



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOÃO DE RIBAMAR SILVA

GRAVITOMAGNETISMO NO CONTEXTO DA TEORIA GRAVITACIONAL DE
BRANS-DICKE

Boa Vista

2010

JOÃO DE RIBAMAR SILVA

**GRAVITOMAGNETISMO NO CONTEXTO DA TEORIA GRAVITACIONAL DE
BRANS-DICKE**

Dissertação apresentada como pré-requisito para a conclusão do Curso de Mestrado em Física da Universidade Federal de Roraima, defendida em 05 de Fevereiro de 2010 e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Adriano Trindade de Barros
Orientador/ Departamento de Física–UFRR

Prof. Dr. Edmundo Marinho do Monte
(Departamento de Física–UFPB)

Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira
(Departamento de Física–UFRR)

PROCURA-SE

Procura-se um caminho, o "caminho do meio". Um caminho que não seja o da direita nem o da esquerda e também não pode ficar em cima do muro. Procura-se, na verdade, um diálogo um meio termo uma trégua, uma paz verdadeira. Procura-se algo que se perdeu no transcorrer do tempo, a vida. Ah! Tem que ser em grupo.

Temos nos preocupado tanto com os problemas do processo educativo que acho que esquecemos do todo, do processo, da verdadeira educação.

Não existe educação sem uma relação, sem um contato, sem um atrito, sem uma busca de ambas as partes, sem uma entrega comum, uma troca. Não existe educação sem diálogo, mas pode existir educação mesmo sem palavras.

O que realmente falta é um pouco mais de doação de ambas as partes, um pouco mais de humildade no reconhecer o seu erro, um pouco mais de amor, um estender a mão um para o outro e caminhar lado a lado.

Seria uma utopia acharmos que somos professores e alunos perfeitos, maravilhosos, sensacionais, completos. E seria uma tristeza chegar a esse ponto, pois nada mais teríamos a ensinar e a aprender, perdendo a educação a sua razão de existir.

É certo que cada um de nós busca manter vivo dentro de si um ideal de professor, um ideal de aluno, um ideal de homem, pois é esse ideal que nos leva avante, que nos faz buscar, que nos faz cair, que nos dá forças para levantar, que nos faz crescer, que nos faz querer sempre ser um pouquinho melhor que ontem. E isso é maravilhoso! Não devemos e não podemos perder esse ideal, pois novamente o processo educativo, mola-mestra da evolução do ser humano desapareceria. Tudo o que precisamos é ser um pouco mais realista; colocar os pés no chão, olhar ao redor e saber que tudo o que importa é a convivência, é a relação, é o momento sublime em que os seres se tocam e, desse contato, surge uma luz lá no fim do túnel, um verdadeiro brilho que chamamos do jeito que quisermos, **vida, amor, educação**.

Obrigado pela oportunidade de conhecer você. Lembranças de um amigo, quem sabe de um professor...

JORISI

*Dedico esta dissertação as minhas filhas:
MARCIA HELENA, MARCILENE, CLAUDIA,
minha esposa, JOAQUINA cujo
exemplo de honestidade e trabalho
tem sido um norteador para a minha vida,
que tem me dado apoio nos momentos mais difíceis
e mostrado a simplicidade de ter esperança.*

AGRADECIMENTOS

- (i) A Deus por se fazer sempre presente em todos os momentos da minha vida.
- (ii) Ao meu orientador e amigo, Prof. Adriano Trindade de Barros (DFis–UFRR), pela assistência e incentivo na elaboração deste trabalho e por auxiliar-me no começo de minha vida científica.
- (iii) À Universidade Federal de Roraima pela oportunidade e apoio oferecido durante este curso.
- (iv) Ao CNPq, pela alocação de uma bolsa de estudo destinada para o curso de mestrado tão importante para meu aprimoramento profissional.
- (v) Aos meus colegas da primeira turma de mestrado Antônio Leitão, Luzinete Vilanova e Chan Tat pela colaboração nas discussões durante todo o desenvolvimento deste trabalho e companheirismo.
- (iv) Aos professores que ministraram as disciplinas em especial ao Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira sempre muito presente em todos os momentos.
- (v) À Cristina Cabral e Telma Almeida pelo incentivo, compreensão, apoio e críticas oportunas.

RESUMO

Neste trabalho desenvolvemos o formalismo do gravitomagnetismo no contexto da teoria gravitacional de Brans-Dicke. Escrevemos as equações de campo em uma forma tipo-Maxwell ao considerarmos as aproximações de campo fraco e de baixa velocidade de rotação da fonte. Examinamos o efeito Lense-Thirring de precessão dos referenciais inerciais e obtivemos a equação de movimento para uma partícula. Introduzimos ainda um modelo com o momento angular da fonte variando linearmente no tempo, calculando o atraso do tempo gravitomagnético decorrente. Os resultados obtidos foram comparados com as previsões da teoria da Relatividade Geral.

Palavras chave: Aproximação de Campo Fraco; Gravitomagnetismo; Teoria de Brans-Dicke.

ABSTRACT

In this work we develop the formalism of the gravitomagnetism in the context of the Brans-Dicke theory of gravity. We write the field equations in a type-Maxwell form while considering the approximations of weak field and of low speed of rotation of the source. We examine the effect of Lense-Thirring precession of inertial frames and obtained the equation of motion for a particle. We have also introduced a model with the angular momentum of the source varying linearly with time, calculating the gravitomagnetic time delay due. The results were compared with the predictions of the theory of General Relativity.

Keywords: Weak Field Approximation; Gravitomagnetism; Brans-Dicke Theory.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	
1 INTRODUÇÃO	11
2 TEORIA DA GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN	14
2.1 Introdução	14
2.2 Teoria Gravitacional de Newton	14
2.3 Equação de Campo da Gravitação de Newton	16
2.4 Teoria gravitacional de Einstein	18
2.5 Aproximação de Campo Fraco	19
2.6 Aproximação Newtoniana: Equações de Campo	22
2.7 Aproximação Newtoniana: Equações de Movimento	23
3 GRAVITOMAGNETISMO	26
3.1 Introdução	26
3.2 Potenciais Gravitoelétrico e Gravitomagnético	26
3.3 Cálculo da Métrica	29
3.4 Equações de Campo tipo–Maxwell	31
3.5 Equação de Movimento	34
3.6 Medida do Efeito Lense-Thirring	38
4 GRAVITOMAGNETISMO NA TEORIA DE BRANS-DICKE	42
4.1 Introdução	42

4.2	A Teoria de Brans-Dicke	42
4.3	Limite Newtoniano das Equações de Campo da Teoria de Brans-Dicke	44
4.4	Gravitomagnetismo na Teoria de Brans-Dicke	47
4.5	Efeito Lense-Thirring na Teoria de Brans-Dicke.....	50
4.6	Relação entre as Teorias da Relatividade Geral e de Brans-Dicke	51
4.7	Equação de Movimento	52
5	GRAVITOMAGNETISMO VARIÁVEL NO TEMPO NA TEORIA DE BRANS-DICKE.....	56
5.1	Introdução	56
5.2	Gravitomagnetismo Variável no Tempo: Relatividade Geral	56
5.3	Gravitomagnetismo Variável no Tempo: Teoria de Brans-Dicke	61
5.4	Atraso do Tempo (Time Delay) Gravitomagnético	63
5.5	Atraso do Tempo Gravitomagnético na Teoria de Brans-Dicke.....	66
	CONCLUSÃO	70
	Referências	72
	APÊNDICES.....	75
	Apêndice A - Resultados Úteis	75

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Precessões geodésica e de Lense-Thirring. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).	40
Figura 3.2	Medida da precessão de Lense-Thirring nos giroscópios do satélite Gravity Probe B. Figura retirada do site http://einstein.stanford.edu	41
Figura 5.1	Trajetória de um sinal de luz entre a Terra e um planeta. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).	63

1 INTRODUÇÃO

Pouco tempo depois que Einstein formulou a teoria da Relatividade Geral (LORENTZ, 2001), Lense e Thirring (1918) mostraram que uma consequência das equações de campo da teoria é um efeito de precessão (ou arrastamento) do referencial inercial local, que ficou conhecido como efeito Lense-Thirring. De acordo com este efeito, uma partícula orbitando em torno de corpos em rotação como a Terra e o Sol tem o seu plano orbital "arrastado" no mesmo sentido da rotação do corpo central. De modo equivalente, se um giroscópio, cujo eixo de rotação permanece fixo em um sistema inercial, for colocado na vizinhança de um corpo em rotação irá sofrer uma precessão em seu eixo (SCHIFF, 1960). O arrastamento dos sistemas inerciais pode ser considerado um efeito Machiano (MISNER, 1973), não sendo previsto pela teoria de Newton da gravitação.

Os efeitos da Relatividade Geral associados com a rotação de corpos podem ser melhor compreendidos utilizando-se uma analogia formal com a teoria eletromagnética. A idéia básica é que correntes de massa geram um campo, que por analogia com o eletromagnetismo, é chamado de campo gravitomagnético (CIUFOLINI, 1995). De fato, segundo a Relatividade Geral, matéria em movimento ou em rotação produz uma contribuição para o campo gravitacional que é o análogo do campo magnético de uma carga elétrica em movimento ou de um dipolo magnético.

Existem evidências indiretas da existência do gravitomagnetismo nos contextos astrofísico e do Sistema Solar (STELLA, 2003; NORDVEDT, 2001). Por outro lado, o campo gravitomagnético da Terra, através do efeito Lense-Thirring de arrastamento dos sistemas inerciais, também perturba a órbita de satélites. Então, a observação das órbitas dos satélites LAGEOS E LAGEOS 2, ao longo de vários anos, permitiu a verificação do gravitomagnetismo com uma precisão de cerca de 10% em relação à previsão da Relatividade Geral (CIUFOLINI, 2004; CIUFOLINI, 2006). Em abril de 2004, foi lançado o satélite Gravity Probe B (EVE-

RITT, 2001), uma missão espacial de aproximadamente um ano, que colocou giroscópios em órbita para medir a precessão em seus eixos por causa da rotação da Terra. Esses efeitos do gravitomagnetismo foram verificados com uma precisão estimada de 14% (GRAVITY PROBE B, 2009).

Outros efeitos do gravitomagnetismo, como por exemplo, o atraso do tempo (time delay) gravitacional para um raio de luz que se propaga na vizinhança de uma massa em rotação (CIUFOLINI, 2003) e a mudança na polarização das ondas eletromagnéticas (SERENO, 2005) têm sido estudados. Recentemente, uma nova linha de investigação surgiu abordando situações em que o momento angular da fonte varia com o tempo (MASHHOON, 2008; CHICONE, 2008; BINI, 2008; RUGGIERO, 2009). Realmente, objetos astronômicos, como as estrelas e os planetas, possuem em geral movimento de rotação, porém, a taxa de rotação raramente é uniforme. No caso da Terra, a diminuição da velocidade de rotação em torno do próprio eixo é muito lenta, mas ocorre devido principalmente ao efeito de atrito das marés com a superfície do planeta. Neste processo, a Terra perde momento angular que é transferido para o movimento orbital da Lua. Como consequência, a Lua se afasta da Terra a uma taxa de 4 *cm* por ano (BINI, 2008). Por sua vez, a diminuição da rotação da Terra faz com que o tempo medido pelos relógios atômicos e o tempo medido levando-se em conta a rotação da Terra (tempo terrestre) saiam de sincronia, sendo necessário acrescentar-se um segundo ao final de alguns anos para acertar as duas medições cronológicas.

A teoria da Relatividade Geral não é a única teoria de gravitação disponível. Existem outras alternativas teóricas que podem ser submetidas aos testes experimentais (WILL, 2005), entre as quais destacam-se as teorias escalares-tensoriais (BERGMANN, 1968; WAGONER, 1970; NORDTVEDT, 1970). Essas teorias métricas da gravitação introduzem um campo adicional, um campo escalar ϕ , que junto com a métrica $g_{\mu\nu}$ respondem pela descrição dos fenômenos gravitacionais. De um modo geral, o fator de acoplamento do campo escalar com a geometria é $\omega(\phi)$. Um caso particular ocorre se $\omega(\phi) = \omega = \text{constante}$, e temos então a teoria de Brans-Dicke (BRANS, 1961).

As teorias escalares-tensoriais, como a teoria de Brans-Dicke, são estudadas atualmente com vários propósitos, entre os quais destacamos alguns: podem ser o limite de baixas energias de teorias mais gerais que unifiquem a gravitação com outras interações ou a quantizem (FARAONI, 2009), verificação de testes experimentais da interação gravitacional (DAMOUR,

2000) e Cosmologia (WEINBERG, 2008).

Nesta dissertação, estudaremos o formalismo do gravitomagnetismo no contexto da teoria de Brans-Dicke. Para isso, usaremos a aproximação de campo fraco (HITZER, 1997) e um resultado (BARROS, 1998), que permite obter soluções de campo fraco na teoria de Brans-Dicke a partir de soluções conhecidas da Relatividade Geral. Procuraremos mostrar que é possível escrever as equações da gravitação de Brans-Dicke em uma forma tipo-Maxwell e daí, investigaremos alguns tópicos tais como o efeito Lense-Thirring e o atraso do tempo gravitacional. Consideraremos também os efeitos do campo gravitomagnético gerado pela variabilidade temporal do momento angular intrínseco de fontes materiais em rotação, calculando explicitamente o atraso do tempo gravitacional. Os resultados obtidos são comparados com aqueles previstos pela Relatividade Geral.

A dissertação tem a seguinte organização: no Capítulo 2, discutimos aspectos básicos da teoria gravitacional de Newton e apresentamos a teoria da Relatividade Geral, desenvolvendo a aproximação de campo fraco e o limite Newtoniano. Depois, no Capítulo 3, tratamos do formalismo do gravitomagnetismo na teoria da Relatividade Geral. No Capítulo 4, trabalhamos com o gravitomagnetismo no contexto da teoria de Brans-Dicke, mostrando que as equações da teoria podem ser escritas em uma forma tipo-Maxwell e explorando as consequências desse fato. Ainda, no Capítulo 5, estudamos um modelo de variação linear do momento angular da fonte de campo gravitacional, obtendo o valor do atraso do tempo gravitomagnético. O resultado é comparado com o da Relatividade Geral e as consequências são discutidas. Finalizamos com o Capítulo 6 de conclusões e perspectivas.

2 TEORIA DA GRAVITAÇÃO DE EINSTEIN

2.1 Introdução

Estudaremos a teoria de Newton da gravitação em seus aspectos básicos, enfatizando a lei de força e a equação de campo em termos do potencial gravitacional. Em seguida, introduziremos a teoria gravitacional de Einstein, apresentando as equações gerais de campo e as equações de movimento. Depois, encontraremos as equações de campo fraco e mostraremos que a Relatividade Geral possui o limite Newtoniano correto, tanto para as equações de campo como para as equações de movimento.

2.2 Teoria Gravitacional de Newton

As experiências de Galileu mostraram que a aceleração que um corpo adquire num campo gravitacional uniforme independe de sua massa (WEINBERG, 1972). Assim, Newton pôde inferir a igualdade entre as massas inercial e gravitacional. De fato, o conceito de massa inercial foi introduzido através da segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m_i \vec{a}, \quad (2.1)$$

onde \vec{F} é a força resultante que atua sobre o corpo, m_i sua massa inercial e \vec{a} a aceleração adquirida. Portanto, interpretamos a massa inercial como uma medida da inércia do corpo, isto é, da sua resistência a uma mudança de velocidade.

Segundo a teoria gravitacional de Newton, esse mesmo corpo é atraído gravitacionalmente por um outro conforme a lei,

$$\vec{F} = -G \frac{m_g M_g}{R^2} \hat{r}, \quad (2.2)$$

sendo m_g a massa gravitacional do corpo ao qual atribuímos a massa inercial m_i , M_g a massa gravitacional do outro corpo, R a distância entre eles, G uma constante universal e \hat{r} o vetor unitário na direção da reta que liga os corpos, com origem no corpo de massa M_g . Deve-se notar que a expressão da força gravitacional de Newton é válida para corpos puntiformes, ou que possam ser considerados como tal quando suas dimensões são pequenas quando comparadas com a distância entre eles. Combinando-se as equações (2.1) e (2.2), temos que o módulo da aceleração do corpo de massa m_g é

$$a = \frac{[(\frac{m_g}{m_i})GM_g]}{R^2}. \quad (2.3)$$

De acordo com Galileu, todos os corpos localizados à mesma distância R do corpo de massa M_g têm a mesma aceleração. Assim, a razão m_g/m_i deve ser uma constante universal. Sem perda de generalidade, podemos considerar que m_g e m_i possuem o mesmo valor numérico.

O fato de que os corpos caem com a mesma aceleração em um campo gravitacional é apenas uma coincidência na teoria de Newton. Porém, adquire um significado mais profundo na teoria gravitacional de Einstein, sendo a base do Princípio de Equivalência entre as forças inerciais e gravitacionais.

Medidas da diferença fracional η das acelerações a_1 e a_2 de dois corpos em queda em um campo gravitacional, definida como $\eta = \frac{2|a_1 - a_2|}{|a_1 + a_2|}$, indicam que (BAESSLER, 1999; WILLIAMS, 1996)

$$\eta < 4 \times 10^{-13}. \quad (2.4)$$

2.3 Equação de Campo da Gravitação de Newton

Vamos supor uma distribuição discreta de N partículas. A força gravitacional exercida pelas N partículas sobre uma partícula de massa m , em um ponto \vec{x} , é

$$\vec{F}(\vec{x}) = -Gm \sum_{i=1}^N m_i \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}, \quad (2.5)$$

onde, $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$ é a constante Gravitacional de Newton e \vec{x}_i é a posição da i -ésima partícula de massa m_i . Definimos a energia potencial gravitacional desse sistema de partículas como

$$V(\vec{x}) = -Gm \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|}, \quad (2.6)$$

de modo que

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\nabla V(\vec{x}). \quad (2.7)$$

A equação (2.7) pode ser facilmente verificada se usarmos o resultado

$$\nabla \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \right] = - \frac{(\vec{x} - \vec{x}_i)}{|\vec{x} - \vec{x}_i|^3}. \quad (2.8)$$

Por sua vez, o campo gravitacional é definido como

$$\vec{g}(\vec{x}) = \frac{\vec{F}(\vec{x})}{m}, \quad (2.9)$$

sendo o potencial gravitacional correspondente dado por

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{V(\vec{x})}{m}. \quad (2.10)$$

Então, temos de (2.7), (2.9) e (2.10) que

$$\vec{g}(\vec{x}) = -\nabla\Phi(\vec{x}). \quad (2.11)$$

E ainda, de (2.6) e (2.10), obtém-se

$$\Phi(\vec{x}) = -G \sum_{i=1}^N \left(\frac{m_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \right). \quad (2.12)$$

Para uma distribuição contínua de massa, temos que $\Phi(\vec{x})$ é definido por

$$\Phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}', \quad (2.13)$$

onde $\rho(\vec{x}')$ é a densidade de massa. Aplicando o operador Laplaciano em (2.13), temos

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}) = -G \int \rho(\vec{x}') \nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] d^3\vec{x}'. \quad (2.14)$$

Como,

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right] = -4\pi\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (2.15)$$

onde $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ é a função delta de Dirac, encontramos que

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}) = 4\pi G \int \rho(\vec{x}') \delta(\vec{x} - \vec{x}') d^3\vec{x}'$$

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x}), \quad (2.16)$$

a qual é a equação de campo da teoria da gravitação de Newton.

Podemos obter a equação de movimento para uma partícula sob a ação do potencial gravitacional Newtoniano combinando as equações (2.9) e (2.11). Assim, como

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d^2\vec{x}}{dt^2},$$

vem que

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\nabla\Phi. \quad (2.17)$$

2.4 Teoria gravitacional de Einstein

Para construir uma teoria relativística da gravitação, Einstein associou os efeitos gravitacionais com a existência de um espaço-tempo curvo de métrica $g_{\mu\nu}$, diferentemente do caso do espaço-tempo plano de Minkowski da Relatividade Especial (HARTLE, 2003). Na sua teoria, conhecida como Relatividade Geral, a distribuição de matéria-energia é que passa a determinar, de uma forma dinâmica, a geometria do espaço.

As equações de campo da Relatividade Geral são dadas por (MISNER, 1973)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, c é a velocidade da luz, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da distribuição material, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci e R o escalar de curvatura. Essas equações podem ser colocadas em uma outra forma. Para isso, pode-se contrair (2.18), obtendo-se

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T, \quad (2.19)$$

sendo $T = T^\mu{}_\mu$ o traço do tensor energia-momento. Substituindo (2.19) em (2.18) e rearranjando os termos, temos a forma alternativa das equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right]. \quad (2.20)$$

A equação de movimento das partículas no espaço-tempo curvo de Riemann é a equação das geodésicas (LANDAU, 1996)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.21)$$

com $x^\alpha = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$, $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(-g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu})$ são os símbolos de Christoffel, $g_{\mu\nu}$ a métrica do espaço-tempo e $g_{\mu\nu,\rho} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}$. O elemento de linha ds^2 é definido como $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. O segundo termo no lado esquerdo de (2.21) pode ser interpretado como a força gravitacional por unidade de massa que atua sobre a partícula.

Vamos mostrar que a equação (2.21) se reduz, no caso do espaço-tempo da Relatividade Especial (espaço de Minkowski), à equação de uma partícula sobre a qual não atua força gravitacional. Nesse espaço-tempo, a métrica é $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ e então,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\rho}(-\eta_{\mu\nu,\rho} + \eta_{\rho\mu,\nu} + \eta_{\nu\rho,\mu}) = 0. \quad (2.22)$$

Portanto, (2.21) fica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = 0. \quad (2.23)$$

Se $\alpha = 0$,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{dx^0}{ds} \right) = 0$$

$$\frac{dx^0}{ds} = \text{constante}. \quad (2.24)$$

Sem perda de generalidade, pode-se tomar $\frac{dx^0}{ds} = 1$. Logo, $ds = cdt$. Dessa forma, obtemos de (2.23) para $\alpha = 1, 2, 3$ que

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = 0, \quad (2.25)$$

que é a equação de movimento de uma partícula livre.

2.5 Aproximação de Campo Fraco

Na aproximação de campo fraco, consideraremos que a métrica pode ser escrita como

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

sendo $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ a métrica de Minkowski e $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Desprezando as potências de $h_{\alpha\beta}$ superiores à de primeira ordem, vamos escrever o tensor de Riemann como (LANDAU, 1996)

$$R_{\gamma\alpha\delta\beta} = \frac{1}{2} (h_{\gamma\beta,\alpha,\delta} + h_{\alpha\delta,\gamma,\beta} - h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} - h_{\gamma\delta,\alpha,\beta}). \quad (2.27)$$

Na mesma aproximação, o tensor de Ricci torna-se

$$R_{\alpha\beta} = R^{\delta}{}_{\alpha\delta\beta} = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta} = \eta^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta},$$

pois $g^{\gamma\delta} = \eta^{\gamma\delta} - h^{\gamma\delta}$. E logo,

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + h^{\gamma}{}_{\alpha,\beta,\gamma} + h^{\gamma}{}_{\beta,\alpha,\gamma} - h_{,\alpha,\beta} \right), \quad (2.28)$$

onde $h = h^{\gamma}{}_{\gamma}$. Portanto, (2.18) fica igual a

$$\left(-\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + h^{\gamma}{}_{\alpha,\beta,\gamma} + h^{\gamma}{}_{\beta,\alpha,\gamma} - h_{,\alpha,\beta} \right) - \eta_{\alpha\beta} R = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (2.29)$$

onde $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$.

Podemos escolher arbitrariamente quatro das dez componentes do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, o que significa impor aos $h_{\alpha\beta}$ quatro condições arbitrárias (LANDAU, 1996). Um conjunto de condições que em geral se utiliza é o das condições harmônicas (também chamado de “gauge” harmônico). As condições harmônicas são dadas pelas equações

$$\left(h^{\alpha}{}_{\beta} - \frac{1}{2} \delta^{\alpha}{}_{\beta} h \right)_{,\alpha} = 0, \quad (2.30)$$

que implicam também que

$$h^{\delta}_{\beta,\alpha,\delta} + h^{\delta}_{\alpha,\delta,\beta} - h_{,\alpha,\beta} = 0. \quad (2.31)$$

Substituindo (2.31) em (2.29), vem que

$$\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + \eta_{\alpha\beta} R = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (2.32)$$

Mas,

$$\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} = \square h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial t^2} + \nabla^2 h_{\alpha\beta}. \quad (2.33)$$

Logo, (2.32) torna-se

$$\square h_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} R = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (2.34)$$

Usando (2.19) em (2.34), obtemos as equações de campo fraco da teoria da Relatividade Geral:

$$\square h_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left[T_{\alpha\beta} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} T \right]. \quad (2.35)$$

Pode-se contrair a equação (2.35), encontrando-se que

$$\square h = -\frac{16\pi G}{c^4} (-T). \quad (2.36)$$

Por conveniência, vamos definir $\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$, de modo que

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = \square h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\square h. \quad (2.37)$$

Agora, substituindo (2.35) e (2.36) em (2.37), obtemos a seguinte equação de campo fraco em termos de $\bar{h}_{\alpha\beta}$:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (2.38)$$

2.6 Aproximação Newtoniana: Equações de Campo

Para tomar o limite Newtoniano da Relatividade Geral, vamos partir de (2.35), fazendo ainda as seguintes hipóteses: (i) a única componente não nula do tensor energia-momento é $T^0_0 = -\rho c^2$, sendo ρ a densidade de massa da distribuição de matéria; (ii) as componentes $h_{\alpha\beta}$ não variam apreciavelmente com o tempo. Dessa forma, teremos que

$$T = T^0_0 = -T_{00}, \quad (2.39)$$

e

$$\square h_{\alpha\beta} = \nabla^2 h_{\alpha\beta}. \quad (2.40)$$

A única equação independente a partir de (2.35) será aquela em que $\alpha = \beta = 0$. Assim, ficamos com

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right)$$

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho$$

$$\nabla^2 \left(-\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) = 4\pi G \rho. \quad (2.41)$$

Mas (LANDAU, 1996),

$$g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2} = -1 + h_{00},$$

onde Φ é o potencial Newtoniano. Portanto,

$$-\frac{c^2 h_{00}}{2} = \Phi. \quad (2.42)$$

Então, levando (2.42) em (2.41) recuperamos a equação de campo (2.16) da teoria gravitacional de Newton.

2.7 Aproximação Newtoniana: Equações de Movimento

Como vimos, a equação de movimento das partículas na Relatividade Geral é a equação da geodésica dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

com $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (-g_{\alpha\beta,\rho} + g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha})$. Se adotarmos as restrições da seção anterior de que o campo gravitacional é fraco e estacionário, isto é, $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ e $g_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}(t)$, além de considerar que as partículas se movem com baixas velocidades em comparação com a velocidade da luz, de modo que

$$\left| \frac{d\vec{x}}{ds} \right| \ll \frac{dx^0}{ds} = c \frac{dt}{ds}, \quad (2.43)$$

iremos obter a equação de movimento da teoria gravitacional de Newton. Assim, usando (2.43), a equação da geodésica fica

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{00}^\mu \frac{dx^0}{ds} \frac{dx^0}{ds} = 0$$

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{ds} \right)^2 = 0. \quad (2.44)$$

Por sua vez,

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (-g_{00,\rho} + g_{\rho 0,0} + g_{0\rho,0}) = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (-g_{00,\rho})$$

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho} - h^{\mu\rho})(\eta_{00} + h_{00})_{,\rho}$$

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho} - h^{\mu\rho})h_{00,\rho}$$

$$\Gamma_{00}^{\mu} = -\frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}h_{00,\rho}. \quad (2.45)$$

Retornando com (2.45) em (2.44), temos

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\rho}h_{00,\rho} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0. \quad (2.46)$$

Para $\mu = 0$, vem que

$$\frac{d^2x^0}{ds^2} - \frac{1}{2}\eta^{00}h_{00,0} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = \frac{d^2x^0}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dx^0}{ds}\right) = 0.$$

Daí, pode-se tomar $ds = cdt$. Para $\mu = 1$, ficamos com

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} - \frac{1}{2}\eta^{11}h_{00,1} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x^1}{ds^2} - \frac{1}{2}h_{00,1} = 0. \quad (2.47)$$

Para $\mu = 2$,

$$\frac{d^2x^2}{ds^2} - \frac{1}{2}h_{00,2} = 0. \quad (2.48)$$

Para $\mu = 3$,

$$\frac{d^2 x^3}{ds^2} - \frac{1}{2} h_{00,3} = 0. \quad (2.49)$$

Então, obtemos

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} - \frac{1}{2} \nabla h_{00} = 0$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}.$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{c^2 dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \nabla \left(\frac{c^2}{2} h_{00} \right).$$

Com a ajuda de (2.42), a equação anterior se torna igual a (2.17), a qual é a equação de movimento de Newton para uma partícula sujeita à ação de um campo gravitacional.

3 GRAVITOMAGNETISMO

3.1 Introdução

Neste capítulo, introduziremos o formalismo do gravitomagnetismo no contexto da Teoria da Relatividade Geral, através da definição dos potenciais gravitoeletrico e gravitomagnético. Em seguida, faremos o cálculo da métrica associada a esses potenciais e mostraremos que é possível escrever as equações da gravitação de Einstein em uma forma semelhante às equações de Maxwell do eletromagnetismo. Obteremos ainda uma expressão da força que atua sobre uma partícula material sujeita à ação dos potenciais gravitacionais, finalizando com uma seção sobre a medida do efeito Lense-Thirring.

3.2 Potenciais Gravitoeletrico e Gravitomagnético

Na aproximação de campo fraco da Relatividade Geral, consideramos que o tensor métrico se desvia ligeiramente do tensor métrico do espaço-tempo plano. Assim, temos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ denota o tensor métrico de Minkowski e $h_{\mu\nu}$ é um termo de perturbação. Então, mantendo apenas termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$, as equações de Einstein ficam iguais, conforme visto no capítulo anterior, a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $\bar{h}_{\nu}^{\mu} = h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} h$ e adotamos o gauge harmônico $(h_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} h)_{,\mu} = 0$.

A solução geral de (3.1) é a superposição de uma solução particular com uma solução geral da equação de onda. Estamos interessados, porém, apenas na solução particular

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\mu\nu}(ct - |\vec{r} - \vec{r}'|, \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3x'. \quad (3.2)$$

Assumindo que a fonte material consiste de uma distribuição finita de matéria e que todos os movimentos em seu interior satisfazem a $|\vec{v}| \ll c$, o tensor energia-momento terá as seguintes componentes:

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho c^2, \\ T_{0i} &= -c j_i, \\ T_{ij} &= \rho v_i v_j + p \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde ρ é a densidade de matéria, $\vec{j} = \rho \vec{v}$ é a corrente de matéria e p a pressão da fonte.

A partir da expressão para T_{ij} e da equação (3.2), tem-se que

$$\bar{h}_{ij} = O(c^{-4}). \quad (3.4)$$

Termos dessa ordem serão desprezados também e logo apenas \bar{h}_{00} e \bar{h}_{0i} serão relevantes aqui. Façamos agora as seguintes definições (CIUFOLINI, 2003):

$$\bar{h}_{00} \equiv \frac{4\Phi}{c^2}, \quad (3.5)$$

$$\bar{h}_{0i} \equiv -\frac{2A_i}{c^2}, \quad (3.6)$$

sendo Φ o potencial gravitoeletrico e \vec{A} o potencial vetor gravitomagnético. Com essas definições para \bar{h}_{00} e \bar{h}_{0i} , além das expressões para T_{00} e T_{0i} dadas por (3.3), obtemos de (3.1) que

$$\square \Phi = -4\pi G \rho, \quad (3.7)$$

$$\square A_i = -\frac{8\pi G}{c} j_i. \quad (3.8)$$

No caso estacionário, (3.7) e (3.8) ainda ficam iguais a

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi G \rho, \quad (3.9)$$

$$\nabla^2 A_i = -\frac{8\pi G}{c} j_i. \quad (3.10)$$

Se a distribuição de matéria está confinada em torno da origem das coordenadas espaciais, então distante da fonte teremos, a partir de (3.9) e (3.10), as soluções

$$\Phi = \frac{GM}{r}, \quad (3.11)$$

$$\vec{A} = \frac{G(\vec{J} \times \vec{r})}{cr^3}, \quad (3.12)$$

onde $r = |\vec{r}|$ e M e \vec{J} são a massa e o momento angular da fonte, respectivamente. A solução (3.11) é imediatamente verificada se tomarmos $\rho = M\delta(\vec{r})$ como a densidade de massa da fonte em (3.9):

$$\nabla^2 \Phi = GM \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi GM \delta(\vec{r}) = -4\pi G \rho. \quad (3.13)$$

Por sua vez, a solução (3.12) pode ser obtida se considerarmos o análogo eletromagnético (JACKSON, 1983), isto é, no caso estacionário adotando-se o gauge de Coulomb, o potencial vetor magnético \vec{a} satisfaz a

$$\nabla^2 a_i = -\frac{4\pi}{c} \sigma_i, \quad (3.14)$$

onde $\vec{\sigma}$ é a densidade de corrente elétrica. A solução de (3.14) para pontos distantes de uma

distribuição localizada de correntes é

$$\vec{a} = \frac{q}{2Mc} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (3.15)$$

sendo \vec{J} o momento angular da distribuição, q a carga e M a massa. Se compararmos (3.10) e (3.14) podemos fazer as identificações $a_i \rightarrow A_i$ e $\sigma_i \rightarrow 2Gj_i$, sendo que essa última significa também $q \rightarrow 2GM$. Assim, com $q \rightarrow 2GM$ e $\vec{a} \rightarrow \vec{A}$ a equação (3.15) se torna igual a (3.12).

Com as definições para \bar{h}_{00} e \bar{h}_{0i} dadas pelas equações (3.5) e (3.6), obtemos a partir da condição do gauge harmônico $\bar{h}^{\mu\nu}_{,\mu} = 0$, a equação

$$\bar{h}^{00}_{,0} + \bar{h}^{10}_{,1} + \bar{h}^{20}_{,2} + \bar{h}^{30}_{,3} = 0, \quad (3.16)$$

ou seja,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{4\Phi}{c^2} \right) + \frac{2}{c^2} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{A}}{2} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Esta equação é o análogo gravitacional do gauge de Lorenz do eletromagnetismo.

3.3 Cálculo da Métrica

Pode-se obter a métrica associada aos potenciais gravitacionais. Para isso, calcula-se $h_{\mu\nu}$ a partir dos valores conhecidos de $\bar{h}_{\mu\nu}$, uma vez que essas duas quantidades estão relacionadas pela equação $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. De fato, vamos obter

$$\bar{h}_{0i} = h_{0i} - \frac{1}{2}\eta_{0i}h = h_{0i}. \quad (3.18)$$

Se $i \neq j$,

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} - \frac{1}{2}\eta_{ij}h = h_{ij} = 0. \quad (3.19)$$

Se $i = j$,

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{h}{2}. \quad (3.20)$$

Mas, $h = -h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}$. Então,

$$\bar{h}_{00} = h_{00} - \frac{1}{2}\eta_{00}h = \frac{1}{2}(h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}). \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) em (3.21), temos que

$$h = 2h_{00}. \quad (3.22)$$

Agora, levando (3.22) em (3.21), vem que

$$h_{00} = \frac{\bar{h}_{00}}{2}. \quad (3.23)$$

E ainda, combinando-se (3.20), (3.22) e (3.23), encontramos que

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{\bar{h}_{00}}{2}. \quad (3.24)$$

Com a ajuda das equações (3.18), (3.19), (3.23) e (3.24), o elemento de linha do espaço-tempo pode ser construído:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu, \quad (3.25)$$

que resulta em

$$ds^2 = (-1 + h_{00})(dx^0)^2 + (1 + h_{11})(dx)^2 + (1 + h_{22})(dy)^2 + (1 + h_{33})(dz)^2 \\ + 2h_{01}dx^0 dx + 2h_{02}dx^0 dy + 2h_{03}dx^0 dz$$

$$ds^2 = \left(-1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ - \frac{4}{c^2} (A_x dx + A_y dy + A_z dz) c dt$$

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) dt^2 + \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) \delta_{ij} dx^i dx^j - \frac{4}{c} (\vec{A} \cdot d\vec{r}) dt. \quad (3.26)$$

3.4 Equações de Campo tipo-Maxwell

Agora, em analogia com o eletromagnetismo, vamos definir os campos em termos dos potenciais. Assim, seja \vec{E} o campo gravitoeelétrico e \vec{B} o campo gravitomagnético, com

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}}{2}\right), \quad (3.27)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.28)$$

Se efetuarmos as operações $\nabla \times \vec{E}$ em (3.27) e $\nabla \cdot \vec{B}$ em (3.28), obtemos as equações homogêneas tipo-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}}{2}\right), \quad (3.29)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{B}}{2} \right) = 0. \quad (3.30)$$

O outro par de equações tipo-Maxwell, as equações não-homogêneas, pode ser obtido das equações de campo (3.1).

De fato,

$$\begin{aligned} \square \bar{h}_{00} &= -\frac{16\pi G}{c^4} T_{00} \\ \square \left(\frac{4\Phi}{c^2} \right) &= -\frac{16\pi G}{c^4} \cdot \rho c^2 \\ -\frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2} \nabla^2 \Phi &= -\frac{4\pi G}{c^2} \rho \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla \cdot \nabla \Phi &= -4\pi G \rho. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando-se a equação (3.27), temos que (3.31) torna-se igual a

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left[-\vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}}{2} \right) \right] &= -4\pi G \rho \\ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla \cdot \vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\vec{A}}{2} \right) \right] &= -4\pi G \rho. \end{aligned}$$

Com o auxílio de (3.17) ainda teremos

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \nabla \cdot \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi G \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi G\rho, \quad (3.32)$$

que é a primeira das equações não-homogêneas. A outra equação pode ser obtida fazendo-se

$$\square \bar{h}_{0i} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}$$

$$\square \left(-\frac{2A_i}{c^2} \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} \cdot (-c j_i)$$

$$\frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 A_i}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \nabla^2 A_i = \frac{8\pi G}{c^3} j_i,$$

ou seja,

$$\frac{1}{c^4} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \nabla^2 \vec{A} = \frac{8\pi G}{c^3} \vec{j}. \quad (3.33)$$

Porém, sabemos que $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$. Logo, (3.33) fica

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \left[\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times \nabla \times \vec{A} \right] = \frac{8\pi G}{c} \vec{j}. \quad (3.34)$$

Com (3.17) e (3.28), a equação (3.34) pode ser escrita como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \left[\nabla \left(-\frac{2}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \nabla \times \vec{B} \right] = \frac{8\pi G}{c} \vec{j}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi) + \nabla \times \vec{B} = \frac{8\pi G}{c} \vec{j}. \quad (3.35)$$

Usando-se (3.27) em (3.35), segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}}{2} \right) \right] + \nabla \times \vec{B} &= \frac{8\pi G}{c} \vec{j} \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{2} \right) &= \frac{4\pi G}{c} \vec{j} \\ \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{2} \right) &= \frac{4\pi G}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Assim, observando-se as equações (3.29), (3.30), (3.32) e (3.36), conclui-se que é possível escrever as equações da gravitação de Einstein em uma forma semelhante às equações de Maxwell do eletromagnetismo, quando consideramos as aproximações de campo fraco e de baixa velocidade de rotação da fonte.

3.5 Equação de Movimento

A Lagrangiana para o movimento de uma partícula teste de massa m sob a ação dos potenciais Φ e \vec{A} é $L = -mc \frac{dS}{dt}$ (LANDAU, 1996), sendo que

$$dS^2 = -ds^2 = c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) dt^2 + \frac{4}{c} \left(\vec{A} \cdot d\vec{r} \right) dt - \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (3.37)$$

Então,

$$\frac{dS^2}{dt^2} = c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) + \frac{4}{c} \left(\vec{A} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$$

$$\frac{dS^2}{dt^2} = c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) + \frac{4}{c} \left(\vec{A} \cdot \vec{v} \right) - \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) \delta_{ij} v^i v^j$$

$$\frac{dS^2}{dt^2} = c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) + \frac{4}{c} \left(\vec{A} \cdot \vec{v} \right) - \left(1 + 2 \frac{\Phi}{c^2} \right) v^2$$

$$\frac{dS^2}{dt^2} = c^2 - v^2 - 2\Phi \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{4}{c} (\vec{A} \cdot \vec{v})$$

$$\frac{dS^2}{dt^2} = (c^2 - v^2) \left[1 + \frac{1}{c^2 - v^2} \left(-2\Phi \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{4}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}\right)\right]. \quad (3.38)$$

Daí, mantendo apenas termos de primeira ordem em Φ e \vec{A} , vem que

$$\frac{dS}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[1 + \frac{1}{2c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(-2\Phi \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{4}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}\right)\right]. \quad (3.39)$$

Portanto, a Lagrangiana fica

$$L = -mc \frac{dS}{dt} = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + m\gamma \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \Phi - \frac{2m}{c} \gamma \vec{A} \cdot \vec{v}, \quad (3.40)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Para um campo gravitacional fraco, faremos a hipótese que a partícula material tem baixa velocidade em comparação com a velocidade da luz (LANDAU, 1996) e manteremos termos só até a ordem $\frac{v^2}{c^2}$. Então, obtemos de (3.40) que

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + m\Phi \left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{2m}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \vec{A} \cdot \vec{v}$$

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + m\Phi \left(1 + \frac{3v^2}{2c^2}\right) - \frac{2m}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right) \vec{A} \cdot \vec{v}$$

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + m\Phi - \frac{2m}{c} \vec{A} \cdot \vec{v}. \quad (3.41)$$

Esta Lagrangiana é análoga à Lagrangiana do caso eletromagnético (JACKSON, 1983):

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - e\Phi_E + \frac{e}{c} \vec{a} \cdot \vec{v}, \quad (3.42)$$

que se refere ao movimento de uma partícula de massa m e carga e , submetida à ação dos potenciais elétrico Φ_E e magnético \vec{a} .

Agora, vamos calcular a força que atua sobre a partícula. Para isso, usaremos as equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (3.43)$$

com L dado por (3.41). Para a componente x devemos ter:

$$\frac{\partial L}{\partial v_x} = m\gamma v_x - 2\frac{m}{c}A_x,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{2m}{c} \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + m \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Logo, (3.43) fica

$$\frac{d}{dt} (m\gamma v_x) - 2\frac{m}{c} \frac{dA_x}{dt} = -\frac{2m}{c} \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + m \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (m\gamma v_x) &= -\frac{2m}{c} \left[v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + m \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ &\quad + 2\frac{m}{c} \left(\frac{\partial A_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} (m\gamma v_x) = m \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) - \frac{2m}{c} \left(v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(m\gamma v_x) = & -\frac{2m}{c} \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right] \\ & -m \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Como $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ e $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, com $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$, temos

$$\begin{aligned} F_x = & -m \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) - \frac{2m}{c} (v_y B_z - v_z B_y) \\ F_x = & -m \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{2}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right) - \frac{2m}{c} (\vec{v} \times \vec{B})_x \end{aligned} \quad (3.45)$$

De modo semelhante, pode-se fazer o cálculo para as componentes y e z em (3.43). O resultado é

$$F_y = -m \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{2}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right) - \frac{2m}{c} (\vec{v} \times \vec{B})_y, \quad (3.46)$$

$$F_z = -m \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{2}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) - \frac{2m}{c} (\vec{v} \times \vec{B})_z. \quad (3.47)$$

As equações (3.45)-(3.47) podem ser combinadas na equação vetorial

$$\vec{F} = -m \left(-\nabla \Phi - \frac{2}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) - \frac{2m}{c} \vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.48)$$

a qual é a equação de movimento procurada. Nota-se que, de um modo geral, a equação de movimento de uma partícula sob a ação dos potenciais gravitoeletrico e gravitomagnético não tem a forma da força de Lorentz (BINI, 2008), pois o termo entre parênteses em (3.48) não corresponde ao campo gravitoeletrico \vec{E} definido em (3.27). Porém, no caso estacionário, em que $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$, encontramos que

$$\vec{F} = -m(-\nabla\Phi) - \frac{2m}{c}\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\vec{F} = -m\vec{E} - \frac{2m}{c}\vec{v} \times \vec{B}, \quad (3.49)$$

isto é, a equação de movimento fica agora numa forma tipo-força de Lorentz.

3.6 Medida do Efeito Lense-Thirring

Na teoria eletromagnética, o campo magnético \vec{b} para pontos distantes de uma distribuição localizada e estacionária de correntes é $\vec{b} = \nabla \times \vec{a}$, onde \vec{a} é dado por (3.15). Então,

$$\vec{b} = \nabla \times \vec{a} = \frac{q}{2Mc} \nabla \times \left[\frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} \right].$$

Logo (JACKSON, 1983),

$$\vec{b} = \frac{q}{2Mc} \left[\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{J}) - \vec{J}}{r^3} \right], \quad (3.50)$$

sendo \hat{n} um vetor unitário radial. Mais uma vez, fazendo-se a identificação $q \rightarrow 2GM$, obtemos imediatamente o campo gravitomagnético correspondente

$$\vec{B} = \frac{G}{c} \left[\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{J}) - \vec{J}}{r^3} \right]. \quad (3.51)$$

O efeito Lense-Thirring consiste na precessão de giroscópios relativamente às estrelas distantes, ou, equivalentemente, no "arrastamento" dos sistemas inerciais, sendo um efeito causado pelo campo gravitomagnético (CAPOZZIELLO, 2009). Denotando o momento angular do giroscópio e a velocidade angular de precessão por \vec{S} e $\vec{\Omega}$, respectivamente, então o torque agindo sobre o giroscópio, de acordo com a Relatividade Geral (SCHIFF, 1960), é dado por

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{S}, \quad (3.52)$$

com

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{B}}{c} = \frac{G}{c^2} \left(\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{J}) - \vec{J}}{r^3} \right). \quad (3.53)$$

Assim, percebe-se através das equações (3.52) e (3.53) que o torque $\vec{\tau}$ sobre o eixo do giroscópio está diretamente relacionado com o campo gravitomagnético \vec{B} .

Uma medida do efeito Lense-Thirring foi efetuada pelo satélite Gravity Probe B, lançado em 2004 pela NASA. Esse satélite continha quatro giroscópios, cujas precessões em seus eixos foram medidas ao longo de aproximadamente um ano, enquanto o satélite percorria uma órbita polar em torno da Terra, a cerca de 650 km de altura. De fato, devem ocorrer duas precessões sobre os eixos dos giroscópios, conforme ilustrado na figura 3.1: uma por causa do campo gravitoelétrico, a precessão geodésica, de magnitude estimada em 6,6 segundos de arco por ano e a precessão de Lense-Thirring, um efeito de cerca de 0,05 segundos de arco por ano.

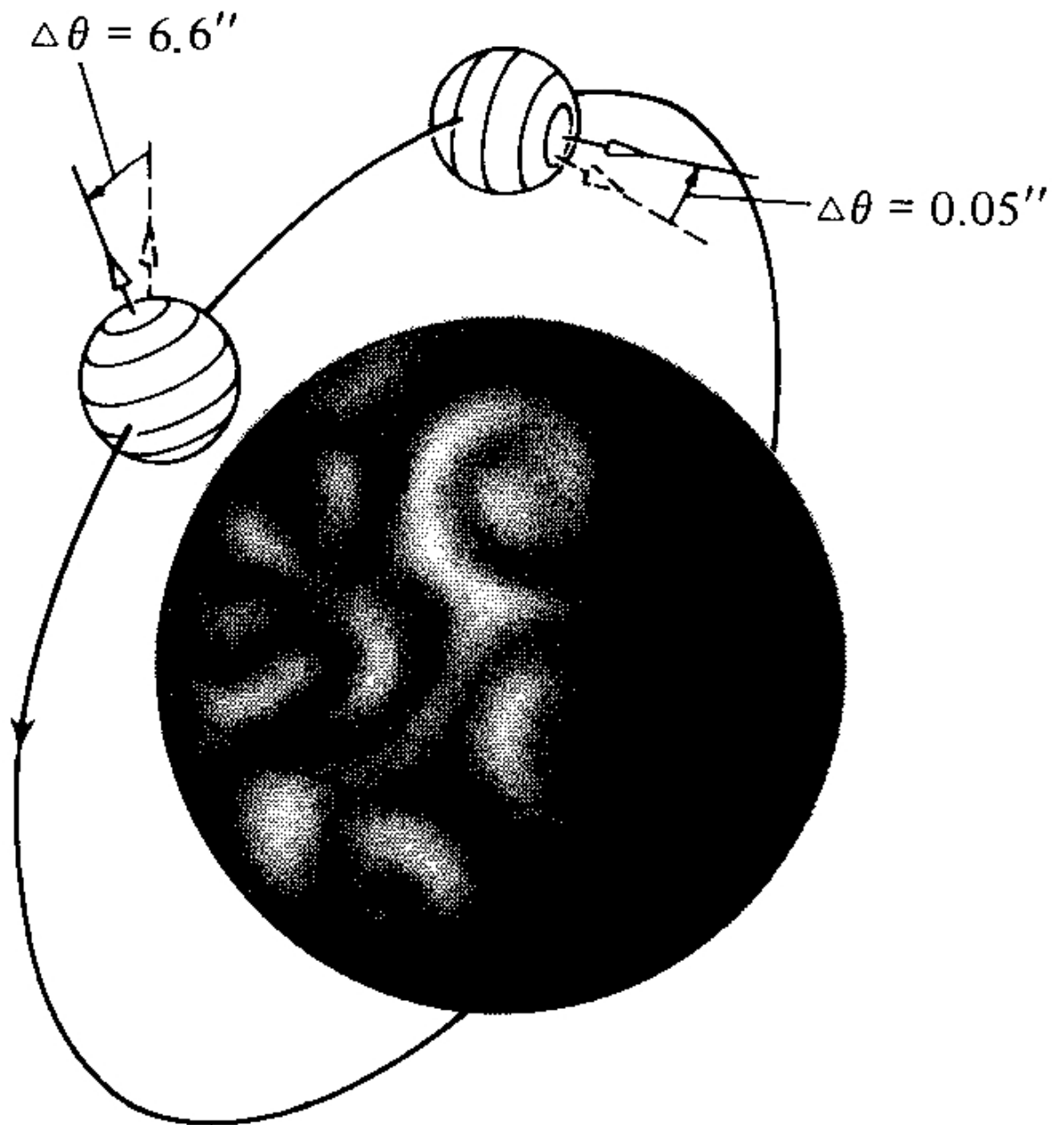


Figura 3.1: Precessões geodésica e de Lense-Thirring.
Figura editada, retirada de Ohanian (1976).

Ao final do experimento, os dois efeitos foram observados. Porém, em relação ao efeito Lense-Thirring, havia uma expectativa de uma medida com precisão de 1% ou melhor em relação à previsão da Relatividade Geral, mas fontes inesperadas de erros surgiram quando da análise dos dados, de modo que a assinatura do efeito Lense-Thirring foi verificada, porém com uma precisão estimada de 14% (GRAVITY PROBE B, 2009). Na figura 3.2, indicam-se os resultados da precessão do eixo para cada giroscópio (pontos em azul) em comparação com o valor teórico (linha vermelha). De acordo com a figura podemos notar que a melhor medida foi do giroscópio 2 e a que apresentou uma maior dispersão foi a medida do giroscópio 3.

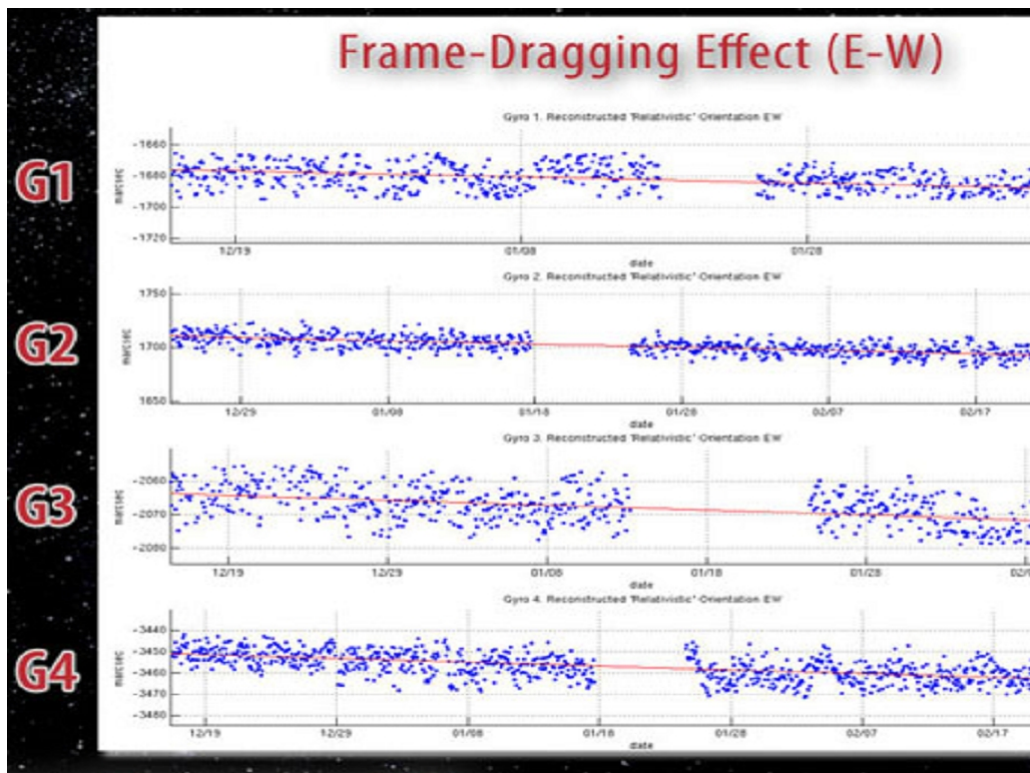


Figura 3.2: Medida da precessão de Lense-Thirring nos giroscópios do satélite Gravity Probe B. Figura retirada do site <http://einstein.stanford.edu>.

O campo gravitomagnético da Terra, através do efeito Lense-Thirring de arrastamento dos sistemas inerciais, também perturba a órbita de satélites. Assim, a observação das órbitas dos satélites LAGEOS E LAGEOS 2 ao longo de vários anos, permitiu a verificação do efeito com uma precisão de cerca de 10% em relação à previsão da Relatividade Geral (CIUFOLINI, 2004; CIUFOLINI, 2006).

4 GRAVITOMAGNETISMO NA TEORIA DE BRANS-DICKE

4.1 Introdução

Com o intuito de desenvolver o formalismo do gravitomagnetismo na teoria de Brans-Dicke, iremos introduzir os conceitos básicos da teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke, como as suas equações de campo, mostrando em seguida que ela tem um limite Newtoniano apropriado. Em continuação, verificaremos que é possível definir os potenciais gravitoelétrico e gravitomagnético, de modo similar ao da Relatividade Geral, e daí os campos gravitoelétrico e gravitomagnético, escrevendo as equações de campo em uma forma tipo-Maxwell. Faremos uma análise do efeito Lense-Thirring nesse contexto e depois apresentaremos um teorema que permite obter soluções das equações de campo da teoria de Brans-Dicke a partir de soluções conhecidas da Relatividade Geral. Finalmente, obteremos a equação de movimento para uma partícula sob a ação dos campos gravitoelétrico e gravitomagnético.

4.2 A Teoria de Brans-Dicke

Em 1961, Brans e Dicke (BRANS, 1961) propuseram uma teoria onde os efeitos gravitacionais são descritos pela métrica do espaço-tempo e por um campo escalar relacionado com G , a constante gravitacional de Newton. Para introduzir G como um campo variável numa teoria relativística da gravitação, Brans e Dicke generalizaram o princípio variacional da Relatividade Geral

$$\delta \int [R - 8\pi GL] \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (4.1)$$

onde R é o escalar de curvatura e L a densidade Lagrangiana de matéria. Eles identificaram G^{-1} com ϕ , sendo ϕ um campo escalar. Então, Dividindo-se (4.1) por G e colocando-se a expressão para $G(\phi) = \frac{1}{\phi}$, vem que

$$\delta \int \left[\phi R - 8\pi L - \frac{\omega \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}{\phi} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (4.2)$$

Nessa expressão, o terceiro termo é a densidade Lagrangiana usual para o campo escalar, sendo que o fator ϕ que aparece no denominador é para permitir que a constante de acoplamento ω seja adimensional. Por sua vez, a densidade Lagrangiana de matéria L é função dos campos de matéria e da métrica $g_{\mu\nu}$, como na Relatividade Geral, mas não do campo escalar ϕ . Dessa forma, as equações de movimento da matéria sob a influência do campo métrico externo são as equações das geodésicas. Portanto, o campo escalar contribui para a determinação da métrica, mas uma vez que $g_{\mu\nu}$ é determinado, o movimento dos corpos ocorre como na Relatividade Geral (WEINBERG, 1972).

Para obter-se as equações de campo, faz-se a variação de (4.2) em relação aos campos ϕ e $g_{\mu\nu}$. Com esse procedimento, encontram-se as equações de campo da teoria de Brans-Dicke (ADLER, 1975):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (4.3)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3)c^4}, \quad (4.4)$$

onde $\square \phi = g^{\sigma\gamma} \phi_{,\gamma;\sigma}$, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento do conteúdo material e T o seu traço. O valor de ω , a constante de acoplamento do campo escalar com a geometria, não é determinado pela teoria devendo ser fixado *a posteriori*. De acordo com as observações experimentais, este valor é estimado em 40.000 (BERTOTTI, 2003; WILL, 2005).

As equações de campo da teoria de Brans-Dicke podem ser colocadas em uma forma

alternativa, a qual é conveniente em alguns casos. Para vermos isso, consideremos que o tensor de Einstein é dado por $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ e façamos a contração de (4.3)

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}) \\ + \frac{1}{\phi}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu;\nu} - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\square\phi),$$

isto é,

$$R - \frac{1}{2} \cdot 4R = \frac{8\pi}{\phi c^4}T + \frac{\omega}{\phi^2}(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} - \frac{1}{2} \cdot 4\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{\phi}(\square\phi - 4\square\phi)$$

$$R = -\frac{8\pi}{\phi c^4}T + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + \frac{3}{\phi}\square\phi. \quad (4.5)$$

Levando (4.5) em (4.3), segue que

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\square\phi}{\phi} + \frac{1}{\phi}\phi_{,\mu;\nu}. \quad (4.6)$$

Com a substituição de (4.4) em (4.6), obtemos que

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{\phi}\phi_{,\mu;\nu}. \quad (4.7)$$

O conjunto de equações (4.7) e (4.4) é a forma alternativa das equações de campo da teoria de Brans-Dicke.

4.3 Limite Newtoniano das Equações de Campo da Teoria de Brans-Dicke

Na aproximação de campo fraco da teoria de Brans-Dicke, vamos supor que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (4.8)$$

e também,

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon = \phi_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\phi_0} \right), \quad (4.9)$$

sendo $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, ϕ_0 uma constante, e ε um termo de primeira ordem na densidade de energia, de modo que $|\varepsilon/\phi_0| \ll 1$. Assim, apenas os termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ e ε serão considerados. Com as condições (4.8) e (4.9), as equações (4.7) e (4.4) ficam

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi_0 c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) T \right] + \frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0}, \quad (4.10)$$

$$\square \varepsilon = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3) c^4}, \quad (4.11)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci em primeira aproximação (MISNER, 1973), dado por

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-\eta^{\beta\gamma} h_{\mu\nu,\beta,\gamma} + h^{\beta}_{\mu,\nu,\beta} + h^{\beta}_{\nu,\mu,\beta} - h_{,\mu,\nu}). \quad (4.12)$$

Ainda tem-se que,

$$\square \phi = g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha;\beta} = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\phi_{,\alpha})_{;\beta}$$

$$\square \phi = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\varepsilon_{,\alpha})_{;\beta} = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\varepsilon_{,\alpha,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \varepsilon_{,\lambda})$$

$$\square \phi = \eta^{\alpha\beta} (\varepsilon_{,\alpha,\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} \varepsilon_{,\lambda}) = \eta^{\alpha\beta} \varepsilon_{,\alpha,\beta} = \square \varepsilon, \quad (4.13)$$

uma vez que os símbolos de Christoffel são,

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(-g_{\alpha\beta,\rho} + g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha}) = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\rho} - h^{\lambda\rho})(-h_{\alpha\beta,\rho} + h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\beta\rho,\alpha})$$

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(-h_{\alpha\beta,\rho} + h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\beta\rho,\alpha}). \quad (4.14)$$

Adicionalmente, verifica-se que

$$\square h_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}h_{\mu\nu,\alpha,\beta}, \quad (4.15)$$

de modo que o tensor de Ricci pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + h^\beta_{\mu,\nu,\beta} + h^\beta_{\nu,\mu,\beta} - h_{,\mu,\nu}). \quad (4.16)$$

As equações (4.10) e (4.11) são as equações de campo de Brans-Dicke na aproximação de campo fraco. Similarmente à Relatividade Geral, podem-se escolher quatro condições arbitrárias a serem satisfeitas por $h_{\mu\nu}$ (LANDAU, 1996), de maneira a simplificar a equação (4.10).

Na sequência, vamos tomar o limite Newtoniano da teoria de Brans-Dicke. Inicialmente, supõe-se que os campos tenham uma variação pequena com o tempo. Então, é admissível que

$$h^\beta_{0,0,\beta} = h_{,0,0} \approx 0, \quad \square h_{00} \approx \nabla^2 h_{00}, \quad \varepsilon_{,0,0} \approx 0. \quad (4.17)$$

Por outro lado, na aproximação Newtoniana, a única equação relevante que segue de (4.10) é

$$\frac{1}{2}(-\square h_{00} + 2h^\beta_{0,0,\beta} - h_{,0,0}) = \frac{8\pi}{\phi_0 c^4} \left[T_{00} - \frac{\eta_{00}}{2} \left(\frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) T \right] + \frac{\varepsilon_{,0,0}}{\phi_0}. \quad (4.18)$$

Considerando-se que o tensor energia-momento é determinado quase que exclusivamente pela densidade ρ de matéria, tem-se que $T \approx T^0_0 = -T_{00} = -\rho c^2$. Portanto, (4.18) torna-se

$$-\nabla^2 \left(\frac{h_{00}}{2} \right) = \frac{8\pi}{\phi_0 c^2} \left[\rho - \left(\frac{\omega + 1}{2\omega + 3} \right) \rho \right] = 4\pi\rho \left[\frac{2\omega + 4}{\phi_0 c^2 (2\omega + 3)} \right]. \quad (4.19)$$

Sabendo-se que $g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}$, sendo Φ o potencial Newtoniano (LANDAU, 1996), e como $g_{00} = -1 + h_{00}$, temos que $-\frac{c^2 h_{00}}{2} = \Phi$. Então, (4.19) fica igual a

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \left[\frac{2\omega + 4}{\phi_0 (2\omega + 3)} \right] \rho. \quad (4.20)$$

Se compararmos (4.20) com a equação de campo da gravitação Newtoniana, $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$, identificaremos o valor da constante ϕ_0 para que a teoria de Brans-Dicke possua o limite Newtoniano bem definido:

$$\phi_0 = \frac{1}{G} \left(\frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right). \quad (4.21)$$

4.4 Gravitomagnetismo na Teoria de Brans-Dicke

Vamos definir os campos gravitoeletrico e gravitomagnético na teoria de Brans-Dicke. Para isso, consideremos inicialmente o gauge de Brans-Dicke (BRANS, 1961), dado por $(h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu h)_{,\mu} = \frac{\mathcal{E}_{,\nu}}{\phi_0}$, no qual é válida também a relação

$$h^\beta_{\mu,\nu,\beta} + h^\beta_{\nu,\mu,\beta} - h_{,\mu,\nu} = 2 \frac{\mathcal{E}_{,\mu,\nu}}{\phi_0}. \quad (4.22)$$

Substituindo-se (4.22) em (4.16), o tensor de Ricci torna-se

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\square h_{\mu\nu} + 2 \frac{\mathcal{E}_{,\mu,\nu}}{\phi_0} \right] = -\frac{\square h_{\mu\nu}}{2} + \frac{\mathcal{E}_{,\mu,\nu}}{\phi_0}. \quad (4.23)$$

Logo, (4.10) fica

$$-\frac{\square h_{\mu\nu}}{2} + \frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0} = \frac{8\pi}{\phi_0 c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] + \frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0},$$

ou seja,

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right]. \quad (4.24)$$

Agora, definindo-se

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h - \varepsilon G_0 \eta_{\mu\nu}, \quad (4.25)$$

onde $G_0 \equiv \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4} \right) G = \frac{1}{\phi_0}$, pode-se calcular

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h - G_0 \eta_{\mu\nu} \square \varepsilon. \quad (4.26)$$

Por sua vez, de (4.24), obtém-se por contração

$$\square h = -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[T - \frac{4}{2} \left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] = \frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[\left(\frac{2\omega+1}{2\omega+3} \right) T \right]. \quad (4.27)$$

Levando-se as equações (4.24), (4.27) e (4.11) em (4.26), vamos encontrar que

$$\begin{aligned} \square \bar{h}_{\mu\nu} &= -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] - \frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[\frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \left(\frac{2\omega+1}{2\omega+3} \right) T \right] \\ &\quad - G_0 \eta_{\mu\nu} \frac{8\pi T}{(2\omega+3) c^4}, \end{aligned}$$

que resulta em

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_0}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

Essa equação é formalmente idêntica à equação (3.1). Portanto, todo o formalismo desenvolvido no capítulo anterior para a Relatividade Geral se aplica agora com a substituição $G \rightarrow G_0$. Dessa forma, podemos definir os potenciais gravitoelétrico Φ^{BD} e gravitomagnético \vec{A}^{BD} na teoria de Brans-Dicke:

$$\bar{h}_{00}^{BD} \equiv \frac{4\Phi^{BD}}{c^2}, \quad (4.29)$$

$$\bar{h}_{0i}^{BD} \equiv -\frac{2A_i^{BD}}{c^2}. \quad (4.30)$$

No caso estacionário, se a distribuição de matéria está confinada em torno da origem das coordenadas espaciais, então distante da fonte os potenciais são dados por

$$\Phi^{BD} = \frac{G_0 M}{r}, \quad (4.31)$$

$$\vec{A}^{BD} = \frac{G_0(\vec{J} \times \vec{r})}{cr^3}. \quad (4.32)$$

Os potenciais satisfazem à equação

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi^{BD} + \nabla \cdot \left(\frac{\vec{A}^{BD}}{2} \right) = 0, \quad (4.33)$$

e se definirmos os campos gravitoelétrico \vec{E}^{BD} e gravitomagnético \vec{B}^{BD} como

$$\vec{E}^{BD} = -\nabla \Phi^{BD} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{A}^{BD}}{2} \right), \quad (4.34)$$

$$\vec{B}^{BD} = \nabla \times \vec{A}^{BD}, \quad (4.35)$$

encontraremos que são válidas as equações tipo-Maxwell

$$\nabla \times \vec{E}^{BD} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}^{BD}}{2} \right), \quad (4.36)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{B}^{BD}}{2} \right) = 0, \quad (4.37)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}^{BD} = 4\pi G_0 \rho, \quad (4.38)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}^{BD}}{2} \right) = \frac{4\pi G_0}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}^{BD}. \quad (4.39)$$

Assim, no contexto da teoria de Brans-Dicke também é possível escrever-se as equações do campo gravitacional em uma forma similar às equações de Maxwell, ao considerar-se as aproximações de campo fraco e de baixa velocidade de rotação da fonte.

4.5 Efeito Lense-Thirring na Teoria de Brans-Dicke

Em analogia ao que foi discutido no capítulo anterior, o campo gravitomagnético na teoria de Brans-Dicke para pontos distantes de uma distribuição localizada e estacionária de correntes é

$$\vec{B}^{BD} = \nabla \times \vec{A}^{BD} = \frac{G_0}{c} \left[\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{J}) - \vec{J}}{r^3} \right], \quad (4.40)$$

onde usamos (4.32). O torque sobre um giroscópio será dado por

$$\vec{\tau}^{BD} = \frac{d}{dt} \vec{S}^{BD} = \vec{\Omega}^{BD} \times \vec{S}^{BD}, \quad (4.41)$$

sendo

$$\vec{\Omega}^{BD} = \frac{\vec{B}^{BD}}{c} = \frac{G_0}{c^2} \left(\frac{3\hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{J}) - \vec{J}}{r^3} \right). \quad (4.42)$$

Portanto, o torque $\vec{\tau}$ sobre o eixo de um giroscópio irá diferir do valor previsto pela Relatividade Geral pelo fator $\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}$. O experimento Gravity Probe B, cujo nível de precisão foi de cerca de 0,005 segundos de arco por ano, não consegue distinguir entre as previsões da Relatividade Geral e da teoria de Brans-Dicke (BARROS, 2003).

É interessante notar que a principal motivação para a construção da teoria de Brans-Dicke foi a tentativa de se obter uma teoria que satisfizesse ao chamado Princípio de Mach, segundo o qual as forças inerciais são determinadas pela distribuição de matéria-energia no Universo (BRANS, 1961). Nesse sentido, a previsão do gravitomagnetismo, ou arrastamento dos sistemas inerciais, por parte tanto da Relatividade Geral como da teoria de Brans-Dicke indica que essas teorias incluem efeitos Machianos em seus formalismos (CIUFOLINI, 1998).

4.6 Relação entre as Teorias da Relatividade Geral e de Brans-Dicke

Na sequência, vamos mencionar um resultado que permite estabelecer uma relação entre as soluções das equações de Einstein e as soluções das equações de Brans-Dicke para uma mesma distribuição material. Inicialmente, temos que as equações de campo da teoria de Brans-Dicke são

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi),$$

$$\square \phi = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3)c^4},$$

conforme (4.3) e (4.4). Na aproximação de campo fraco, por sua vez, são válidas as condições (4.8) e (4.9):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon.$$

Nesse contexto da aproximação de campo fraco, pode-se obter a solução de um problema na teoria de Brans-Dicke, para um dado $T_{\mu\nu}$, a partir de uma solução já conhecida na Relatividade Geral com o mesmo $T_{\mu\nu}$. De fato, se $g_{\mu\nu}(G, x)$ é uma solução conhecida das equações de Einstein para um dado $T_{\mu\nu}$, então a solução correspondente na teoria de Brans-Dicke para o mesmo $T_{\mu\nu}$ será dada por (BARROS, 1998):

$$g_{\mu\nu}^{BD}(x) = [1 - G_0\varepsilon(x)]g_{\mu\nu}(G_0, x). \quad (4.43)$$

Alternativamente, pode-se também escrever

$$h_{\mu\nu}^{BD}(x) = h_{\mu\nu}(G_0, x) - G_0\varepsilon(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (4.44)$$

Assim, uma vez que a solução do problema seja conhecida na Relatividade Geral, o que é necessário fazer para obtenção da solução (4.43) na teoria de Brans-Dicke é resolver a equação (4.11) para $\varepsilon(x)$.

4.7 Equação de Movimento

Inicialmente, vamos obter a métrica do espaço-tempo no contexto da teoria de Brans-Dicke. Para isso, usaremos o resultado da seção anterior. Assim, se considerarmos as equações (3.26) e (4.43), encontraremos que

$$\begin{aligned}
ds_{BD}^2 = & (1 - \varepsilon G_0) \left[-c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi(G_0)}{c^2} \right) dt^2 - \frac{4}{c} \left(\vec{A}(G_0) \cdot d\vec{r} \right) dt \right. \\
& \left. + \left(1 + 2 \frac{\Phi(G_0)}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j \right].
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Este elemento de linha pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
ds_{BD}^2 = & -c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi(G_0)}{c^2} - \varepsilon G_0 \right) dt^2 - \frac{4}{c} \left(\vec{A}(G_0) \cdot d\vec{r} \right) dt \\
& + \left(1 + 2 \frac{\Phi(G_0)}{c^2} - \varepsilon G_0 \right) \delta_{ij} dx^i dx^j.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Agora, pode-se definir

$$2 \frac{\Phi_1}{c^2} = 2 \frac{\Phi(G_0)}{c^2} + \varepsilon G_0, \tag{4.47}$$

$$2 \frac{\Phi_2}{c^2} = 2 \frac{\Phi(G_0)}{c^2} - \varepsilon G_0. \tag{4.48}$$

Então, a métrica fica igual a

$$ds_{BD}^2 = -c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi_1}{c^2} \right) dt^2 - \frac{4}{c} \left(\vec{A}(G_0) \cdot d\vec{r} \right) dt + \left(1 + 2 \frac{\Phi_2}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j. \tag{4.49}$$

Fazendo-se $dS_{BD}^2 = -ds_{BD}^2$, obtém-se que

$$\frac{dS_{BD}^2}{dt^2} = c^2 - v^2 - 2\Phi_1 - 2 \frac{v^2}{c^2} \Phi_2 + \frac{4}{c} \vec{A}(G_0) \cdot \vec{v}$$

$$\frac{dS_{BD}^2}{dt^2} = (c^2 - v^2) \left[1 + \frac{1}{c^2 - v^2} \left(-2\Phi_1 - 2 \frac{v^2}{c^2} \Phi_2 + \frac{4}{c} \vec{A}(G_0) \cdot \vec{v} \right) \right]$$

$$\frac{dS_{BD}}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[1 + \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(-2\Phi_1 - 2\frac{v^2}{c^2}\Phi_2 + \frac{4}{c}\vec{A}(G_0) \cdot \vec{v} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.50)$$

Deixando os termos de primeira ordem em Φ_1 , Φ_2 e $\vec{A}(G_0)$, temos

$$\frac{dS_{BD}}{dt} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left[1 + \frac{1}{2c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} \left(-2\Phi_1 - 2\frac{v^2}{c^2}\Phi_2 + \frac{4}{c}\vec{A}(G_0) \cdot \vec{v} \right) \right]. \quad (4.51)$$

Assim, obtemos a Lagrangiana de uma partícula de massa m ,

$$L_{BD} = -mc \frac{dS_{BD}}{dt} = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + m\gamma\Phi_1 + m\gamma\frac{v^2}{c^2}\Phi_2 - \frac{2m}{c}\gamma\vec{A}(G_0) \cdot \vec{v}, \quad (4.52)$$

onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Como no capítulo anterior, manteremos termos só até a ordem $\frac{v^2}{c^2}$. Então, segue de (4.52) que

$$L_{BD} = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + m\Phi_1 - \frac{2m}{c}\vec{A}(G_0) \cdot \vec{v}. \quad (4.53)$$

Ainda em analogia com o desenvolvimento que foi efetuado no Capítulo 3 para a Relatividade Geral, vamos encontrar imediatamente que a equação de movimento para a partícula é

$$\vec{F}_{BD} = -m \left(-\nabla\Phi_1 - \frac{2}{c} \frac{\partial \vec{A}(G_0)}{\partial t} \right) - \frac{2m}{c} \vec{v} \times \vec{B}(G_0), \quad (4.54)$$

onde

$$\vec{B}(G_0) = \nabla \times \vec{A}(G_0). \quad (4.55)$$

Neste ponto, deve-se notar que, de acordo com as equações (4.28)-(4.30), temos

$$\Phi(G_0) = \Phi^{BD} \quad \text{e} \quad \vec{A}(G_0) = \vec{A}^{BD}. \quad (4.56)$$

Portanto, (4.54) pode ser escrita como

$$\vec{F}_{BD} = -m \left[-\nabla \left(\Phi^{BD} + \frac{c^2}{2} \varepsilon G_0 \right) - \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{BD} \right] - \frac{2m}{c} \vec{v} \times \vec{B}^{BD},$$

onde usamos (4.47). Logo,

$$\vec{F}_{BD} = -m \left[-\nabla \Phi^{BD} - \frac{2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^{BD} \right] - \frac{2m}{c} \vec{v} \times \vec{B}^{BD} + m \frac{c^2}{2} G_0 \nabla \varepsilon. \quad (4.57)$$

Então, como havia acontecido no caso da Relatividade Geral, a equação de movimento de uma partícula sob a ação dos potenciais gravitoeletrico e gravitomagnético não tem a forma da força de Lorentz na teoria de Brans-Dicke. No caso estacionário, ainda temos

$$\vec{F}_{BD} = -m \left(-\nabla \Phi^{BD} \right) - \frac{2m}{c} \vec{v} \times \vec{B}^{BD} + m \frac{c^2}{2} G_0 \nabla \varepsilon$$

$$\vec{F}_{BD} = -m \vec{E}^{BD} - \frac{2m}{c} \vec{v} \times \vec{B}^{BD} + m \frac{c^2}{2} G_0 \nabla \varepsilon. \quad (4.58)$$

Assim, diferentemente da Relatividade Geral, não é possível obter-se uma força semelhante à de Lorentz mesmo no caso estacionário, por causa do termo dependente do campo escalar ε em (4.58). Essa conclusão não foi percebida anteriormente (BARROS, 2005).

5 GRAVITOMAGNETISMO VARIÁVEL NO TEMPO NA TEORIA DE BRANS-DICKE

5.1 Introdução

Estudaremos o gravitomagnetismo variável no tempo no contexto da teoria gravitacional de Brans-Dicke, desenvolvendo um modelo em que a fonte produz um potencial gravitomagnético que varia linearmente no tempo. Para isso, introduziremos o formalismo do gravitomagnetismo variável no tempo para a Relatividade Geral, obtendo em seguida os resultados correspondentes para a teoria de Brans-Dicke. Como uma aplicação, calcularemos o atraso do tempo (time delay) gravitomagnético quando um raio de luz se propaga de um ponto P_1 para outro ponto P_2 , com o momento angular da fonte variando linearmente desde J_1 até J_2 , comparando os resultados obtidos nas duas teorias.

5.2 Gravitomagnetismo Variável no Tempo: Relatividade Geral

Um modelo simples pode ser desenvolvido se considerarmos que o campo gravitomagnético produzido por uma corrente de massa-energia varia linearmente com o tempo (MASHHOON, 2008). Realmente, a pequena variação temporal do momento angular da fonte pode não ser em geral linear, porém um modelo linear corresponde a uma primeira aproximação do problema.

Para obtermos o modelo desejado, vamos considerar os seguintes potenciais gravitacionais dependentes do tempo,

$$\Phi(t, \vec{r}) = \varphi(t)\Phi(\vec{r}), \quad (5.1)$$

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = f(t)\vec{A}(\vec{r}), \quad (5.2)$$

onde $\Phi(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$ são os potenciais estacionários que satisfazem às equações (3.9) e (3.10), enquanto $\varphi(t)$ e $f(t)$ são funções que serão fixadas a seguir. De acordo com a equação (3.17), temos que

$$\frac{2}{c} \frac{\partial \Phi(t, \vec{r})}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A}(t, \vec{r}) = 0, \quad (5.3)$$

ou seja,

$$\frac{2}{c} \Phi(\vec{r}) \frac{d\varphi}{dt} + f(t) \nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0. \quad (5.4)$$

Porém, para o caso dos potenciais estacionários $\Phi(\vec{r})$ e $\vec{A}(\vec{r})$, a equação (3.17) implica em que $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0$. Logo, segue de (5.4) que

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad (5.5)$$

e daí, φ é constante.

E ainda, considerando as equações de Einstein (3.1), encontramos que

$$\square \bar{h}_{00}(t, \vec{r}) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{00}(t, \vec{r}), \quad (5.6)$$

$$\square \bar{h}_{0i}(t, \vec{r}) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}(t, \vec{r}). \quad (5.7)$$

Mas, conforme (3.5) e (3.6), tem-se também que

$$\bar{h}_{00}(t, \vec{r}) = \frac{4\Phi(t, \vec{r})}{c^2} = \frac{4}{c^2} \varphi \Phi(\vec{r}), \quad (5.8)$$

$$\bar{h}_{0i}(t, \vec{r}) = -\frac{2A_i(t, \vec{r})}{c^2} = -\frac{2}{c^2}f(t)A_i(\vec{r}). \quad (5.9)$$

Se levarmos (??) em (??), obteremos

$$\varphi \square \left(\frac{4}{c^2} \Phi(\vec{r}) \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{00}(t, \vec{r})$$

$$\square \left(\frac{4}{c^2} \Phi(\vec{r}) \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{T_{00}(t, \vec{r})}{\varphi}$$

$$\square \bar{h}_{00}(\vec{r}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \frac{T_{00}(t, \vec{r})}{\varphi} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{00}(\vec{r}). \quad (5.10)$$

Portanto, deve-se ter

$$T_{00}(t, \vec{r}) = \varphi T_{00}(\vec{r}). \quad (5.11)$$

Por sua vez, colocando-se (??) em (??), vem

$$\square \left(-\frac{2}{c^2} f(t) A_i(\vec{r}) \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}(t, \vec{r})$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(-\frac{2}{c^2} f(t) A_i(\vec{r}) \right) + \nabla^2 \left(-\frac{2}{c^2} f(t) A_i(\vec{r}) \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}(t, \vec{r})$$

$$\frac{2}{c^4} A_i(\vec{r}) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) \nabla^2 \left(-\frac{2}{c^2} A_i(\vec{r}) \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}(t, \vec{r})$$

$$\frac{2}{c^4} A_i(\vec{r}) \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) \square \left(-\frac{2}{c^2} A_i(\vec{r}) \right) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{0i}(t, \vec{r})$$

$$\frac{2}{c^4}A_i(\vec{r})\frac{d^2f(t)}{dt^2} + f(t)\square\bar{h}_{0i}(\vec{r}) = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{0i}(t, \vec{r}). \quad (5.12)$$

Tomando-se $T_{0i}(t, \vec{r}) = f(t)T_{0i}(\vec{r})$, a equação (5.12) fica

$$\frac{2}{c^4}A_i(\vec{r})\frac{d^2f(t)}{dt^2} + f(t)\square\bar{h}_{0i}(\vec{r}) = -\frac{16\pi G}{c^4}f(t)T_{0i}(\vec{r}),$$

isto é,

$$\frac{d^2f(t)}{dt^2} = 0. \quad (5.13)$$

Dessa forma, conclui-se que $f(t)$ é uma função linear do tempo, de modo que o potencial vetor gravitomagnético $\vec{A}(t, \vec{r}) = f(t)\vec{A}(\vec{r})$ varia linearmente com o tempo, e além disso $f(t)$ é tal que $\frac{2|A_i(t, \vec{r})|}{c^2} \ll 1$ para que a aproximação de campo fraco seja mantida.

A partir das considerações anteriores e do que foi verificado no Capítulo 3, podemos estabelecer que, distante de uma fonte localizada de massa M e momento angular $J(t)$ que varia linearmente com o tempo, os potenciais gravitacionais são

$$\Phi(t, \vec{r}) = \varphi\Phi(\vec{r}) = \frac{GM}{r}, \quad (5.14)$$

onde adotamos $\varphi = 1$, e também

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = f(t)\vec{A}(\vec{r}) = f(t)\frac{G(\vec{J} \times \vec{r})}{cr^3} = f(t)\frac{GJ(\hat{J} \times \vec{r})}{cr^3}, \quad (5.15)$$

sendo que \hat{J} é um vetor unitário fixo na direção do momento angular da fonte. Agora, com $J(t) = f(t)J$, pode-se escrever ainda

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = \frac{GJ(t)[\hat{J} \times \vec{r}]}{cr^3}. \quad (5.16)$$

Devemos lembrar que a métrica associada é

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi(t, \vec{r})}{c^2} \right) dt^2 + \left(1 + 2 \frac{\Phi(t, \vec{r})}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j - \frac{4}{c} \left[\vec{A}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{r} \right] dt, \quad (5.17)$$

conforme (3.26).

Podemos obter uma expressão para $J(t)$ considerando que a fonte sofra uma variação linear em seu momento angular, que passa de um valor J_1 em um tempo t_1 para um outro valor J_2 em um instante t_2 , com $t_2 > t_1$. Admitiremos que no intervalo de tempo considerado a condição $\frac{2|A_i(t, \vec{r})|}{c^2} \ll 1$ é satisfeita. Seja então $J(t) = a + bt$, sendo a e b as constantes da função linear. Logo, tem-se que

$$J(t_1) = a + bt_1 = J_1,$$

$$J(t_2) = a + bt_2 = J_2.$$

Dáí,

$$b = \frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} \quad (5.18)$$

E ainda,

$$a = J_1 - bt_1 = J_1 - \left(\frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} \right) t_1 \quad (5.19)$$

Portanto,

$$J(t) = J_1 - \left(\frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} \right) t_1 + \left(\frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} \right) t$$

$$J(t) = J_1 + \left(\frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} \right) (t - t_1), \quad (5.20)$$

que é a expressão procurada para $J(t)$ em uma situação em que o momento angular varia de J_1 em um instante t_1 para J_2 em outro instante t_2 .

5.3 Gravitomagnetismo Variável no Tempo: Teoria de Brans-Dicke

Como vimos no Capítulo 4, as equações de campo da teoria de Brans-Dicke na aproximação de campo fraco são

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G_0}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (5.21)$$

sendo $G_0 = \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) G$. Assim, o modelo de gravitomagnetismo variável no tempo desenvolvido para a Relatividade Geral pode ser aplicado também na teoria de Brans-Dicke. De fato, os potenciais gravitacionais na teoria de Brans-Dicke serão obtidos a partir dos potenciais da Relatividade Geral com a substituição de G por G_0 . Dessa forma, longe de uma fonte localizada de massa M e momento angular $J(t)$ que varia linearmente com o tempo, os potenciais gravitacionais são dados por

$$\Phi^{BD}(t, \vec{r}) = \Phi^{BD}(\vec{r}) = \frac{G_0 M}{r}, \quad (5.22)$$

$$\vec{A}^{BD}(t, \vec{r}) = \frac{G_0 J(t) [\hat{J} \times \vec{r}]}{cr^3}. \quad (5.23)$$

Como a fonte experimenta uma variação linear em seu momento angular, passando do valor J_1 em t_1 para um outro valor J_2 em um instante t_2 , com $t_2 > t_1$, tem-se que $J(t)$ será dado por (5.20).

Para obtermos a métrica associada, podemos considerar o teorema do capítulo anterior e, levando em conta (5.17), escrever que

$$\begin{aligned}
ds_{BD}^2 = & (1 - \varepsilon G_0) \left[-c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi^{BD}(t, \vec{r})}{c^2} \right) dt^2 - \frac{4}{c} \left[\vec{A}^{BD}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{r} \right] dt \right. \\
& \left. + \left(1 + 2 \frac{\Phi^{BD}(t, \vec{r})}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j \right].
\end{aligned} \tag{5.24}$$

E ainda,

$$\begin{aligned}
ds_{BD}^2 = & -c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi^{BD}(t, \vec{r})}{c^2} - \varepsilon G_0 \right) dt^2 - \frac{4}{c} \left[\vec{A}^{BD}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{r} \right] dt \\
& + \left(1 + 2 \frac{\Phi^{BD}(t, \vec{r})}{c^2} - \varepsilon G_0 \right) \delta_{ij} dx^i dx^j.
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Com as definições,

$$2 \frac{\Phi_1^{BD}}{c^2} = 2 \frac{\Phi^{BD}(t, \vec{r})}{c^2} + \varepsilon G_0, \tag{5.26}$$

$$2 \frac{\Phi_2^{BD}}{c^2} = 2 \frac{\Phi^{BD}(t, \vec{r})}{c^2} - \varepsilon G_0, \tag{5.27}$$

tem-se a expressão para o elemento de linha,

$$\begin{aligned}
ds_{BD}^2 = & -c^2 \left(1 - 2 \frac{\Phi_1^{BD}}{c^2} \right) dt^2 - \frac{4}{c} \left[\vec{A}^{BD}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{r} \right] dt \\
& + \left(1 + 2 \frac{\Phi_2^{BD}}{c^2} \right) \delta_{ij} dx^i dx^j.
\end{aligned} \tag{5.28}$$

É interessante notar que, no modelo de variação linear do momento angular adotado, o campo escalar longe da fonte localizada de massa M e momento angular $J(t)$ é $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$, pois

$$\square \varepsilon = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3)c^4},$$

sendo que $T = T(t, \vec{r}) \approx T^0_0(t, \vec{r}) = -T_{00}(t, \vec{r}) = -T_{00}(\vec{r})$.

5.4 Atraso do Tempo (Time Delay) Gravitomagnético

Uma aplicação imediata do modelo da fonte com momento angular variando linearmente no tempo é o cálculo do atraso do tempo (time delay) da luz. A medição do atraso do tempo da luz é considerado um teste clássico da Relatividade Geral, tendo sido proposto por Shapiro (1964). Na figura a seguir, a linha tracejada é a trajetória verdadeira seguida por um sinal de radar, enquanto que a linha reta indica a trajetória aproximada.

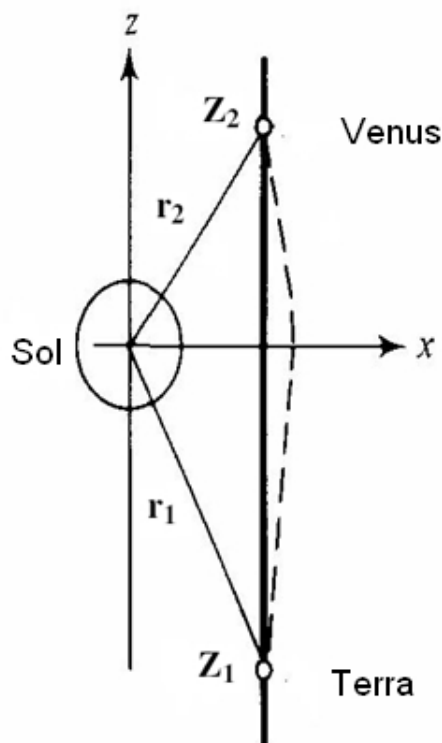


Figura 5.1: Trajetória de um sinal de luz entre a Terra e um planeta. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).

Pode-se mostrar que esse efeito pode ser separado em duas partes: o atraso do tempo de Shapiro e o atraso do tempo gravitomagnético, que é devido ao potencial gravitomagnético, isto é, ao fato de considerarmos a rotação da fonte de campo gravitacional (CIUFOLINI, 2003). Para vermos isso, consideremos que um ponto do espaço tem as coordenadas $x^\mu = (ct, \vec{r})$ e a métrica é dada, como sabemos, por $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Inicialmente, vamos lembrar que na ausência dos potenciais perturbativos $h_{\mu\nu}$, os raios da radiação eletromagnética se propagam ao longo de linhas retas definidas por

$$\frac{dx^i}{dt} = c\hat{k}^i, \quad (5.29)$$

onde \hat{k} é o vetor unitário constante na direção de propagação dos sinais. Assim,

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt}\right)^2} = \sqrt{c^2[(\hat{k}^1)^2 + (\hat{k}^2)^2 + (\hat{k}^3)^2]} = c|\hat{k}| = c. \quad (5.30)$$

Agora, se os raios se propagam no espaço com métrica $g_{\mu\nu}$, então será válida a equação para as geodésicas nulas $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0$. Logo,

$$(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j + h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0, \quad (5.31)$$

que implica em

$$c^2 dt^2 - |d\vec{r}|^2 = h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (5.32)$$

Se usarmos a relação $\frac{dx^\mu}{dt} = ck^\mu + O(h_{\mu\nu})$, com $k^\mu = (1, \hat{k})$, vem que

$$dx^\mu = ck^\mu dt + O(h_{\mu\nu})dt. \quad (5.33)$$

Substituindo (5.33) em (5.32), tem-se

$$c^2 dt^2 - |d\vec{r}|^2 = c^2 h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu dt^2$$

$$c^2 dt^2 (1 - h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu) = |d\vec{r}|^2$$

$$cdt = \left(1 + \frac{1}{2} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu\right) |d\vec{r}|, \quad (5.34)$$

onde foram mantidos termos só até a primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Para um raio que se propaga do ponto $P_1 : (ct_1, \vec{r}_1)$ para o ponto $P_2 : (ct_2, \vec{r}_2)$, a distância percorrida é igual a

$$\int_{t_1}^{t_2} c dt = \int_{P_1}^{P_2} |d\vec{r}| + \frac{1}{2} \int_{P_1}^{P_2} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu dl, \quad (5.35)$$

onde $dl = |d\vec{r}| = (\delta_{ij} dx^i dx^j)^{1/2}$ denota o elemento de linha euclidiano ao longo da reta que liga P_1 a P_2 . Prosseguindo, vem que

$$c(t_2 - t_1) = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| + \frac{1}{2} \int_{P_1}^{P_2} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu dl$$

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{c} |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| + \frac{1}{2c} \int_{P_1}^{P_2} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu dl. \quad (5.36)$$

Portanto, define-se o atraso do tempo gravitacional como

$$\Delta = \frac{1}{2c} \int_{P_1}^{P_2} h_{\mu\nu} k^\mu k^\nu dl. \quad (5.37)$$

Considerando que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h$ e também $\eta_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = k^\mu k_\mu = -1 + \hat{k}^i \hat{k}_i = -1 + 1 = 0$, ainda podemos escrever

$$\Delta = \frac{1}{2c} \int_{P_1}^{P_2} \bar{h}_{\mu\nu} k^\mu k^\nu dl. \quad (5.38)$$

Então,

$$\Delta = \frac{1}{2c} \int_{P_1}^{P_2} \bar{h}_{00} k^0 k^0 dl + \frac{1}{2c} \int_{P_1}^{P_2} (2\bar{h}_{01} k^0 \hat{k}^1 + 2\bar{h}_{02} k^0 \hat{k}^2 + 2\bar{h}_{03} k^0 \hat{k}^3) dl. \quad (5.39)$$

Usando-se as equações (??) e (??), obtemos

$$\Delta = \frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \Phi(t, \vec{r}) dl - \frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \vec{A}(t, \vec{r}) \cdot \hat{k} dl. \quad (5.40)$$

Com o atraso do tempo de Shapiro sendo dado por

$$\Delta_S = \frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \Phi(t, \vec{r}) dl \quad (5.41)$$

e o atraso do tempo gravitomagnético expresso por

$$\Delta_{GM} = -\frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \vec{A}(t, \vec{r}) \cdot \hat{k} dl = -\frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \vec{A}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (5.42)$$

pode-se escrever que

$$\Delta = \Delta_S + \Delta_{GM}. \quad (5.43)$$

Uma consequência de (5.42) é que o atraso do tempo gravitomagnético para um sinal que vai de um ponto a outro e retorna pelo mesmo percurso é nulo, ou seja,

$$\Delta_{GM} = -\frac{2}{c^3} \oint \vec{A}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0. \quad (5.44)$$

5.5 Atraso do Tempo Gravitomagnético na Teoria de Brans-Dicke

Ao passarmos da teoria da Relatividade Geral para a teoria de Brans-Dicke, verificamos que o atraso do tempo de Shapiro e o atraso do tempo gravitomagnético são dados, respectivamente, por

$$\Delta_S^{BD} = \frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \Phi^{BD}(t, \vec{r}) dl \quad (5.45)$$

e

$$\Delta_{GM}^{BD} = -\frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \vec{A}^{BD}(t, \vec{r}) \cdot \hat{k} dl = -\frac{2}{c^3} \int_{P_1}^{P_2} \vec{A}^{BD}(t, \vec{r}) \cdot d\vec{r}, \quad (5.46)$$

pois todo o procedimento da seção anterior é válido para a teoria de Brans-Dicke. E também, tem-se que o atraso do tempo total é

$$\Delta^{BD} = \Delta_S^{BD} + \Delta_{GM}^{BD}. \quad (5.47)$$

Como na Relatividade Geral, o atraso do tempo gravitomagnético para um sinal que vai de um ponto a outro e retorna pelo mesmo percurso é nulo.

No caso de uma fonte localizada de massa M e momento angular $J(t)$ que varia linearmente com o tempo, os potenciais gravitacionais em pontos distantes da fonte são dados pelas equações (5.22) e (5.23). Os potenciais correspondentes na Relatividade Geral são dados por (5.14) e (5.16), de modo que podemos estabelecer as relações

$$\Phi^{BD}(t, \vec{r}) = \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) \Phi(t, \vec{r}), \quad (5.48)$$

$$\vec{A}^{BD}(t, \vec{r}) = \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) \vec{A}(t, \vec{r}). \quad (5.49)$$

Se substituirmos (5.48) em (5.45) e (5.49) em (5.46), encontraremos que

$$\Delta_S^{BD} = \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) \Delta_S, \quad (5.50)$$

$$\Delta_{GM}^{BD} = \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) \Delta_{GM}. \quad (5.51)$$

Assim, os atrasos do tempo previstos pela teoria de Brans-Dicke para o modelo considerado di-

ferem da previsão da Relatividade Geral pelo fator $\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}$. Para obtermos a expressão explícita do atraso do tempo gravitomagnético Δ_{GM}^{BD} , vamos resolver (5.46) considerando $\vec{A}^{BD}(t, \vec{r})$ dado em (5.23). Então, tem-se

$$\Delta_{GM}^{BD} = -\frac{2}{c^4} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) G \int_{P_1}^{P_2} \frac{J(t) [\hat{J} \times \vec{r}]}{r^3} \cdot \hat{k} dl. \quad (5.52)$$

De acordo com (5.29), $|d\vec{r}| = c dt$. Portanto, $dl = c dt$ e logo $l = ct$. Com essas considerações, pode-se escrever a equação (5.20) como

$$J(t) = J_1 + \frac{J_2 - J_1}{t_2 - t_1} (t - t_1) = J(l) = J_1 + \frac{J_2 - J_1}{L} l, \quad (5.53)$$

onde fizemos $t_1 = 0$ e $t_2 = L/c$, sendo que a reta que liga os pontos P_1 e P_2 tem comprimento L . Desse modo, (5.52) fica

$$\begin{aligned} \Delta_{GM}^{BD} &= -\frac{2}{c^4} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) G \int_0^L \left[J_1 + \left(\frac{J_2 - J_1}{L} \right) l \right] \left(\frac{\hat{J} \times \vec{r}}{r^3} \right) \cdot \hat{k} dl \\ \Delta_{GM}^{BD} &= -\frac{2}{c^4} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) G \int_0^L \left[J_1 + \left(\frac{J_2 - J_1}{L} \right) l \right] \left[\frac{\hat{J} \cdot (\vec{r} \times \hat{k})}{r^3} \right] dl \\ \Delta_{GM}^{BD} &= -\frac{2}{c^4} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) G \hat{J} \cdot \left\{ J_1 \int_0^L \frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} dl + \frac{J_2 - J_1}{L} \int_0^L \left(\frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} \right) l dl \right\}. \end{aligned}$$

A primeira integral pode ser resolvida (ver Apêndice A), e teremos

$$\Delta_{GM}^{BD} = -\frac{2G}{c^4} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) \hat{J} \cdot \left\{ \frac{J_1 (\hat{r}_1 \times \hat{r}_2)}{1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{J_2 - J_1}{L} \int_0^L \frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} l dl \right\}. \quad (5.54)$$

Agora, vamos calcular a integral restante em (5.54). Usando-se os resultados do Apêndice A, tem-se

$$\int_0^L \frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} dl = \int_0^L \frac{(\vec{r}_1 + l\hat{k}) \times \hat{k}}{r^3} dl = (\vec{r}_1 \times \hat{k}) \int_0^L \frac{dl}{r^3}$$

$$\int_0^L \frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} dl = \left[\vec{r}_1 \times \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{L} \right] \frac{r_1}{\delta} (1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2)$$

$$\int_0^L \frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} dl = \left(\frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{L^2 \delta} \right) L r_1 (1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2)$$

$$\int_0^L \frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} dl = L \frac{(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) r_1 (1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2)}{r_1^2 r_2^2 [1 - (\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2)^2]}$$

$$\int_0^L \frac{\vec{r} \times \hat{k}}{r^3} dl = L \frac{(\hat{r}_1 \times \hat{r}_2)}{r_2 (1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2)}. \quad (5.55)$$

Substituindo-se (5.55) em (5.54), obtemos

$$\Delta_{GM}^{BD} = -\frac{2G}{c^4} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) \frac{\hat{J} \cdot (\hat{r}_1 \times \hat{r}_2)}{1 + \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2} \left(\frac{J_1}{r_1} + \frac{J_2}{r_2} \right). \quad (5.56)$$

Como já foi mencionado, o atraso do tempo previsto pela teoria de Brans-Dicke difere da previsão da Relatividade Geral pelo fator $\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}$. Porém, no limite em que $\omega \rightarrow \infty$, recupera-se o resultado do atraso do tempo gravitomagnético na Relatividade Geral para o modelo de uma fonte com momento angular variando linearmente no tempo (MASHHOON, 2008). De fato, no limite $\omega \rightarrow \infty$, na aproximação de campo fraco, as equações da teoria de Brans-Dicke se reduzem para as equações da Relatividade Geral (BARROS, 1998). Por outro lado, se o momento angular da fonte for constante, com $J_1 = J_2 = J$, e tomarmos o limite $\omega \rightarrow \infty$, recuperaremos o resultado da Relatividade Geral para este caso (CIUFOLINI, 2003).

A previsão para o valor do atraso do tempo gravitomagnético na teoria de Brans-Dicke, equação (5.56), pode ser de interesse astrofísico na análise do comportamento da luz que passa na vizinhança de pulsares, que apresentam uma taxa de variação do momento angular apreciável (MASHHOON, 2008).

CONCLUSÃO

Verificou-se que, no contexto da teoria de Brans-Dicke, também é possível escrever-se as equações do campo gravitacional em uma forma similar às equações de Maxwell, ao considerar-se as aproximações de campo fraco e de baixa velocidade de rotação da fonte.

A equação de movimento de uma partícula sob a ação dos potenciais gravitoelétrico e gravitomagnético não tem a forma da força de Lorentz na teoria de Brans-Dicke, mesmo no caso estacionário, por causa do termo dependente do campo escalar. Essa conclusão não foi percebida anteriormente (BARROS, 2005).

Mostrou-se que torque sobre o eixo de um giroscópio, calculado através da teoria de Brans-Dicke, difere do valor previsto pela Relatividade Geral pelo fator $\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}$. Porém, o experimento Gravity Probe B, cujo nível de precisão foi de cerca de 0,005 segundos de arco por ano, não consegue distinguir entre as previsões da Relatividade Geral e da teoria de Brans-Dicke.

A principal motivação para a construção da teoria de Brans-Dicke foi a tentativa de se obter uma teoria que satisfizesse ao chamado Princípio de Mach, segundo o qual as forças inerciais são determinadas pela distribuição de matéria-energia no Universo. Nesse sentido, a previsão do gravitomagnetismo, ou arrastamento dos sistemas inerciais, por parte da teoria de Brans-Dicke, indica que essa teoria inclui efeitos Machianos em seu formalismo.

Estudou-se o gravitomagnetismo variável no tempo no contexto da teoria gravitacional de Brans-Dicke, desenvolvendo-se um modelo em que a fonte produz um potencial gravitomagnético que varia linearmente no tempo. Esse modelo tem interesse astrofísico, com a fonte podendo ser, por exemplo, um pulsar. É interessante notar que, nesse modelo, o campo escalar longe da fonte localizada de massa M e momento angular $J(t)$ é $\varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$.

Os atrasos do tempo previstos pela teoria de Brans-Dicke para o modelo considerado diferem da previsão da Relatividade Geral pelo fator $\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}$. Como na Relatividade Geral, o atraso do tempo gravitomagnético para um sinal que vai de um ponto a outro e retorna pelo mesmo percurso é nulo.

Foi obtida a expressão do atraso do tempo gravitomagnético de Brans-Dicke Δ_{GM}^{BD} . No limite em que $\omega \rightarrow \infty$, recuperou-se o resultado do atraso do tempo gravitomagnético na Relatividade Geral para o modelo de uma fonte com momento angular variando linearmente no tempo (MASHHOON, 2008). Por outro lado, se o momento angular da fonte for constante, com $J_1 = J_2 = J$, e tomarmos o limite $\omega \rightarrow \infty$, recuperaremos o resultado da Relatividade Geral para este caso (CIUFOLINI, 2003).

Como perspectivas futuras deste trabalho, pode-se citar a aplicação do modelo da fonte com momento angular variando linearmente no tempo, na teoria de Brans-Dicke, para o estudo de fenômenos como: efeitos do gravitomagnetismo variável no tempo sobre o movimento de uma partícula (RUGGIERO, 2009), efeito Lense-Thirring (CHICONE, 2008) e indução gravitacional (BINI, 2008).

REFERÊNCIAS

- ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. **Introduction to General Relativity**. Nova York: McGraw-Hill, 1975.
- BAESSLER, S.; HECKEL, B. R.; ADELBERGER, E. G.; GUNDLACH, J. H.; SCHMIDT, U.; SWANSON, H. E. Improved Test of the Equivalence Principle for Gravitational Self-Energy. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 3585-3588, 1999.
- BARROS, A.; ROMERO, C. On the Weak Field Approximation of Brans-Dicke Theory of Gravity. **Phys. Lett. A**, v. 245, p. 31-34, 1998.
- BARROS, A.; ROMERO, C. Gravitomagnetic Time Delay and the Lense-Thirring Effect in Brans-Dicke Theory of Gravity. **Mod. Phys. Lett. A**, v. 18, p. 2117-2124, 2003.
- BARROS, A.; ROMERO, C. Gravitomagnetism in Brans-Dicke Theory of Gravity. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 20, p. 2283 - 2287, 2005.
- BERGMANN, P. G. Comments on the Scalar Tensor Theory. **Int. J. Theor. Phys.** v. 1, p. 25-36, 1968.
- BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P. A Test of General Relativity Using Radio Links with the Cassini Spacecraft. **Nature**, v. 425, p. 374-376, 2003.
- BINI, D.; CHERUBINI, C.; CHICONE, C.; MASHHOON, B. Gravitational Induction. **Class. Quant. Grav.**, v. 25, p. 225014-1 a 225014-14, 2008.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. **Phys. Rev.**, v. 124, p. 925-935, 1961.
- CAPOZZIELLO, S.; DE LAURENTIS, M.; GARUFI, F.; MILANO, L. Relativistic Orbits with Gravitomagnetic Corrections. **Phys. Scripta**, v. 79, p. 025901-1 a 025901-11, 2009.
- CHICONE, C.; MASHHOON, B. Time-Varying Lense-Thirring System. **Class. Quant. Grav.**, v. 25, p. 225003-1 a 225003-11, 2008.
- CIUFOLINI, I.; WHEELER, J. A. **Gravitation and Inertia**, Princeton: Princeton University Press, 1995.
- CIUFOLINI, I.; PAVLIS, E. C.; CHIEPPA, F.; FERNANDES-VIEIRA, E.; PÉREZ-MERCADER, J. Test of General Relativity and Measurement of the Lense-Thirring Effect with Two Earth Satellites. **Science**, v. 279, p. 2100-2103, 1998.
- CIUFOLINI, I.; KOPEIKIN, S.; MASHHOON, B.; RICCI, F. On the Gravitomagnetic Time Delay. **Phys. Lett. A**, v. 308, p. 101-109, 2003.

CIUFOLINI, I.; PAVLIS, E. C. A Confirmation of the General Relativistic Prediction of the Lense–Thirring Effect. **Nature**, v. 431, p. 958–960, 2004.

CIUFOLINI, I.; PAVLIS, E. C.; PERON, R. Determination of Frame-Dragging using Earth Gravity Models from CHAMP and GRACE. **New Astronomy**, v. 11, p. 527–550, 2006.

DAMOUR, T. Experimental Tests of Relativistic Gravity. **Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B**, v. 80, p. 41-50, 2000.

EVERITT, C. W. F. e outros membros da equipe do experimento GRAVITY PROBE B. Gravity Probe B: Countdown to Launch. In: LÄMMERZAHN, C.; EVERITT, C. W. F.; HEHL, F. W. (Ed.). **Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space**, Berlin: Springer, 2001.

FARAONI, V. Scalar Field Mass in Generalized Gravity. **Class. Quantum Grav.**, v. 26, p. 145014-1 a 145014-11, 2009.

GRAVITY PROBE B, <http://einstein.stanford.edu>, boletim de 12 de novembro de 2009.

HARTLE, J. B. **Gravity**. São Francisco: Addison Wesley, 2003.

HITZER, E.; DEHNEN, H. Integration of Einstein's Equations in the Weak-Field Domain using the "Einstein" Gauge. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 36, p. 559-567, 1997.

JACKSON, J. D. **Eletrodinâmica Clássica**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1983.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996.

LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A.; MINKOWSKI, H. O. **O Princípio da Relatividade**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001

LENSE, J.; THIRRING, H. Über den Einfluss der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. **Phys. Z.**, v. 19, p. 156-163, 1918.

MASHHOON, B. Time-Varying Gravitomagnetism. **Class. Quant. Grav.**, v. 25, p. 085014-1 a 085014-8, 2008.

MISNER, C. W.; THORNE, K.S.; WHEELER, J.A. **Gravitation**. São Francisco: Freeman, 1973.

NORDTVEDT, K. Post-Newtonian Metric for a General Class of Scalar-Tensor Gravitational Theories and Observational Consequences. **Astrophys. J.**, v. 161, p. 1059-1067, 1970.

NORDTVEDT, K. Lunar Laser Ranging – A Comprehensive Probe of the Post-Newtonian Long Range Interaction. In: LÄMMERZAHN, C.; EVERITT, C. W. F.; HEHL, F. W. (Ed.). **Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space**, Berlin: Springer, 2001.

OHANIAN, H. C. **Gravitation and Spacetime**. Nova York: Norton, 1976.

RUGGIERO, M. L.; IORIO, L. Gravitomagnetic Time-Varying Effects on the Motion of a Test Particle. **gr-qc 0906.1281**, 2009.

SCHIFF, L. I. Possible New Experimental Test of General Relativity Theory. **Phys. Rev. Lett.**, v. 4, p. 215-217, 1960.

SERENO, M. Detecting Gravitomagnetism with Rotation of Polarization by a Gravitational lens. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 356, p. 381-385, 2005.

SHAPIRO, I. I. Fourth Test of General Relativity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 13, p. 789 - 791, 1964.

STELLA, L. Relativistic Periastron and Nodal Precession and Quasi-Periodic Oscillations from Low Mass X-Ray Binaries. In: RUFFINI, R.; SIGISMONDI, C. (Ed.). **Nonlinear Gravitodynamics**. Cingapura: World Scientific, 2003.

WAGONER, R. V. Scalar tensor theory and gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 1, 3209-3216, 1970.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. Nova York: Wiley, 1972.

WEINBERG, S. **Cosmology**. Nova York: Oxford University Press, 2008.

WILL, C. M. Was Einstein Right? Testing Relativity at the Centenary. **Annalen Phys.**, v. 15, p. 19-33, 2005.

WILLIAMS, J. G.; NEWHALL, X. X.; DICKEY, J. O. Relativity parameters determined from lunar laser ranging. **Phys. Rev. D**, v. 53, 6730-6739, 1996.

APÊNDICES

Apêndice A - Resultados Úteis

Neste apêndice, vamos apresentar alguns resultados que serão usados no Capítulo 5:

(i) Inicialmente, consideremos as integrais do tipo

$$\pi_n = \int_0^L \frac{l^n dl}{r^3}, \quad (1)$$

onde $n = 0, 1$, e ainda,

$$\vec{r}(l) = \vec{r}_1 + l\hat{k}, \quad (2)$$

$$L = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|, \quad (3)$$

$$\hat{k} = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{L}. \quad (4)$$

O resultado dessas integrais é (MASHHOON, 2008):

$$\pi_0 = \int_0^L \frac{dl}{r^3} = \frac{1}{\delta} \hat{k} \cdot (\hat{r}_2 - \hat{r}_1), \quad (5)$$

$$\pi_1 = \int_0^L \frac{l dl}{r^3} = \frac{r_1}{\delta} (1 - \hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2), \quad (6)$$

sendo $\delta = r_1^2 - Q^2$ e $Q = \hat{k} \cdot \vec{r}_1$.

(ii) Outro resultado que será utilizado é o valor da quantidade δL^2 . Então,

$$\delta L^2 = (r_1^2 - (\hat{k} \cdot \vec{r}_1)^2)L^2. \quad (7)$$

Substituindo (4) em (7), vem

$$\delta L^2 = r_1^2 L^2 - [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{r}_1]^2. \quad (8)$$

Com o uso de (3), tem-se

$$\delta L^2 = r_1^2 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 - r_1^2)^2$$

$$\delta L^2 = r_1^2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 - r_1^2)^2$$

$$\delta L^2 = r_1^2 (r_2^2 - 2\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 + r_1^2) - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2 + 2(r_1^2)(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) - r_1^4$$

$$\delta L^2 = r_1^2 r_2^2 - (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)^2 = r_1^2 r_2^2 - r_1^2 r_2^2 (\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2)^2$$

$$\delta L^2 = r_1^2 r_2^2 [1 - (\hat{r}_1 \cdot \hat{r}_2)^2]. \quad (9)$$

(iii) Vamos resolver a integral

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{J} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{k} dl,$$

onde J é constante e a reta que liga os pontos P_1 e P_2 tem comprimento L . Dessa forma, levando-se em conta os resultados dos itens anteriores, obtém-se

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J \int_0^L \frac{(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} d\vec{l} = J \int_0^L \frac{\hat{\mathbf{J}} \cdot (\vec{r} \times \hat{\mathbf{k}})}{r^3} dl$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot \int_0^L \frac{[(\vec{r}_1 + l\hat{\mathbf{k}}) \times \hat{\mathbf{k}}]}{r^3} dl$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot \int_0^L \frac{(\vec{r}_1 \times \hat{\mathbf{k}})}{r^3} dl$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot (\vec{r}_1 \times \hat{\mathbf{k}}) \int_0^L \frac{dl}{r^3}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot (\vec{r}_1 \times \hat{\mathbf{k}}) \left[\frac{1}{\delta} \hat{\mathbf{k}} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1) \right]$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot \left[\vec{r}_1 \times \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{L} \right] \left[\frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\delta L} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1) \right]$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot \left(\frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\delta L^2} \right) [(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot (\hat{\mathbf{r}}_2 - \hat{\mathbf{r}}_1)]$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \frac{(r_2 + r_1 - r_2\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2 - r_1\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)}{r_1^2 r_2^2 [1 - (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)^2]}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = J\hat{\mathbf{J}} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2) \frac{(r_2 + r_1) [1 - (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)]}{r_1 r_2 [1 + (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)] [1 - (\hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2)]}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \frac{J(\hat{\mathbf{J}} \times \vec{r})}{r^3} \cdot \hat{\mathbf{k}} dl = \frac{J\hat{\mathbf{J}} \cdot (\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_2)}{1 + \hat{\mathbf{r}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}}_2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \quad (10)$$