begin{aligned} (a+a')A &= (a+a')\,[a_{ij}] \\ &= [(a+a')a_{ij}] \\ &= [aa_{ij}+a'a_{ij}] \\ &= [aa_{ij}]+[a'a_{ij}] \\ &= a\,[a_{ij}]+a'\,[a_{ij}] \\ &= aA+a'A \end{aligned}$$

Onde usamos a distributividade da soma em relação ao produto dos números reais.

(iii)
$$\begin{aligned} a(a'A) &= a(a'\,[a_{ij}]) \\ &= a\,[a'a_{ij}] \\ &= [aa'a_{ij}] \\ &= [(aa')a_{ij}] \\ &= (aa')\,[a_{ij}] \\ &= (aa')A \end{aligned}$$

Onde usamos a comutatividade do produto dos números reais.

(iv)
$$\begin{aligned} 1A &= 1\,[a_{ij}] \\ &= [1a_{ij}] \\ &= [a_{ij}] \\ &= A \end{aligned}$$

Onde usamos o elemento neutro aditivo dos números reais.

□

Definição 1.9.5 (produto entre matrizes)**.** *Sejam* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ *duas matrizes. O produto* AB *de* A *por* B*, é definido como a matriz* $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ *tal que:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj},$$

para todo i, j *com* $1 \leq i \leq m$ *e* $1 \leq j \leq p$*.*

Observação 1.9.2. *O produto entre matrizes não é comutativo. Por exemplo, sejam as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que $AB \neq BA$*.*

Observação 1.9.3. *Um produto* $AB = 0$ *não implica necessariamente que* $A = 0$ *ou* $B = 0$*. Como exemplo, considere as matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$*.*

Observe que:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = 0.$$

Proposição 1.9.3. *Desde que as operações sejam possíveis, valem as seguintes propriedades:*

(i) $A(B + C) = AB + AC$ *(distributividade à esquerda da multiplicação em relação à adição);*

(ii) $(A + B)C = AC + AB$ *(distributividade à direita da multiplicação em relação à adição);*

(iii) $(AB)C = A(BC)$ *(associatividade);*

(iv) $AI = IA = A$ *(existência do elemento identidade).*

Demonstração. Provemos as propriedades:

(i) Suponhamos $A = [a_{ij}]_{n\times r}$, $B = [b_{ij}]_{r\times s}$ e $C = [c_{ij}]_{r\times s}$, então:

$$\begin{aligned} A(B + C) &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik}\,[b_{kj} + c_{kj}] \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} (a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj} \\ &= AB + AC. \end{aligned}$$

(ii) Seja $A = [a_{ij}]_{n\times r}$, $B = [b_{ij}]_{n\times r}$ e $C = [c_{ij}]_{r\times s}$, então:

$$\begin{aligned}(A+B)C &= \textstyle\sum_{k=1}^{r}(a_{ik}+b_{kj})c_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r}(a_{ik}c_{kj}+b_{ik}c_{kj})\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik}c_{kj}+\sum_{k=1}^{r} b_{ik}c_{kj}\\ &= AC+BC.\end{aligned}$$

(iii) Suponhamos $A = [a_{ij}]_{n\times r}, B = [b_{ij}]_{r\times s}$ e $C = [c_{ij}]_{s\times m}$. Temos que:

$$\begin{aligned}((AB)C)_{ij} &= \textstyle\sum_{k=1}^{s}(AB)_{ik}c_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{l=1}^{r} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj}\\ &= \textstyle\sum_{l=1}^{r} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{s} b_{lk}c_{kj}\right)\\ &= \textstyle\sum_{l=1}^{r} a_{il}(BC)_{lj} = (A(BC))_{ij}.\end{aligned}$$

(iv) Suponhamos que $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e lembremos que $I_n = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$.

Dessa forma temos:

$$\begin{aligned}AI = [p_{ij}] &= \left[\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj}\right]\\ &= [a_{i1}\delta_{1j}+a_{i2}\delta_{2j}+a_{ij}\delta_{jj}+\cdots+a_{in}\delta_{nj}]\\ &= [a_{ij}\delta_{jj}]\\ &= [a_{ij}]\cdot 1\\ &= [a_{ij}]\\ &= 1\cdot[a_{ij}]\\ &= [\delta_{jj}a_{ij}]\\ &= [\delta_{1j}a_{i1}+\delta_{2j}a_{i2}+\delta_{jj}a_{ij}+\cdots+\delta_{nj}a_{in}]\\ &= \left[\textstyle\sum_{k=1}^{n} \delta_{kj}a_{ik}\right]\\ &= [p_{ij}]\\ &= IA\\ &= A.\end{aligned}$$

□

Observação 1.9.4. *Uma vez definido o produto de matrizes, podemos definir a potenciação da maneira usual, isto é, dados A em $\mathcal{M}(n,n)$ e $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$,*

$$A^0 = I_n, \quad A^1 = A \quad \text{e} \quad A^k = \underbrace{A\cdot A\cdots A}_{\text{k fatores}}.$$

Definição 1.9.6 (transposta)**.** *Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, chamamos de transposta de A, e denotamos por A^t, a matriz $[b_{ij}]_{n\times m}$, onde*

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para todo i, j tal que $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

Exemplo 1.9.3.

$$\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.9.7. *Traço de uma matriz quadrada. Dada uma matriz quadrada A, definimos o traço da matriz A, e denotamos por TrA, a soma dos elementos da diagonal principal, a saber,*

$$TrA = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

Proposição 1.9.4. *Dado duas matrizes quadradas $A = [a_{ij}]_n$ e $B = [b_{ij}]_n$ e um número real k, valem as seguintes propriedades:*

T1 $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$;

T2 $Tr(A) = Tr(A^t)$;

T3 $Tr(I_n) = n$;

T4 $Tr(kA) = kTr(A)$;

T5 $Tr(AB) = Tr(BA)$.

Demonstração. Sejam as matrizes quadradas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}, \text{ e o e } k \in \mathbb{R}.$$

T1 Sendo $A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nn}+b_{nn} \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) + \cdots + (a_{nn}+b_{nn}) \\ &= (a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}) + (b_{11}+b_{22}+\cdots+b_{nn}) \\ &= Tr(A) + Tr(B) \end{aligned}$$

T2 Como $A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} Tr(A^t) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= Tr(A) \end{aligned}$$

T3 Sabemos que $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} Tr(I_n) &= a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{n parcelas}} \\ &= n \end{aligned}$$

T4 Como $kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nn} \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} Tr(kA) &= ka_{11} + ka_{22} + \cdots + ka_{nn} \\ &= k(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}) \\ &= kTr(A) \end{aligned}$$

T5 Sejam $AB = c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ e

$BA = d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} = b_{i1}a_{1j} + b_{i2}a_{2j} + \cdots + b_{in}a_{nj}$, então

$$\begin{aligned} Tr(AB) &= \sum_{i=j=1}^{n} c_{ii} \\ &= \sum_{i=j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} \\ &= \sum_{i=j=1}^{n} a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{ni} \\ &= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \cdots + a_{2n}b_{n2}) + \\ &\quad \cdots + (a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \cdots + a_{nn}b_{nn}). \qquad (i) \end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
Tr(BA) &= \sum_{i=j=1}^{n} d_{ii} \\
&= \sum_{i=j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} \\
&= \sum_{i=j=1}^{n} b_{i1}a_{1i} + b_{i2}a_{2i} + \cdots + b_{in}a_{ni} \\
&= (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \cdots + b_{1n}a_{n1}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \cdots + b_{2n}a_{n2}) + \\
&\quad \cdots (b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \cdots + b_{nn}a_{nn}). \qquad (ii)
\end{aligned}$$

De (i) e (ii) concluímos que $Tr(AB) = Tr(BA)$. □

Definição 1.9.8. *Uma matriz A é demoninada:*

i) Simétrica se $A^t = A$;

ii) Antissimétrica, se $A^t = -A$.

Definição 1.9.9. *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz quadrada B de ordem n tal que*

$$AB = BA = I_n.$$

Proposição 1.9.5. *Sejam A e B matrizes quadradas. Se $BA = I$, então $AB = I$, ou seja, B é a inversa da matriz A.*

Demonstração. Da hipótese, $BA = I$, então

$$det(BA) = detI$$

$$detBdetA = 1$$

Logo $detA \neq 0$. Portanto, sistemas do tipo $AX = D$, onde $A = [a_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$, têm solução única.

Sejam $X_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix}$ e $D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, tais que $AX_1 = D_1,$ isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ então } \left(\begin{array}{ccc} a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} + \cdots + a_{1n}c_{n1} & = & 1 \\ a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} + \cdots + a_{2n}c_{n1} & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}c_{11} + a_{n2}c_{21} + \cdots + a_{nn}c_{n1} & = & 0 \end{array} \right.$$

Sejam $X_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix}$ e $D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, tais que $AX_2 = D_2,$ isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ então } \left(\begin{array}{ccc} a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} + \cdots + a_{1n}c_{n2} & = & 0 \\ a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} + \cdots + a_{2n}c_{n2} & = & 1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}c_{12} + a_{n2}c_{22} + \cdots + a_{nn}c_{n2} & = & 0 \end{array} \right.$$

E assim por diante, até $X_n = \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix}$ e $D_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$, tais que $AX_n = D_n,$ isto é,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \text{ então } \left(\begin{array}{ccc} a_{11}c_{1n} + a_{12}c_{2n} + \cdots + a_{1n}c_{nn} & = & 0 \\ a_{21}c_{1n} + a_{22}c_{2n} + \cdots + a_{2n}c_{nn} & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}c_{1n} + a_{n2}c_{2n} + \cdots + a_{nn}c_{n1} & = & 1 \end{array} \right.$$

Se $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$, então $AC = I$.

Como $BA = I$, temos $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Portanto, se $BA = I$, então $AB = I$, ou seja, B é a inversa da matriz A.

□

Exemplo 1.9.4. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, *temos que a matriz* $B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *é a matriz inversa de* A*, uma vez que* $AB = I_2$*.*

Observação 1.9.5.

1. *Uma matriz quadrada não necessariamente possui uma inversa;*
   Por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *não possui inversa, já que não existe uma matriz quadrada* B*, de ordem 2 tal que* $AB = I_2$*.*

2. *Uma matriz quadrada* A *é dita invertível se* A *admite uma matriz inversa;*

Proposição 1.9.6. *Se uma matriz* A *possui uma inversa, então essa inversa é única.*

Demonstração. Seja A uma matriz invertível, e suponhamos B e C duas inversas da matriz A de ordem $n \times n$, isto é $AB = I_n$ e $CA = I_n$. Assim, por (iii) e (iv) da proposição 1.9.2,

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

□

Definição 1.9.10. *Se* $k \in \mathbb{N}$ *e* A *é uma matriz invertível, a matriz* A^{-k} *é definida por:*

$$A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

Proposição 1.9.7. *Sejam* A *e* B *matrizes quadradas de ordem* n*.*

(i) Se A *é invertível, então* A^{-1} *também é invertível e* $(A^{-1})^{-1} = A$*;*

(ii) Se A *e* B *são invertíveis, então* AB *também é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$*.*

Demonstração. (i) Se A é invertível, então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \Rightarrow A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

Logo

$$A = (A^{-1})^{-1}.$$

(ii) Se A é invertível, então

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I_n \\ (AI_n)A^{-1} &= I_n \\ (ABB^{-1})A^{-1} &= I_n \\ (AB)B^{-1}A^{-1} &= I_n. \end{aligned}$$

Onde na penúltima igualdade usamos o fato de B ser invertível.

Logo

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

□

2 ABORDAGEM MATRICIAL DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo, vamos conhecer a definição de número complexo via matriz, suas propriedades e aplicações.

2.1 ABORDAGEM MATRICIAL

Segundo SOARES (2001), podemos iniciar a abordagem dos números complexos com a mais básica ilustração que se pode dar: a solução da equação

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{ou,} \quad x^2 = -1.$$

Sabemos que sobre $\mathbb{R}$ não há solução, assim vamos definir um "número" i, satisfazendo $i^2 = -1$, que resolva esta equação. Agora, postulamos a existência desse "número" ou invocamos da álgebra elementar e saímos em busca de um ente de natureza geométrica que seja a solução procurada. Assim, vamos considerar a equação sob a forma

$$X \cdot X = -I,$$

onde X é uma matriz 2 x 2 com coeficientes reais, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e " $\cdot$ " é o produto de matrizes. Dessa forma podemos verificar que $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma solução da equação matricial. De fato:

$$i^2 = i \cdot i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I.$$

Assim, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.1. *Seja X e I matrizes reais de ordem 2, sendo I a matriz identidade. A solução da equação*

$$X \cdot X = -I,$$

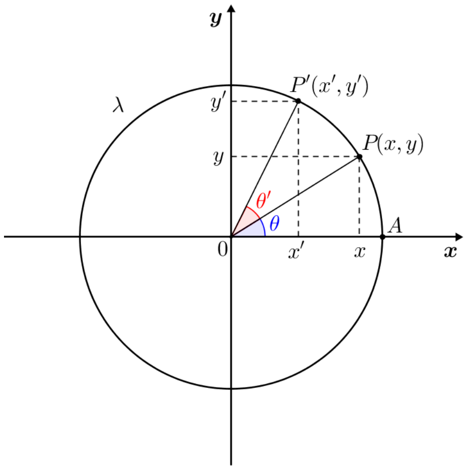
representa geometricamente a rotação de $\frac{\pi}{2}$ $radianos$ no plano cartesiano do sentido anti-horário.

Demonstração. Observando a figura 5, temos que:

$$cos\ \theta = \frac{x}{r} \Longrightarrow x = r\, cos\ \theta \quad e \quad x' = r\, cos\,(\theta + \theta')$$

$$sen\ \theta = \frac{y}{r} \Longrightarrow y = r\, sen\ \theta \quad e \quad y' = r\, sen\,(\theta + \theta')$$

Figura 5 – Circunferência centrada na origem de raio r



Fonte: (NASCIMENTO, 2015)

$$x' = r\,cos\,(\theta+\theta') = r\,(cos\,\theta \cdot cos\,\theta' - sen\,\theta \cdot sen\,\theta') = r\,(\frac{x}{r} \cdot cos\,\theta' - \frac{y}{r} \cdot sen\,\theta') = x\,cos\,\theta' - y\,sen\,\theta'$$

$$y' = r\,sen\,(\theta+\theta') = r\,(cos\,\theta \cdot sen\,\theta' + cos\,\theta' \cdot sen\,\theta) = r\,(\frac{x}{r} \cdot sen\,\theta' + \frac{y}{r} \cdot cos\,\theta') = x\,sen\,\theta' + y\,cos\,\theta'$$

assim,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\,cos\,\theta' - y\,sen\,\theta' \\ x\,sen\,\theta' + y\,cos\,\theta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\,\theta' & -sen\,\theta' \\ sen\,\theta' & cos\,\theta' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Tomando $\theta' = \dfrac{\pi}{2}$, temos que:

$$\begin{bmatrix} cos\,\frac{\pi}{2} & -sen\,\frac{\pi}{2} \\ sen\,\frac{\pi}{2} & cos\,\frac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = i.$$

$\square$

Definição 2.1.1. *Seja* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$*, definimos a função* $\Phi : \mathbb{C} \to \mathcal{M}_2$ *por*

$$\Phi(a+bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.1.2. *A função* $\Phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, definida acima é:*

i. *Bijetiva;*

ii. $\Phi(z+z') = \Phi(z) + \Phi(z')$*, para todo* $z,\ z' \in \mathbb{C}$*;*

iii. $\Phi(z \cdot z') = \Phi(z) \cdot \Phi(z')$*, para todo* $z,\ z' \in \mathbb{C}$*;*

iv. $\Phi(1) = I$.

Demonstração. Para provar **i**, vamos mostrar que ϕ é sobrejetiva e injetiva.

1. Dada a matriz $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tome $z = a + bi$. Por definição $\Phi(a + bi) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, então Φ é sobrejetora.

2. dados $z = a + bi$ e $z' = c + di$ tais que $\Phi(z) = \Phi(z')$, isto é, $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, então pela igualdade de matrizes, temos $z = z'$ (ou seja, Φ é injetiva).

Prova de **ii**

Seja $z = a + bi$ e $z' = b + di$.

$$\begin{aligned} \Phi(z + z') &= \Phi([(a + c) + (b + d)i]) \\ &= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \Phi(z) + \Phi(z'). \end{aligned}$$

Prova de **iii**

Dados $z = a + bi$ e $z' = b + di$.

$$\begin{aligned} \Phi(zz') &= \Phi[(ac - bd) + (ad + bc)i] \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -ad - bc \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \Phi(z) \cdot \Phi(z'). \end{aligned}$$

Prova de **iv**

$$\Phi(1) = \Phi(1 + 0i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

$\square$

Proposição 2.1.3. *Se Φ é uma função como em 2.1.1, então $\Phi(z^{-1}) = (\Phi(z))^{-1}$, $\forall z \neq 0$.*

Demonstração. $z \neq 0 \Rightarrow |z| \neq 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \neq 0$. Então $\det \Phi(z) = a^2 + b^2 \neq 0$, ou seja, $\Phi(z)^{-1}$ existe.

Lembramos que $z^{-1} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$, sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
\Phi(z^{-1}) &= \Phi\left(\frac{a - bi}{a^2 + b^2}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i\right) \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2 + b^2} & -\left(\dfrac{-b}{a^2 + b^2}\right) \\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2} & \dfrac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2 + b^2} & \dfrac{b}{a^2 + b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2} & \dfrac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
\Phi(z)^{-1} &= \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dfrac{a}{a^2 + b^2} & \dfrac{b}{a^2 + b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2 + b^2} & \dfrac{a}{a^2 + b^2} \end{bmatrix} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

De (2.1) e (2.2) segue-se que

$$\Phi(z^{-1}) = (\Phi(z))^{-1}.$$

□

Devido ao fato de Φ ser uma aplicação bijetiva que conserva as operações de adição e multiplicação, concluímos que as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ se comportam exatamente da mesma maneira que os números complexos em relação à soma e ao produto. Assim, todo número número complexo $z = a + bi$ associamos a matriz

$$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = aI + bi.$$

Logo, podemos identificar $\mathbb{C}$ com o conjunto $\{aI + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$. Temos então a representação matricial dos números complexos.

Observação 2.1.1. $aI + 0i = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = aI$ *é denominada de parte real do número complexo.*

Observação 2.1.2. $0I + bi = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = bi$ *é a parte imaginária do número complexo, denominado de imaginário puro.*

Definimos as operações entre números complexos a partir da soma e produto de matrizes.

Definição 2.1.2. *As operações de soma e produto no conjunto* $\mathbb{C} = \{aI + bi; a, b \in \mathbb{R}\}$ *são dadas por:*

i. *Soma*

Dados $Z_1 = aI + bi$ *e* $Z_2 = cI + di$ *pertencentes a* $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= (aI + bi) + (cI + di) \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix} \\ &= (a + c)I + (b + d)i. \end{aligned}$$

ii. *Produto*

Dados $Z_1 = aI + bi$ *e* $Z_2 = cI + di$ *pertencentes a* $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot Z_2 &= (aI + bi) \cdot (cI + di) \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix} \\ &= (ac - bd)I + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

Proposição 2.1.4. *O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Associatividade da soma*

$$[(aI + bi) + (cI + di)] + (eI + fi) = (aI + bi) + [(cI + di) + (eI + fi)].$$

2. *Comutatividade da soma*

$$(aI + bi) + (cI + di) = (cI + di) + (aI + bi).$$

3. *Elemento neutro da soma*

   O elemento neutro da soma é o complexo matricial $0I + 0i$ tal que

$$(aI + bi) + (0I + 0i) = aI + bi,$$

   para todo $aI + bi \in \mathbb{C}$.

4. *Inverso aditivo*

   Para cada elemento $aI + bi \in \mathbb{C}$ o inverso aditivo é o complexo matricial $-aI - bi$ tal que

$$(aI + bi) + [-aI - bi] = 0I + 0i.$$

5. *Associatividade do produto*

$$[(aI + bi) \cdot (cI + di)] \cdot (eI + fi) = (aI + bi) \cdot [(cI + di) \cdot (eI + fi)].$$

6. *Comutatividade do produto*

$$(aI + bi) \cdot (cI + di) = (cI + di) \cdot (aI + bi).$$

7. *Distributividade do produto em relação à soma (esquerda e direita)*

$$(aI + bi) \cdot [(cI + di) + (eI + fi)] = (aI + bi) \cdot (cI + di) + (aI + bi) \cdot (eI + fi);$$

$$[(aI + bi) + (cI + di)] \cdot (eI + fi) = (aI + bi) \cdot (eI + fi) + (cI + di) \cdot (eI + fi).$$

8. *Elemento neutro do produto*

   O elemento neutro do produto é o complexo matricial $1I + 0i$ tal que

$$(aI + bi) \cdot (1I + 0i) = aI + bi,$$

   para todo $aI + bi \in \mathbb{C}$.

9. *Inverso multiplicativo*

   Para todo $aI+bi \in \mathbb{C}$ não nulo, o inverso multiplicativo é o complexo matricial $(aI+bi)^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ tal que

$$(aI+bi)\cdot[(aI+bi)^{-1}] = 1I + 0i$$

Demonstração. Dados $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ e $Z_3 = \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}$, temos que:

1. *Associatividade da soma*

$$\begin{aligned}
[(aI+bi)+(cI+di)]+(eI+fi) &= \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+c)+e & -[(b+d)+f] \\ (b+d)+f & (a+c)+e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+(c+e) & -[b+(d+f)] \\ b+(d+f) & a+(c+e) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+e & -(d+f) \\ d+f & c+e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}\right) \\
&= (aI+bi)+[(cI+di)+(eI+fi)].
\end{aligned}$$

2. *Comutatividade da soma*

$$\begin{aligned}
(aI+bi)+(cI+di) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c+a & -(d+b) \\ d+b & c+a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
&= (cI+di)+(aI+bi).
\end{aligned}$$

3. *Elemento neutro da soma*

$$\begin{aligned} 0I + 0i &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 & 0 \cdot 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 & 0 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é o elemento neutro.

De fato,

$$\begin{aligned} (aI + bi) + (0I + 0i) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + 0 & -b + 0 \\ b + 0 & a + 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ d & a \end{bmatrix} \\ &= aI + bi. \end{aligned}$$

4. *Inverso aditivo*

$$\begin{aligned} -(aI + bi) &= -aI - bi \\ &= -a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - b \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

é o inverso aditivo. De fato,

$$\begin{aligned} (aI + bi) + [-(aI + bi)] &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a - a & -b + b \\ b - b & a - a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 0I + 0i. \end{aligned}$$

5. *Associatividade da produto*

$$
\begin{aligned}
[(aI+bi)\cdot(cI+di)]\cdot(eI+fi) &= \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (ac-bd)e-(ad+bc)f & -[(ac-bd)f+(ad+bc)e] \\ (ac-bd)f+(ad+bc)e & (ac-bd)e-(ad+bc)f \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ace-bde-adf-bcf & -acf+bdf-ade-bce \\ acf-bdf+ade+bce & ace-bde-adf-bcf \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ace-adf-bcf-bde & -acf-ade-bce+bdf \\ acf+ade+bce-bdf & ace-adf-bcf-bde \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(ce-df)-b(cf+de) & -[a(cf+de)+b(ce-df)] \\ a(cf+de)+b(ce-df) & a(ce-df)-b(cf+de) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} ce-df & -(cf+de) \\ cf+de & ce-df \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}\right) \\
&= (aI+bi)\cdot[(cI+di)\cdot(eI+fi)].
\end{aligned}
$$

6. *Comutatividade do produto*

$$
\begin{aligned}
(aI+bi)\cdot(cI+di) &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ca-db & -(cb+da) \\ cb+da & ca-db \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
&= (cI+di)\cdot(aI+bi).
\end{aligned}
$$

7. *Distributividade do produto em relação à soma (esquerda e a direita)*

   a) Distributividade à esquerda

$$\begin{aligned}
(aI+bi)\cdot[(cI+di)+(eI+fi)] &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\left(\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c+e & -(d+f) \\ d+f & c+e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac+ae-bd-bf & -ad-af-bc-be \\ bc+be+ad+af & -bd-bf+ac+ae \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac-bd+ae-bf & -ad-bc-af-be \\ ad+bc+af+be & ac-bd+ae-bf \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ae-bf & -(af+be) \\ af+be & ae-bf \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= (aI+bi)\cdot(cI+di)+(aI+bi)\cdot(eI+fi).
\end{aligned}$$

   b) Distributividade à direita

$$\begin{aligned}
[(aI+bi)+(cI+di)]\cdot(eI+fi) &= \left(\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae+ce-bf-df & -af-cf-be-de \\ be+de+af+cf & -bf-df+ae+ce \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae-bf+ce-df & -af-be-cf-de \\ af+be+cf+de & ae-bf+ce-df \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ae-bf & -(af+be) \\ af+be & ae-bf \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ce-df & -(cf+de) \\ cf+de & ce-df \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} e & -f \\ f & e \end{bmatrix} \\
&= (aI+bi)\cdot(eI+fi)+(cI+di)\cdot(eI+fi).
\end{aligned}$$

8. *Elemento neutro do produto*

$1I + 0i = 1\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ é o elemento neutro. De fato,

$$\begin{aligned}(aI+bi)\cdot(1I+0i) &= \begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a\cdot 1 - b\cdot 0 & a\cdot 0 - b\cdot 1\\ b\cdot 1 + a\cdot 0 & b\cdot 0 + a\cdot 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}a & -b\\d & a\end{bmatrix}\\ &= aI+bi.\end{aligned}$$

9. *Inverso multiplicativo*

$(aI+bi)^{-1} = \begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix}a & b\\-b & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2}\\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2}\end{bmatrix}$ é o inverso multiplicativo. De fato,

$$\begin{aligned}(aI+bi)\cdot[(aI+bi)^{-1}] &= \begin{bmatrix}a & -b\\b & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2}\\ \frac{-b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2} & \frac{ab}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2}\\ \frac{ba}{a^2+b^2}-\frac{ab}{a^2+b^2} & \frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{a^2}{a^2+b^2}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\\ &= 1I+0i.\end{aligned}$$

□

Definição 2.1.3. *Divisão de complexos na forma matricial*

Da teoria dos números complexos temos que $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$*, onde* $z_2 \neq 0$*. Aplicando a função* Φ, *temos:*

$$\begin{aligned}\Phi\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \Phi(z_1 z_2^{-1})\\ &= \Phi(z_1)\Phi(z_2^{-1})\\ &= \Phi(z_1)\Phi(z_2)^{-1}.\end{aligned}$$

Dessa maneira, definimos a divisão de um complexo Z_1 *por um complexo* Z_2*, onde* $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *e* $Z_2 \neq 0$*:*

$$\frac{Z_1}{Z_2} := Z_1 Z_2^{-1},$$

onde $\frac{Z_1}{Z_2}$ é apenas uma simbologia para representar a divisão entre dois complexos na forma matricial, uma vez que Z_1 e Z_2 são matrizes.

Observemos ainda que

$$\begin{aligned} Z_2^{-1} &= \frac{1}{Det(Z_2)} \cdot \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{Det(Z_2)} \cdot Z_2^t \end{aligned}$$

Assim, damos uma nova cara para a definição de um complexo Z_1 por um complexo Z_2.

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_2} &:= Z_1 \cdot \frac{1}{Det(Z_2)} \cdot Z_2^t \\ &= \frac{Z_1 \cdot Z_2^t}{Det(Z_2)}. \end{aligned}$$

2.2 CONJUGADO MATRICIAL

Antes de definirmos o conjugado matricial de um complexo, note que dado $z = (a + bi)$, temos

$$\begin{aligned} \Phi(\overline{z}) &= \Phi(a - bi) \\ &= \Phi(a + (-b)i) \\ &= \begin{bmatrix} a & -(-b) \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definição 2.2.1. *Dado o complexo $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, definimos o seu conjugado por $\overline{Z} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$.*

Observação 2.2.1. *Note que $\overline{Z} = Z^t$. Assim, a divisão definida em 2.1.3 pode ser reescrita da seguinte maneira:*

$$\frac{Z_1}{Z_2} := \frac{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}{Det(Z_2)}.$$

Exemplo 2.2.1. $Z = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \overline{Z} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$

Teorema 2.2.1. *Dado um complexo Z, temos:*

1. $Z+\overline{Z}=2Re(Z)$;

2 $Z-\overline{Z}=2Im(Z)$;

3 $Z=\overline{Z}\Leftrightarrow Z=Re(Z)$.

Demonstração. Seja $Z=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, temos:

1. $Z+\overline{Z}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2a \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}=2Re(Z).$

2. $Z-\overline{Z}=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2b \\ 2b & a \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}=2Im(Z).$

3. $Z=\overline{Z}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\Leftrightarrow -b=b\Leftrightarrow b=0\Leftrightarrow Z=\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}=Re(Z).$ □

Teorema 2.2.2. *Dado dois complexos Z_1 e Z_2 temos:*

1. $\overline{Z_1+Z_2}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}$;

2. $\overline{Z_1Z_2}=\overline{Z_1}\,\overline{Z_2}$.

Demonstração. Sejam os complexos $Z_1=\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2=\begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, assim:

1. $Z_1+Z_2=\begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}.$

$$\overline{Z_1+Z_2}=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -(b+d) & a+c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}.$$

2. $Z_1Z_2=\begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}.$

$$\overline{Z_1Z_2}=\begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix}=\overline{Z_1Z_2}.$$ □

2.3 NORMA MATRICIAL

Definição 2.3.1. *Dado o complexo* $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$*, definimos a norma de* Z*, como sendo o número real não negativo*

$$||Z|| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Teorema 2.3.1. *Dado o complexo* Z*,valem as seguintes afirmações:*

1. $||Z|| = 0 \Leftrightarrow Z = 0;$

2. $||Z|| = ||\overline{Z}||;$

3. $||Re(Z)|| \leq ||Z||;$

4. $||Im(Z)|| \leq ||Z||;$

5. $||Z||^2 = ||Z \cdot \overline{Z}||.$

Demonstração. Seja o complexo $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, temos:

A demosntração do item (1.) é análoga a do teorema 1.6.1.

2. $||Z|| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = ||\overline{Z}||.$

3. $Re(Z) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \Rightarrow ||Re(Z)|| = \sqrt{a^2 + 0^2} = |a|.$

   Agora $a^2 \leq a^2 + b^2 \Rightarrow \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow |a| \leq ||Z||,$

   então

$$||Re(Z)|| \leq ||Z||.$$

4. $Im(Z) = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow ||Im(Z)|| = \sqrt{0^2 + b^2} = |b|.$

   De forma análoga ao item anterior concluimos que $||Im(Z)|| \leq ||Z||$.

5. Da definição de norma temos,

$$||Z|| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow ||Z||^2 = a^2 + b^2.$$

Agora,

$$\begin{aligned} Z \cdot \overline{Z} &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{bmatrix} \end{aligned}.$$

Assim

$$\begin{aligned} ||Z \cdot \overline{Z}|| &= \sqrt{(a^2+b^2)^2+0^2} \\ &= a^2+b^2 \\ &= ||Z||^2. \end{aligned}$$

□

Observação 2.3.1. *Note que, apesar de algumas propriedades de norma válidas nos complexos usuais também serem válidas para a forma matricial, as propriedades 4 e 5 fogem do padrão, uma vez que, na forma matricial não podemos comparar uma matriz* $Re(Z) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *com um número* $||Re(Z)||$*. Pelo mesmo motivo,no ítem 6 da forma matricial, é acrescentada norma do lado direito.*

Lema 2.3.1. *Dado os números complexos* $Z_1, Z_2 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, vale a seguinte desigualdade:*

$$|ac+bd| \leq ||Z_1|| \cdot ||Z_2||.$$

Demonstração. Seja $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$, note que:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (ad-bc)^2 \\ 0 &\leq a^2d^2 - 2adbc + b^2c^2 \\ 2adbc &\leq a^2d^2 + b^2c^2 \end{aligned}$$

Somando $a^2c^2 + b^2d^2$ temos,

$$\begin{aligned} a^2c^2 + 2adbc + b^2d^2 &\leq a^2d^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ (ac+bd)^2 &\leq a^2(c^2+d^2) + b^2(c^2+d^2) \\ (ac+bd)^2 &\leq (a^2+b^2)(c^2+d^2) \\ |ac+bd| &\leq \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\ &= ||Z_1|| \cdot ||Z_2||. \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3.2. *Se Z_1 e Z_2 são números complexos, então:*

1. $||Z_1 \cdot Z_2|| = ||Z_1|| \cdot ||Z_2||$;

2. $||Z_1 + Z_2|| \leq ||Z_1|| + ||Z_2||$; *(Desigualdade triangular)*

3. $||Z_1 - Z_2|| \geq | \, ||Z_1|| - ||Z_2|| \, |$.

Demonstração. Sejam $Z_1 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$.

1. Observamos inicialmente que:

$$Z_1 \cdot Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ ad + bc & ac - bd \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} ||Z_1 \cdot Z_2|| &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{(a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2) + (a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2)} \\ &= \sqrt{a^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2} \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \end{aligned}.$$

e portanto,

$$\begin{aligned} ||Z_1 \cdot Z_2|| &= \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\ &= ||Z_1|| \cdot ||Z_2||. \end{aligned}$$

2. Sendo,

$$Z_1 + Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c & -(b + d) \\ b + d & a + c \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} ||Z_1 + Z_2|| &= \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2} \\ ||Z_1 + Z_2||^2 &= (a + c)^2 + (b + d)^2 \\ &= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 \\ &= ||Z_1||^2 + ||Z_2||^2 + 2(ac + bd) \\ &\leq ||Z_1||^2 + ||Z_2||^2 + 2|ac + bd| \end{aligned}$$

Do lema 2.3.1, segue que:

$$\begin{array}{rcl} ||Z_1 + Z_2||^2 & \leq & ||Z_1||^2 + 2||Z_1|| \cdot ||Z_2|| + ||Z_2||^2 \\ & = & (||Z_1|| + ||Z_2||)^2 \end{array}.$$

Ou seja:

$$||Z_1 + Z_2|| \leq ||Z_1|| + ||Z_2||.$$

3. Inicialmente temos que

$$Z_1 - Z_2 = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c & -(b-d) \\ b-d & a-c \end{bmatrix}.$$

Assim

$$\begin{array}{rcl} ||Z_1 - Z_2|| & = & \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \\ ||Z_1 - Z_2||^2 & = & (a-c)^2 + (b-d)^2 \\ & = & a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2 \\ & = & ||Z_1||^2 + ||Z_2||^2 - 2(ac+bd) \\ & \geq & ||Z_1||^2 + ||Z_2||^2 - 2|ac+bd| \end{array}$$

Do lema 2.3.1, temos

$$\begin{array}{rcl} ||Z_1 - Z_2||^2 & \geq & ||Z_1||^2 - 2||Z_1|| \cdot ||Z_2|| + ||Z_2||^2 \\ & = & (||Z_1|| - ||Z_2||)^2 \end{array}$$

ou seja,

$$||Z_1 - Z_2|| \geq |\, ||Z_1|| - ||Z_2||\, |.$$

□

Observação 2.3.2. *Assim como em 1.6.2, na forma matricial valem as propriedades* $||Z_1 - Z_2|| \leq ||Z_1 + Z_2||$ *e* $||Z_1 + Z_2|| \geq |\ ||Z_1|| - ||Z_2||\ |$*, as mesmas são de fácil verificação.*

Observação 2.3.3. *Note que* $det(Z) = \|Z\|^2$*. Sabemos que* $Z^t = \overline{Z}$*, assim sendo,*

$$\frac{Z_1}{Z_2} := \frac{Z_1 \cdot \overline{Z_2}}{\|Z_2\|^2}.$$

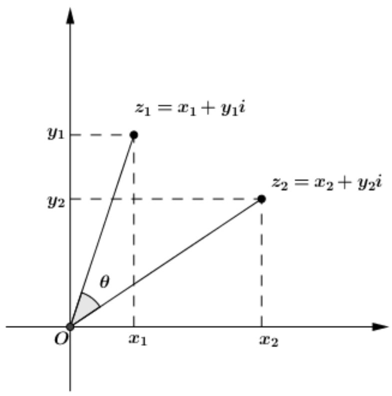
Que é análoga à divisão de complexos usuais.

2.4 FORMA POLAR MATRICIAL

Definição 2.4.1 (ângulo entre números complexos). *Seja* $Z_1 = \begin{bmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{bmatrix}$ *e* $Z_2 = \begin{bmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{bmatrix}$ *dois complexos não nulos, definimos o ângulo* θ *entre* Z_1 *e* Z_2 *pela expressão:*

$$\theta = \arccos \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2}\sqrt{{x_2}^2 + {y_2}^2}}.$$

Figura 6 – Representação geométrica de θ.



Fonte: Autor

Tomando-se $Z = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}$ e $Z_0 = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ temos que o ângulo entre Z e Z_0 é dado por

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Seja $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos:

$$x = r\cos\theta.$$

De $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e da relação fundamental trigonométrica, obtemos que

$$y = rsen\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} r\cos\theta & -rsen\theta \\ rsen\theta & r\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & r\cos\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -rsen\theta \\ rsen\theta & 0 \end{bmatrix} \\ &= r\cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + rsen\,\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= r\cos\theta\, I + rsen\,\theta\, i. \end{aligned}$$

Observação 2.4.1. *Note que a forma polar matricial é análoga à forma polar algébrica, onde* $z = r\cos\theta + irsen\theta$.

Observação 2.4.2. *Observe que para* $r = 1$*, temos o número complexo matricial* $\begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$*, este é conhecido também como matriz de rotação. Logo, para rotacionar um ponto* (a, b) *em relação à origem,* θ *graus, no sentido anti-horário, multiplica-se a matriz de rotação pelo complexo matricial* $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$*. Ou seja,*

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & sen\,\theta \\ -sen\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\cos\theta - bsen\,\theta & asen\,\theta + b\cos\theta \\ -(asen\,\theta + b\cos\theta) & a\cos\theta - bsen\,\theta \end{bmatrix},$$

que é equivalente ao par ordenado $(a\cos\theta - bsen\,\theta, asen\,\theta + b\cos\theta)$.

Observação 2.4.3. *Potencias de* i *na forma matricial. Seja* $i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *a unidade imaginária, as potências de* i *são:*

$$\begin{aligned} i^0 &= I \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -I \\ i^3 &= i^2 \cdot i = -I \cdot i = -i \\ i^4 &= i^3 \cdot i = -i \cdot i = I \\ i^5 &= i^4 \cdot i = I \cdot i = i \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -I \\ i^7 &= i^6 \cdot i = -I \cdot i = -i \\ i^8 &= i^7 \cdot i = -i \cdot i = I \\ &\vdots \end{aligned}$$

De forma análoga aos complexos usuais, as potências de i *ocorrem em ciclos,* $I, i, -I, -i$*. Logo dado* $n \in \mathbb{N}$*, temos que* $i^n = i^r$*, onde* r *é o resto da divisão de* n *por 4.*

2.5 A EQUAÇÂO DE EULER NA FORMA MATRICIAL

Esta seção será destinada à famosa equação de Euler, uma equação que reúne nove conceitos básicos da matemática numa só expressão, e simboliza a diversidade, pois reune numa pequena frase muitas áreas diferentes da matemática.

$$e^{i\pi} = -1.$$

Veremos como essa equação se comporta no espaço $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, onde podemos interpretá-la como sendo $e^{\pi\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} = -I$. Para isso necessitaremos da definição de exponencial de uma matriz, baseado em Doering e Lopes (2012).

Proposição 2.5.1. *Dado* $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *então*

$$||Z^m|| = ||Z||^m, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução que vale para $m \in \mathbb{N}$ qualquer.

Para o caso $n = 0$ vale, pois:

$$\begin{aligned} ||Z^0|| &= ||I|| \\ &= 1 \\ &= ||Z||^0. \end{aligned}$$

Suponha que a propriedade seja válida para um certo $m = k$, ou seja, que

$$||Z^k|| = ||Z||^k.$$

Agora, provaremos que a igualdade vale para $n = k + 1$.

$$\begin{aligned} ||Z^{k+1}|| &= ||Z^k \cdot Z|| \\ &= ||Z^k|| \cdot ||Z||. \end{aligned}$$

Da hipótese de indução, segue que

$$\begin{aligned} ||Z^{k+1}|| &= ||Z||^k \cdot ||Z|| \\ &= ||Z||^{k+1}. \end{aligned}$$

□

Definição 2.5.1 (Exponencial de uma Matriz)**.** *Seja o conjunto* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *, denotamos a matriz exponencial de uma matriz* $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *por*

$$e^Z = I + Z + \frac{1}{2!}Z^2 + \frac{1}{3!}Z^3 + \cdots + \frac{1}{j!}Z^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}Z^j. \tag{2.3}$$

É imediato da própria definicão que $e^0 = I$.

Uma pergunta que defemos fazer é se a exponencial dada em (2.3) está bem definida. Para responder tal pergunta, observemos que

$$\begin{aligned} ||\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} Z^j|| &\leq \sum_{j=0}^{n} ||\frac{1}{j!} Z^j|| \\ &= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} ||Z^j|| \end{aligned}$$

Pela proposição 2.5.1, temos

$$||\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} Z^j|| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} ||A||^j.$$

Fazendo-se $n \to \infty$

$$||\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j|| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} ||A||^j,$$

e como a série de Taylor da função exponencial é dada por:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \text{, Veja (NETO, 2015).}$$

então

$$1 + \|Z\| + \frac{1}{2!}\|Z^2\| + \frac{1}{3!}\|Z^3\| + \cdots = e^{||Z||} \in \mathbb{R}$$

Isso mostra que a matriz exponencial de uma matriz A está bem definida.

Lema 2.5.1. *As potências de θi para:*

1. *um número par é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2n} = (-1)^n \begin{bmatrix} \theta^{2n} & 0 \\ 0 & \theta^{2n} \end{bmatrix}$$

2. *um número ímpar é dada por:*

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2n+1} = (-1)^n \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2n+1} \\ \theta^{2n+1} & 0 \end{bmatrix}$$

Demonstração. Provemos por indução.

1. Potências pares:

Para $n = 2$, temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{bmatrix}.$$

Supondo que a igualdade seja válida para $n = k,$ ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{bmatrix} \theta^{2k} & 0 \\ 0 & \theta^{2k} \end{bmatrix},$$

devemos mostrar que também é válida para $n = k + 1.$

Agora

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2(k+1)} &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^2 \\ &= (-1)^k \begin{bmatrix} \theta^{2k} & 0 \\ 0 & \theta^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^k(-1) \begin{bmatrix} \theta^{2k} & 0 \\ 0 & \theta^{2k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} \theta^{2(k+1)} & 0 \\ 0 & \theta^{2(k+1)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O que mostra o resultado para potências pares.

2. Potências ímpares:

Para $n = 3,$ temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta^2 & 0 \\ 0 & -\theta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\theta^3 \\ \theta^3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supondo válida para $n = k,$ ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2k+1} \\ \theta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix}$$

devemos mostrar que para $n = k + 1$ a igualdade também é válida.

De fato,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2(k+1)+1} &= \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{(2k+1)+2} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2k+1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^{2} \\
&= (-1)^k \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2k+1} \\ \theta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} \cdot (-1) \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^k(-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2k+1} \\ \theta^{2k+1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta^2 & 0 \\ 0 & \theta^2 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^{k+1} \begin{bmatrix} 0 & -\theta^{2(k+1)+1} \\ \theta^{2(k+1)+1} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

□

Agora apresentaremos a fórmula de Euler na versão matricial.

Teorema 2.5.1. *(Fórmula de Euler) Seja $\theta \in \mathbb{R}$, então*

$$e^{\theta i} = \cos\theta I + sen\theta i.$$

Demonstração. Lembramos que as séries de Taylor das funções seno e cosseno são dadas por:

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j}$$

e

$$sen\,\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \frac{1}{7!}\theta^7 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1}.$$

Agora,

$$e^{\theta i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \begin{bmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{bmatrix}^j$$

Pelo lema 2.5.1, temos:

$$\begin{aligned}
e^{\theta i} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(-1)^j\begin{bmatrix}\theta^{2j} & \theta^{2j+1}\\ \theta^{2j+1} & \theta^{2j}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j} & \displaystyle-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1}\\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j+1)!}\theta^{2j+1} & \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(2j)!}\theta^{2j}\end{bmatrix},
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
e^{\theta i} &= \begin{bmatrix}\cos\theta & -sen\,\theta\\ sen\,\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\\
&= \cos\theta\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + sen\,\theta\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
&= \cos\theta I + sen\,\theta i.
\end{aligned}$$

□

Observação 2.5.1. *Note que a forma matricial da equação de Euler é análoga à fórmula de Euler* $e^{i\theta} = \cos\theta + isen\,\theta.$

Para o caso particular em que $\theta = \pi$, temos que:

$$\begin{aligned}
e^{\pi i} &= \cos\pi I + sen\,\pi i\\
&= -I.
\end{aligned}$$

Observe que esta é a versão matricial da equação de Euler, que é dada por $e^{\pi i} = -1.$

2.6 TABELA COMPARATIVA ENTRE OS COMPLEXOS USUAIS E OS COMPLEXOS MATRICIAIS

Comparação entre o caso usual e matricial	
Caso Usual	Caso Matricial
$z = a + bi$ ou $z = (a, b)$	$Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$
$\overline{z} = a + bi$	$\overline{Z} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$	$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2^t}{Det(Z_2)}$
$Re(z) \leq \|Re(z)\| \leq \|z\|$	$\\|Re(Z)\\| \leq \\|Z\\|$
$Im(z) \leq \|Im(z)\| \leq \|z\|$	$\\|Im(Z)\\| \leq \\|Z\\|$
$\|z\|^2 = z \cdot \overline{z}$	$\\|Z\\|^2 = \\|Z \cdot \overline{Z}\\|$
$z = r\cos\theta + rsen\,\theta i$	$Z = r\cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + rsen\,\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$e^{iy} = \cos y + i \cdot sen\,y$	$e^{i\theta} = \cos\theta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + sen\,\theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação, foi apresentado um texto a respeito da forma matricial dos números complexos, material este que pode ser usado como mais um recurso didático por alunos e professores da iniciação científica do ensino médio.

Apresentamos neste texto as principais propriedades elementares dos números complexos e da álgebra de matrizes, além de suas demonstrações, onde usamos recursos básicos do conjuntos dos números reais.

Por fim, apresentamos uma nova caracteriação do conjunto dos números complexos, utilizando a álgebra matricial, onde foi possível observar as propriedades dos números complexos de um novo ponto de vista, além de podermos comparar cada uma dessas propriedades dentro do respectivo espaço vetorial.

Espera-se que este trabalho contribua de forma significativa com as aulas dos professores do ensino médio e, consequentemente, contribua com a formação em matemática dos alunos no contexto da iniciação científica.

REFERÊNCIAS

AVILA, G. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. 271 p.

CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da universidade de São Paulo, 1975. 276 p.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de álgebra linear(2ªed.)*. São Paulo: Editora da universidade de São Paulo, 2013.

DANTE, L. R. *Matemática: contexo e aplicações*. São Paulo: Ática, 2013.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 421 p. (Coleção matemática universitária).

FERNANDES, C. S.; BERNARDEZ, N. C. J. *Introdução às funções de uma variável complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008. 224 p.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. d. S. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LANG, S. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2003.

LIMA, E. L. *Curso de análise (Vol.2)*. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 547 p.

LIPSCHUTS, S.; LIPSON, M. L. *Álgebra linear (4ª edição)*. Porto Alegre: bookman, 2011. 432 p.

MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Ministério da Educação e Cultura - Secretaria de Educação Básica, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 17 nov. 2016.

NASCIMENTO, F. A. d. *Funções trigonométricas complexas: uma abordagem voltada para o ensino médio*. Boa Vista: Biblioteca Central da UFRR, 2015.

NETO, A. C. M. *Fundamentos de cálculo*. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 577 p. (Coleção PROFMAT).

NETO, A. L. *Funções de uma variável complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 468 p.

SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa (2ª edição)*. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

A ESPAÇOS VETORIAIS DAS MATRIZES

Aqui veremos algumas definições a cerca do espaço vetorial $\mathcal{M}_2$ estudado no capítulo 2. Por exemplo, o que nos levou a definir a norma nesse espaço como sendo $||Z|| = \sqrt{a^2 + b^2}$, que num primeiro momento sugere que a definição foi decorrente apenas da intuição, mas não, veremos que ela decorre de uma definição de produto interno nesse mesmo espaço, que é bem diferente da definição de produto interno usual dos números complexos. Parte dessas definicões podem ser encontradas em (LANG, 2003), (COELHO; LOURENÇO, 2013) e (LIMA, 2012).

A.1 Espaço Vetorial

Definição A.1.1. *Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{R}$ se em seus elementos estiverem definidas as seguintes operções, satisfazendo as propriedades abaixo:*

ADIÇÂO: A cada par $u, v \in V$ corresponde a um elemento $u + v \in V$, chamado de $soma$ de u e v, de modo que:

(A1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ *(comutatividade da soma).*

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ *(Associatividade).*

(A3) exista em V um elemento, denominado $elementonulo$ e denotado por 0, tal que $0 + v = v, \forall v \in V.$

(A4) a cada elemento $v \in V$ exista uma elemento em V, denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0.$

PRODUTO DE UM VETOR POR UM ESCALAR : A cada par $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, corresponde um elemento $\alpha v \in V$, denominado $produto\ por\ escalar$ de α por v de modo que:

(P1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *e* $\forall v \in V$ *(Associatividade do produto).*

(P2) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$ *(onde 1 é o elemento neutro de $\mathbb{R}$).*

Além disso,as operações de $soma$ e $produto$ se distribuem, isto é, valem as seguintes propriedades:

(D1) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall u, v \in V.$

(D2) $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ***e*** $\forall v \in V.$

Exemplo A.1.1. *O conjunto* $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ *das matrizes quadradas de oredem 2, munido das operações de soma e produto por escalar usuais, é um espaço vetorial.*

Demonstração. De fato, basta observar em 1.9.1 e 1.9.2, ítens i, ii, iii e iv que toda matriz satisfaz as propriedades de espaço vetorial, sendo assim, as matrizes $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ em particular também satisfazem tais propriedades. O elemento neutro do espaço vetorial $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ é a matriz $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. □

Definição A.1.2 (subespaço vetorial)**.** *Seja V um espaço vetorial, e seja W um subconjunto de V. Dizemos que W é um subespaço , se W satisfaz as seguintes condições:*

(i) Se v e w são elementos de W, a soma $v+w$ também é um elemento de W.

(ii) Se v é um elemento de W e α é um número, então $\alpha\cdot v$ é um elemento de W.

(iii) O elemento 0 de V também é um elemento de W.

Se W é um subespaço, então ele é também um espaço vetorial.

Proposição A.1.1. *O conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Primeiramente, observemos que o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é um subconjunto de $M_2(\mathbb{R})$, uma vez que o segundo é o conjunto de todas as matrizes de ordem 2.

Devemos mostrar que no conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vale as condições enumeradas em A.1.2.

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ pertencentes a $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e α um número real. Assim:

(i)

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\alpha A &= \alpha \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha a & -\alpha b \\ \alpha b & \alpha a \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\end{aligned}$$

(iii)

O elemento neutro do conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

De fato

$$\begin{aligned}A + 0 &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a+0 & -b+0 \\ b+0 & a+0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\ &= A.\end{aligned}$$

Logo, o elemento neutro do conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é o mesmo do conjunto $\mathrm{M}_2\mathbb{R}$. Sendo assim, o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $\mathrm{M}_2\mathbb{R}$. □

A.2 Produto Interno

Definição A.2.1. *Seja V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{R}$. Um produto interno sobre V é uma função $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(P1) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \forall u, v, w \in V.$

(P2) $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u, v \in V.$

(P3) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle, \forall u, v \in V.$

(P4) $\langle u, u\rangle > 0$, *se* $u \neq 0.$

Definição A.2.2 (Produto Interno em $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$)**.** *Seja o espaço vetorial $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Dada as matrizes A e B em $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$, definimos o produto interno entre as matrizes A e B pela expressão:*

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}Tr(B^t A)$$

Demonstração. Devemos mostrar que a expressão acima satisfaz todas as propriedades da definição A.2.1.

Dado as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ e o número real λ, temos:

(P1)

$$\begin{aligned}
\langle A+B, C\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} i(a+e)+k(c+g) & i(b+f)+k(d+h) \\ j(a+e)+l(c+g) & j(b+f)+l(d+h) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left[i(a+e)+k(c+g)+j(b+f)+l(d+h) \right] \qquad (i)
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} i & k \\ j & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} ai+ck & bi+dk \\ aj+cl & bj+dl \end{bmatrix} + \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} ei+gk & fi+hk \\ ej+gl & fj+hl \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \left[(ai+ck)+(bj+dl) \right] + \frac{1}{2} \left[(ei+gk)+(fj+hl) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[i(a+e)+k(c+g)+j(b+f)+l(d+h) \right] \qquad (ii)
\end{aligned}$$

De (i) e (ii) temos que $\langle A+B, C\rangle = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle$.

(P2)

$$\begin{aligned}
\langle \lambda A, B\rangle &= \left\langle \lambda \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda ae + \lambda cg & \lambda be + \lambda dg \\ \lambda af + \lambda ch & \lambda bf + \lambda dh \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} Tr \left\{ \lambda \begin{bmatrix} ae + cg & be + dg \\ af + ch & bf + dh \end{bmatrix} \right\} \\
&= \lambda \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \lambda \frac{1}{2} Tr B^t A \\
&= \lambda \langle A, B\rangle
\end{aligned}$$

(P3) Temos que:

$$\begin{aligned}
\langle A, B\rangle &= \frac{1}{2} Tr B^t A \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} ae + cg & be + dg \\ af + cg & bf + dh \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (ae + bf + cg + dh) \qquad (i)
\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
\langle B, A\rangle &= \frac{1}{2} Tr A^t B \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} ae + cg & af + ch \\ be + dg & bf + dh \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} (ae + bf + cg + dh) \qquad (ii)
\end{aligned}$$

De (i) e (ii), temos que $\langle A, B\rangle = \langle B, A\rangle$.

(P4)

Se $A \neq 0$, então pelo menos um elemento $a_{ij} \in A$ é não nulo. Seja $a_{11} = a$ esse elemento. Assim $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \langle A, A\rangle &= \frac{1}{2} Tr A^t A \\ &= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} a^2 \geqslant 0, \text{pois } a \neq 0. \end{aligned}$$

Logo, demonstradas todas as propriedades exigidas no ítem A.2.1, temos que a expressão

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2} Tr(B^t A)$$

é de fato um produto interno. □

Exemplo A.2.1. *Produto Interno no Subespaço $\mathcal{M}_2$. Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix}$ em $\mathcal{M}_2$, o produto interno fica definido pela expressão:*

$$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2} Tr B^t A = ad + bc.$$

A.3 Norma

Definição A.3.1. *Seja v um elemento do espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{R}$, munido de produto interno, chamamos de norma de v ao número real dado por*

$$||v|| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

Observação A.3.1. *Seja V um espaço vetorial com produto interno, segue imediatamente das definicções que*

(a) $||v|| \geq 0, \forall v \in V$ *e* $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0;$

(b) $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ *e* $\forall v \in V.$

Exemplo A.3.1. *Norma no espaço $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A norma no espaço dos complexos matriciais é dada por*

$$||Z|| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Demonstração. Dada a matriz $Z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle Z, Z \rangle &= \frac{1}{2} Tr Z^t Z \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} Tr \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} 2(a^2 + b^2) \\
&= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
||Z|| &= \sqrt{\langle Z, Z \rangle} \\
&= \sqrt{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

B ATIVIDADE PRÁTICA

Neste apêndice apresentamos uma proposta de atividade, que pode ser desenvolvida em sala de aula. Ela tem como objetivo a prática do aprendizado e tem como metodologia a resolução de problemas.

Os exercícios abaixo basearam-se nos exercícios encontrados na referência (DANTE, 2013).

Questão 1: Dado os complexos $Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $Z_2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $Z_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $Z_1 + Z_2$;

b) $Z_1 - Z_2$;

c) $Z_1 Z_2$;

d) $(Z_1 + Z_2)Z_3$;

e) $(Z_1 + Z_2) + Z_3$.

Questão 2: Calcule $Z\overline{Z}$ nos casos abaixo:

a) $Z = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $Z = \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$;

c) $Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Questão 3: Determine os números complexos Z e $\overline{Z}$ tais que $Z + \overline{Z} = 4$ e $Z \cdot \overline{Z} = 13$.

Questão 4: Determine as divisões indicadas:

a) $\dfrac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$;

b) $\dfrac{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}$.

Questão 5: Determine a norma de cada um dos seguintes números complexos:

a) $Z = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$;

b) $Z = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$;

c) $Z = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$;

d) $Z = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

Questão 6: Escreva na forma trigonométrica matricial os seguintes números complexos:

a) $Z = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $Z = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

c) $Z = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$;

d) $Z = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Questão 7: Se $Z_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ e $Z_2 = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, determine:

a) $\|Z_1\| + \|Z_2\|$;

b) $\|Z_1 \cdot Z_2\|$;

c) $\|Z_1 + Z_2\|$;

d) $\|Z_1\| \cdot \|Z_2\|$.

Questão 8: Calcule as potências dos complexos abaixo:

a) $\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}^7$;

b) $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}^{47}$.

Questão 9: Represente na forma algébrica os seguintes números complexos:

a) $Z_1 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$;

b) $Z_2 = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$;

c) $Z_3 = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ -8 & \end{bmatrix}$.

Questão 10: Encontre a forma matricial dos seguintes números complexos:

a) $Z_1 = -4 + 2i$;

b) $Z_2 = 3 - 5i$;

c) $Z_3 = -6$.

Questão 11: Resolva a seguinte equação: $Z + I = 3Z - 2I$.

Questão 12: Demonstrar 2.3.1, ítem 5.

Questão 13: Demonstrar as propriedades citadas na observação 2.3.2.

Questão 14: Qual o ângulo obtido ao rotacionar $(\sqrt{2}, 0)$ em relação a origem, no sentido anti-horário, de modo a obter o ponto $(1, 1)$?

Questão 15: Encontre as coordenadas do ponto B, após uma rotação do ponto $A(5, -4)$ de $60\,^{\circ}$ no sentido anti-horário em relação à origem.