



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

WALTER DE OLIVEIRA PAULO

GRAVITAÇÃO NEWTONIANA MODIFICADA A PARTIR DA TEORIA
GRAVITACIONAL DE BRANS-DICKE

Boa Vista

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
CURSO DE MESTRADO EM FÍSICA.

WALTER DE OLIVEIRA PAULO

**GRAVITAÇÃO NEWTONIANA MODIFICADA A PARTIR DA TEORIA
GRAVITACIONAL DE BRANS-DICKE**

Dissertação apresentada como pré-requisito para
conclusão do Curso de Mestrado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Trindade de Barros

Boa Vista

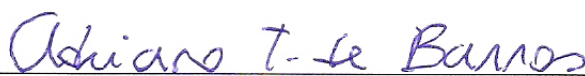
2010

TERMO DE APROVAÇÃO

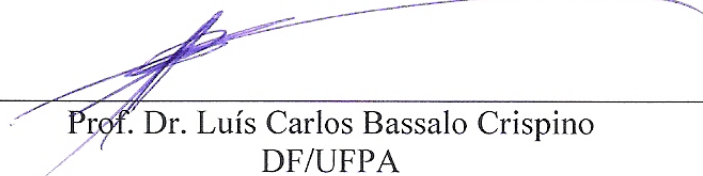
WALTER DE OLIVEIRA PAULO

GRAVITAÇÃO NEWTONIANA MODIFICADA A PARTIR DA TEORIA GRAVITACIONAL DE BRANS-DICKE

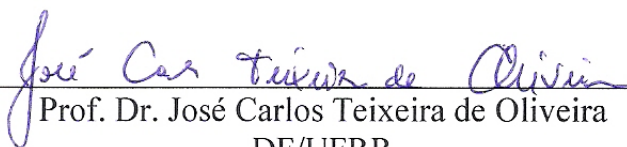
Dissertação apresentada como pré-requisito para conclusão do Curso de Mestrado em Física da Universidade Federal de Roraima, defendida em 29 de outubro de 2010 e avaliada pela seguinte banca examinadora:



Prof. Dr. Adriano Trindade de Barros
Orientador / CDSA/UFCG



Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino
DF/UFGA



Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira
DF/UFRF

*Para meu pai,
Sebastião Osório de Oliveira
"In memorian".*

AGRADECIMENTOS

À Deus pela proteção e luz que ilumina nosso caminho e nossas vidas.

À minha mãe Eny Nunes de Oliveira que me garantiu o direito e as condições de estudo no início da minha vida estudantil até o ensino médio na falta de meu pai.

À minha esposa Cristiana Cilene da Silva Ferreira Paulo e filhas Brenda Ohana Ferreira e Maria Eduarda Ferreira Paulo pelo amor, carinho, dedicação, paciência e compreensão quanto à minha pessoa.

Ao Antônio Francisco Leitão, amigo e colega de turma pela colaboração em colocar esta dissertação de acordo com as normas para apresentação dos trabalhos técnico-científicos da UFRR e também aos meus colegas do mestrado: Chan Tat Fong, João de Ribamar Silva, Walter Eduardo Ferreira Parente e Denise Andrade Feitosa por compartilhar idéias e sugestões durante o estudo das disciplinas do curso.

Aos professores Roberto Câmara de Araújo e José Carlos Teixeira de Oliveira que ministraram algumas das disciplinas que estudei durante o curso.

Aos meus colegas de estudos no curso de especialização em Física da UFRR, Gilmar Alves Silva e Sumaia Sales Vieira de Barros, esposa do meu orientador.

Ao Professor Edmundo Marinho do Monte do departamento de Física da UFPB pelo apoio e pelas discussões que contribuíram muito para a concretização deste trabalho.

Um agradecimento especial ao professor Adriano Trindade de Barros, companheiro da "pelada" de futebol, pela orientação à qual foi de suma importância para a realização desta dissertação, que ele tenha em sua nova lotação em Sumé-PB todo o sucesso que teve no departamento de Física da UFRR desde 1993, quando chegou aqui em Boa Vista-RR, até esse momento contribuindo na formação de profissionais em Física deste Estado.

*”O ferro enferruja por falta de uso,
a água perde sua pureza e se congela,
quando faz frio. Do mesmo modo,
a falta de ação tira o vigor da mente”.*
(Leonardo Da Vinci)

RESUMO

Neste trabalho, investigamos inicialmente o problema da obtenção de uma gravitação Newtoniana modificada no caso da teoria da Relatividade Geral. Na sequência, encontramos uma solução geral com simetria esférica para um campo gravitacional fraco no contexto da teoria de Brans-Dicke. Esta solução é independente de qualquer condição de coordenada. Então, para uma escolha conveniente da função $f(r)$ na métrica de Brans-Dicke, exibimos uma fórmula modificada para a gravitação Newtoniana, a qual pode descrever a gravidade em uma escala de comprimento pequena. Discutimos os resultados em comparação com o caso da Relatividade Geral.

Palavras-chave: Gravitação Newtoniana Modificada; Teoria de Brans-Dicke; Aproximação de Campo Fraco.

ABSTRACT

In this work, we investigate initially the problem of obtaining a modified Newtonian gravitation in the case of General Relativity theory. Following, we find a general solution with spherical symmetry for a weak gravitational field in the context of Brans-Dicke theory. This solution is independent of any coordinate condition. Then, for a convenient choice of the function $f(r)$ in Brans-Dicke metric, we exhibit a modified formula to Newtonian gravity, which can describe gravity in a small length scale. We discuss the results in comparison with the case of General Relativity.

Keywords: Modified Newtonian Gravitation; Brans-Dicke Theory; Weak Field Approximation.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	
1 INTRODUÇÃO	11
2 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD	14
2.1 INTRODUÇÃO	14
2.2 A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD	14
2.3 CAMPO GRAVITACIONAL VARIÁVEL NO TEMPO	20
2.4 TEOREMA DE BIRKHOFF	22
3 A APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO	24
3.1 INTRODUÇÃO	24
3.2 APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO	24
3.3 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD NO LIMITE DE CAMPO FRACO	28
3.4 O CÁLCULO DA DEFLEXÃO DA LUZ	29
4 SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA RELATIVIDADE GERAL E MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA	33
4.1 INTRODUÇÃO	33
4.2 SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA RELATIVIDADE GERAL: AS EQUAÇÕES DE CAMPO	33
4.3 SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA RELATIVIDADE GERAL: A MÉTRICA	36

4.4	SOLUÇÃO GERAL DE CAMPO FRACO COM SIMETRIA ESFÉRICA	40
4.5	FORÇA GRAVITACIONAL SOBRE UMA PARTÍCULA	40
4.6	MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA	44
5	TEORIA DE BRANS-DICKE: SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA E MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA.....	45
5.1	INTRODUÇÃO	45
5.2	A TEORIA DE BRANS-DICKE	45
5.3	APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO NA TEORIA DE BRANS-DICKE	46
5.4	RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DA TEORIA DE BRANS-DICKE E DA RE- LATIVIDADE GERAL	48
5.5	SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA TEORIA DE BRANS- DICKE	49
5.6	FORÇA GRAVITACIONAL SOBRE UMA PARTÍCULA NO CASO DE BRANS- DICKE	50
5.7	MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA NO CONTEXTO DA TEORIA DE BRANS-DICKE	53
6	CONCLUSÃO.....	54
	REFERÊNCIAS	56
	APÊNDICES.....	59
	APÊNDICE A - Tensor de Ricci para a Métrica de Schwarzschild	59
	APÊNDICE B - Tensor de Ricci para $g_{\mu\nu}(r,t)$	63
	APÊNDICE C - Tensor de Ricci para a Métrica Geral	66
	APÊNDICE D - Sistema de Equações	69
	APÊNDICE E - Verificação de Equação	71

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1	Trajatória de um raio de luz em um espaço-tempo plano. Figura retirada de Ryder (2009).	29
Figura 3.2	A deflexão da luz no campo gravitacional de Schwarzschild. Figura retirada de Ryder (2009).	30

1 INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade Geral (EINSTEIN, 1915; LORENTZ; EINSTEIN; MIN-KOWSKI, 2001) é uma das principais realizações intelectuais do século XX. Caminhando para completar 100 anos em 2015, segue sendo a teoria padrão da gravitação (WILL, 2006). Não obstante, a teoria da gravitação de Newton pode ser recuperada como um caso particular da Relatividade Geral, sendo válida no domínio de campos gravitacionais fracos (HITZER; DEHNEN, 1997) e de corpos que se movem com baixas velocidades em comparação com a velocidade da luz. Nesse domínio, a força gravitacional deve variar com o inverso do quadrado da distância entre duas massas puntiformes.

Nos últimos anos, têm surgido algumas propostas teóricas relacionadas com as interações fundamentais da natureza (ARKANI-HAMED; DIMOPOULOS; DVALI, 1999; DIMOPOULOS; GIUDICE, 1996). De acordo com essas teorias, a existência de dimensões extras espaciais faria com que, em uma escala de comprimento pequena, menor do que 10^{-3} cm (HOYLE; SCHMIDT; HECKEL, 2001), a força gravitacional entre duas massas puntiformes se desviasse do valor previsto pela gravitação Newtoniana.

Uma maneira de se verificar desvios na força gravitacional em uma escala de comprimento pequena é através do estudo do efeito Casimir (CASIMIR, 1948). De acordo com a Eletrodinâmica Quântica, pares de partículas e antipartículas são continuamente criados e aniquilados no vácuo. Porém, a colocação de fronteiras nesse vácuo quântico, como por exemplo placas condutoras eletricamente neutras, ocasiona o aparecimento de uma força entre os condutores, a qual é chamada de força de Casimir. A este fenômeno dá-se o nome de efeito Casimir. Então, a procura por desvios na força de Casimir produz um teste de modelos que prevêem a existência de dimensões extras, podendo-se determinar também a magnitude do desvio da força gravitacional em relação à gravitação de Newton (MASUDA; SASAKI, 2009; DECCA et al., 2009).

A modificação da gravitação Newtoniana requerida por teorias que admitem a existência de dimensões extras espaciais (ARKANI-HAMED et al., 2000; SHIFMAN, 2010) pode, no entanto, ser obtida no próprio contexto da teoria quadridimensional da Relatividade Geral. De fato, é possível mostrar que um potencial gravitacional com um termo adicional do tipo de Yukawa pode ser obtido no limite de campo fraco e baixas velocidades da Relatividade Geral (DUAN; TIAN, 2008).

Além da teoria da Relatividade Geral, existem outras teorias de gravitação que foram propostas ao longo dos anos (WILL, 2006). Entre estas, pode-se destacar as teorias escalares-tensoriais (BERGMANN, 1968; WAGONER, 1970; NORDTVEDT, 1970), que são a mais simples generalização da Relatividade Geral através do acréscimo de um campo escalar ϕ para, junto com a métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço-tempo, descrever os efeitos gravitacionais da matéria. As teorias escalares-tensoriais da gravitação admitem um parâmetro de acoplamento ω do campo escalar com a geometria, o qual é, em geral, uma função do campo escalar: $\omega(\phi)$. A teoria de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961), corresponde ao caso em que $\omega(\phi) = \omega = \text{constante}$, devendo ser esse valor fixado por meio das observações experimentais.

O interesse no estudo das teorias escalares-tensoriais se dá devido a vários aspectos que têm sido investigados: em situações de altas energias, como no Universo Primordial, a natureza da gravitação pode ser escalar-tensorial (DAMOUR; POLYAKOV, 1994), elas podem ser o limite de baixas energias de teorias mais gerais que unifiquem a gravitação com outras interações ou a quantizem (FARAONI, 2009), além da verificação de testes experimentais da interação gravitacional (DAMOUR, 2000) e Cosmologia (WEINBERG, 2008).

Neste trabalho, investigamos inicialmente o problema da obtenção de uma gravitação Newtoniana modificada no caso da teoria da Relatividade Geral, detalhando o trabalho de Duan e Tian (2008). Em seguida, estudamos o problema do ponto de vista da teoria de Brans-Dicke, obtendo uma solução geral com simetria esférica para um campo gravitacional fraco. A partir desta solução, exibimos uma fórmula modificada para a gravitação Newtoniana, a qual pode descrever a gravidade em uma escala de comprimento pequena. Discutimos os resultados em comparação com o caso da Relatividade Geral.

A dissertação está organizada do seguinte modo: a seguir, no Capítulo 2, é feita uma revisão da solução de Schwarzschild, abordando-se algumas de suas consequências. No Capítulo 3, desenvolve-se o formalismo de campo fraco da Relatividade Geral. Prosseguindo-se, estuda-

se no Capítulo 4 a solução geral estática e com simetria esférica das equações de Einstein para o vazio, obtendo-se daí, no limite de campo fraco e baixas velocidades, uma gravitação Newtoniana modificada que incorpora um termo adicional do tipo de Yukawa na energia potencial. Então, investiga-se no Capítulo 5 o problema análogo ao do capítulo anterior, isto é, a obtenção de uma gravitação Newtoniana modificada com um termo do tipo de Yukawa, porém, no contexto da teoria gravitacional de Brans-Dicke. Finalmente, os resultados obtidos são apresentados e comentados no Capítulo 6.

2 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

2.1 INTRODUÇÃO

Vamos obter a solução de Schwarzschild das equações de campo de Einstein, a qual é uma solução básica da teoria da Relatividade Geral. Em seguida, examinamos o caso em que a métrica possua simetria esférica, mas seja variável no tempo, discutindo esse resultado à luz do teorema de Birkhoff.

2.2 A SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

A solução de Schwarzschild foi a primeira solução encontrada das equações de Einstein da Relatividade Geral (LANDAU; LIFSHITZ, 1996; LEITÃO, 2009), correspondendo ao campo de gravidade produzido por uma distribuição de matéria estática e esfericamente simétrica. Esta solução representa, com boa aproximação, o campo exterior gerado pelas estrelas, como o Sol.

Para obtermos a solução de Schwarzschild, vamos considerar a seguinte forma geral para o elemento de linha de um espaço-tempo com simetria esférica e estático:

$$ds^2 = \alpha(r)c^2dt^2 - \beta(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

o qual, por conveniência, ainda pode ser escrito como

$$ds^2 = e^v c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.2)$$

onde $v = v(r)$ e $\lambda = \lambda(r)$. Com as definições $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ e $x^3 = \varphi$, o tensor métrico covariante é dado por

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e^v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Ainda, como $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g^{\mu\nu}$, o tensor métrico na forma contravariante é igual a

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

As equações de campo da teoria da Relatividade Geral são expressas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci, $R = R^\mu{}_\mu$ o escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento da distribuição material, G a constante gravitacional de Newton e c a velocidade da luz. No vácuo, tem-se $T_{\mu\nu} = 0$ e logo (2.5) se reduz a

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.6)$$

onde,

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\beta{}_{\mu\nu} \Gamma^\alpha{}_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta{}_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}. \quad (2.7)$$

Então, precisamos calcular os símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\rho} (-g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu})$.

Calculando-se os símbolos de Christoffel não nulos, encontra-se que

$$\Gamma^1{}_{11} = \frac{1}{2} (\ln |g_{11}|)_{,1} = \frac{1}{2} \left[\ln (e^\lambda) \right]_{,1} = \frac{1}{2} \lambda',$$

$$\Gamma^1{}_{00} = -\frac{1}{2} g^{11} g_{00,1} = -\frac{1}{2} \frac{g_{00,1}}{g_{11}} = \frac{1}{2} e^{(v-\lambda)} v',$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} = -\frac{1}{2}\frac{g_{22,1}}{g_{11}} = -re^{-\lambda},$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{33,1} = -rsen^2\theta e^{-\lambda},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}g_{33,2} = -sen\theta \cos \theta,$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}(\ln|g_{00}|)_{,1} = \frac{1}{2}(\ln e^v)_{,1} = \frac{v'}{2},$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(\ln|g_{22}|)_{,1} = \frac{1}{2}(\ln r^2)_{,1} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2}(\ln|g_{33}|)_{,1} = \frac{1}{2}[\ln(r^2 sen^2\theta)]_{,1} = \frac{1}{r},$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2}(\ln|g_{33}|)_{,2} = \frac{1}{2}[\ln(r^2 sen^2\theta)]_{,2} = \frac{\cos \theta}{sen\theta} = \cotg\theta,$$

onde a linha significa a derivada em relação a r .

Agora, com os símbolos de Christoffel determinados, obtemos as componentes independentes e não nulas do tensor de Ricci a partir de (2.7), conforme detalhado no Apêndice A:

$$R_{00} = e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') \right],$$

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v'),$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} \left[1 - e^{\lambda} + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right].$$

Assim, as equações de campo (2.6) ficam

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') = 0, \quad (2.8)$$

$$-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') = 0, \quad (2.9)$$

$$1 - e^{\lambda} + \frac{r}{2} (v' - \lambda') = 0. \quad (2.10)$$

Somando-se (2.8) e (2.9), vem que

$$\frac{v' + \lambda'}{r} = 0 \implies v' + \lambda' = 0 \implies v + \lambda = \text{constante}. \quad (2.11)$$

Por outro lado, para $r \rightarrow \infty$ a métrica (2.2) deve tender para a métrica do espaço-tempo plano.

Assim,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^v \longrightarrow 1 \implies \lim_{r \rightarrow \infty} v \longrightarrow 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} e^{\lambda} \longrightarrow 1 \implies \lim_{r \rightarrow \infty} \lambda \longrightarrow 0,$$

e portanto, segue de (2.11) que

$$v + \lambda = 0. \quad (2.12)$$

Usando-se (2.12) em (2.10), temos

$$1 - e^\lambda - r\lambda' = 0,$$

multiplicando-se ambos os membros por $e^{-\lambda}$, obtém-se

$$e^{-\lambda} - r\lambda'e^{-\lambda} = 1$$

$$\frac{d}{dr}(re^{-\lambda}) = 1$$

$$re^{-\lambda} = r + C, \quad (2.13)$$

onde C é uma constante, para a qual atribuiremos o seguinte valor

$$C = -\frac{2GM}{c^2}, \quad (2.14)$$

sendo M uma constante, que é igual a massa do corpo central que produz o campo gravitacional (PAPAPETROU, 1974).

Dando continuidade, tem-se de (2.13) e (2.14) que

$$e^\lambda = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}. \quad (2.15)$$

E, imediatamente de (2.12) e (2.15), também encontramos

$$e^\nu = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (2.16)$$

Dessa forma, obtemos a solução de Schwarzschild (2.2):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.17)$$

O elemento de linha também pode ser escrito como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.18)$$

onde $r_S = \frac{2GM}{c^2}$ é chamado de raio de Schwarzschild ou raio gravitacional da massa M . Se $r = r_S$, temos uma singularidade na métrica (2.18), a qual é na verdade uma singularidade de coordenada, pois pode não ocorrer em outro sistema de coordenadas em que a métrica for escrita, como por exemplo, as coordenadas de Eddington-Finkelstein (PAPAPETROU, 1974).

No caso do Sol, que tem uma massa igual a $1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, encontramos que $r_S = 2,95 \text{ km}$. Porém, o raio do Sol é $R = 6,96 \times 10^5 \text{ km}$ e a métrica (2.18) é válida no exterior da estrela, para $r > R$. Portanto, efetivamente, tem-se que $r > r_S$ nos problemas envolvendo o campo externo gerado pelo Sol.

As estrelas passam por várias fases durante a sua evolução. Na fase final, após ter gasto o combustível nuclear, se a estrela tiver uma massa maior do que cerca de 1,44 vezes a massa do Sol, o chamado limite de Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR, 1931), ela se tornará uma estrela de nêutrons, com um raio tão pequeno quanto 4 km (RYDER, 2009). Porém, se sua massa é maior do que cerca de 6,7 vezes a massa do Sol (HARTLE, 1978; HARTLE, 2003), a estrela não poderá se manter em uma configuração de equilíbrio e colapsará em direção a $r = 0$. Nessas condições, a região do espaço em que $r < r_S$ será limitada pela superfície $r = r_S$, a qual agirá como um horizonte para observadores do lado de fora da região. Assim, sinais vindos de fora poderão entrar, mas nenhum sinal, nem mesmo a luz, poderá sair através da superfície. Teremos, então, a formação de um buraco negro (OHANIAN; RUFFINI, 1994). Experimentalmente, existem evidências da existência de buracos negros em sistemas binários de estrelas e nos centros de galáxias (HARTLE, 2003).

2.3 CAMPO GRAVITACIONAL VARIÁVEL NO TEMPO

Vamos considerar um campo gravitacional esfericamente simétrico e variável no tempo, que satisfaz as equações de Einstein no vazio. Este poderia ser, por exemplo, o campo gravitacional no exterior de uma estrela esfericamente simétrica que esteja colapsando, expandindo ou pulsando (OHANIAN; RUFFINI, 1994).

A métrica que vamos considerar é, portanto,

$$ds^2 = e^v c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (2.19)$$

sendo que, $v = v(r, t)$ e $\lambda = \lambda(r, t)$.

Verifica-se que os símbolos de Christoffel não nulos calculados na seção anterior não se alteram na sua expressão formal. Porém, os $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ a seguir são também não nulos:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{00} g_{00,0} = \frac{\dot{v}}{2},$$

$$\Gamma^0_{11} = \frac{1}{2} g^{00} (-g_{11,0}) = \frac{1}{2} \dot{\lambda} e^{(\lambda-v)},$$

$$\Gamma^1_{01} = \frac{1}{2} g^{11} g_{11,0} = \frac{\dot{\lambda}}{2},$$

onde o ponto significa a derivada em relação ao tempo.

Dessa forma, pode-se calcular as componentes do tensor de Ricci independentes e não nulas (ver Apêndice B):

$$R_{00} = e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') \right] - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{4} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4}, \quad (2.20)$$

$$R_{11} = \left[-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') \right] + e^{\lambda-v} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda}\dot{v}}{4} \right), \quad (2.21)$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} \left[1 - e^{\lambda} + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right], \quad (2.22)$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r}. \quad (2.23)$$

No entanto, de acordo com as equações de Einstein para o vazio, $R_{01} = 0$. Então, tem-se de (2.23) que $\lambda = \lambda(r)$. Logo, as equações de campo que se obtêm de (2.20)-(2.22) são formalmente idênticas àsquelas da seção anterior:

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') = 0, \quad (2.24)$$

$$-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') = 0, \quad (2.25)$$

$$1 - e^{\lambda} + \frac{r}{2} (v' - \lambda') = 0. \quad (2.26)$$

Fazendo-se a soma das equações (2.24) e (2.25), encontra-se que

$$(v + \lambda)' = 0 \implies v + \lambda = q(t) \implies e^v = e^{q(t)} e^{-\lambda}, \quad (2.27)$$

sendo $q(t)$ uma função a ser determinada. De (2.27), ainda segue que

$$v' = -\lambda'. \quad (2.28)$$

Utilizando-se (2.28), a equação (2.26) pode ser escrita como

$$e^{-\lambda} - r\lambda'e^{-\lambda} = 1 \implies \frac{d}{dr} [re^{-\lambda}] = 1.$$

Daí,

$$re^{-\lambda} = r + C. \quad (2.29)$$

Mais uma vez, com $C = -\frac{2GM}{c^2}$, tem-se que

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (2.30)$$

Assim, de (2.27), obtemos

$$e^v = e^{q(t)} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right). \quad (2.31)$$

Finalmente, a métrica variável no tempo procurada é, de acordo com (2.19), (2.30) e (2.31), igual a

$$ds^2 = e^{q(t)} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.32)$$

2.4 TEOREMA DE BIRKHOFF

Considerando-se a seguinte transformação de coordenada

$$d\tilde{t} = e^{\frac{1}{2}q(t)} dt \implies \tilde{t} = e^{\frac{1}{2}q(t)} t, \quad (2.33)$$

obtem-se a relação

$$d\tilde{t}^2 = e^{q(t)} dt^2. \quad (2.34)$$

Com a substituição de (2.34) em (2.32), a forma da métrica de Schwarzschild é recuperada para o observador com coordenada temporal $\tilde{t}$. Então, mostramos o resultado que constitui o teorema de Birkhoff:

“Uma solução esfericamente simétrica das equações de Einstein para o vazio é necessariamente estática”.

Portanto, o campo externo de uma estrela que esteja em colapso, em expansão ou pulsando, de tal forma que a simetria esférica seja mantida, é igual ao de uma estrela em repouso com simetria esférica.

Uma consequência do teorema de Birkhoff, é que uma distribuição esfericamente simétrica de massa não produz campo gravitacional dentro de uma cavidade esférica vazia, concêntrica com a distribuição. Esse resultado também é verificado na teoria gravitacional de Newton.

Para calcularmos o campo no interior da cavidade, a métrica deve ser, de acordo com o teorema, da forma de Schwarzschild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{C}{r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.35)$$

onde deixamos a constante C em aberto. Porém, se $C \neq 0$, haverá uma singularidade em $r = 0$ na cavidade vazia. Essa singularidade não deve existir, e logo, fixamos que $C = 0$. Assim, o espaço-tempo dentro da cavidade é plano, pois a métrica fica igual a

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.36)$$

significando a ausência de campo gravitacional no interior da cavidade.

3 A APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentaremos o formalismo de campo fraco da Relatividade Geral, obtendo as equações apropriadas para esse caso particular das equações de campo de Einstein. Depois, encontraremos a forma da métrica de Schwarzschild na situação de campo fraco. Faremos ainda uma aplicação para o cálculo da deflexão de um raio de luz passando próximo ao Sol.

3.2 APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

Como vimos, no capítulo anterior, as equações de campo da teoria da Relatividade Geral são dadas por

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}. \quad (3.1)$$

Fazendo-se a contração da equação (3.1), ou seja,

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}R = \frac{8\pi G}{c^4}g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta},$$

e usando-se que $T = T^\alpha{}_\alpha = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}$ é o traço do tensor energia-momento, $R = R^\alpha{}_\alpha = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ e $g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta} = \delta^\alpha{}_\alpha = \delta^0{}_0 + \delta^1{}_1 + \delta^2{}_2 + \delta^3{}_3 = 4$, temos

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T. \quad (3.2)$$

Substituindo (3.2) em (3.1), segue que

$$R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T \right]. \quad (3.3)$$

Essa é a forma alternativa das equações de Einstein (3.1).

Agora, consideremos que o campo gravitacional é fraco, de modo que a métrica do espaço-tempo difere muito pouco da métrica do espaço-tempo plano. Nessas condições, pode-se adotar um sistema de referência onde

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (3.4)$$

sendo $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ a métrica de Minkowski e $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$. Então, no que se segue, negligenciaremos as potências de $h_{\alpha\beta}$ superiores à de primeira ordem. Nesse sentido, o tensor de Riemann será escrito como (LANDAU; LIFSHITZ, 1996):

$$R_{\gamma\alpha\delta\beta} = \frac{1}{2} (h_{\gamma\beta,\alpha,\delta} + h_{\alpha\delta,\gamma,\beta} - h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} - h_{\gamma\delta,\alpha,\beta}). \quad (3.5)$$

Na mesma aproximação, o tensor de Ricci é dado por

$$R_{\alpha\beta} = R^{\delta}_{\alpha\delta\beta} = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta} = \eta^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta},$$

uma vez que $g^{\gamma\delta} = \eta^{\gamma\delta} - h^{\gamma\delta}$. Logo,

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + h^{\gamma}_{\alpha,\beta,\gamma} + h^{\gamma}_{\beta,\alpha,\gamma} - h_{,\alpha,\beta} \right), \quad (3.6)$$

onde $h = h^{\gamma}_{\gamma}$. Assim, as equações de campo de Einstein (3.3) se tornam iguais a

$$\left(-\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + h^{\gamma}_{\alpha,\beta,\gamma} + h^{\gamma}_{\beta,\alpha,\gamma} - h_{,\alpha,\beta} \right) = \frac{16\pi G}{c^4} \left[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}T \right], \quad (3.7)$$

com $g_{\alpha\beta}T = (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})T = \eta_{\alpha\beta}T$.

De modo arbitrário, pode-se escolher quatro das dez componentes do tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, o que tem como consequência a imposição de quatro condições arbitrárias aos $h_{\alpha\beta}$ (LANDAU; LIFSHITZ, 1996). Um conjunto de condições geralmente utilizado é o das condições harmônicas (também chamado de “gauge” harmônico). Essas condições harmônicas são dadas pelas equações

$$\left(h^\alpha{}_\beta - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta h\right)_{,\alpha} = 0, \quad (3.8)$$

isto é,

$$h^\alpha{}_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta h_{,\alpha} = 0 = h^\delta{}_{\beta,\delta} - \frac{1}{2}\delta^\delta{}_\beta h_{,\delta}.$$

E ainda, derivando em relação a α ,

$$h^\delta{}_{\beta,\delta,\alpha} - \frac{1}{2}\delta^\delta{}_\beta h_{,\delta,\alpha} = 0$$

$$h^\delta{}_{\beta,\alpha,\delta} - \frac{1}{2}h_{,\alpha,\beta} = 0. \quad (3.9)$$

Por outro lado, a equação do gauge harmônico também pode ser escrita como

$$h^\delta{}_{\alpha,\delta} - \frac{1}{2}\delta^\delta{}_\alpha h_{,\delta} = 0.$$

Daí, derivando em relação a β ,

$$h^\delta{}_{\alpha,\delta,\beta} - \frac{1}{2}\delta^\delta{}_\alpha h_{,\delta,\beta} = 0$$

$$h^\delta{}_{\alpha,\beta,\delta} - \frac{1}{2}h_{,\alpha,\beta} = 0. \quad (3.10)$$

Somando-se (3.9) e (3.10), vem que

$$h^{\delta}_{\beta,\alpha,\delta} + h^{\delta}_{\alpha,\delta,\beta} - h_{\alpha,\beta} = 0. \quad (3.11)$$

Com o uso de (3.11), a equação (3.7) fica igual a

$$\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} T \right]. \quad (3.12)$$

Desenvolvendo-se o produto $\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta}$, teremos

$$\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} = \eta^{00} h_{\alpha\beta,0,0} + \eta^{11} h_{\alpha\beta,1,1} + \eta^{22} h_{\alpha\beta,2,2} + \eta^{33} h_{\alpha\beta,3,3}$$

$$\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial t^2} - \nabla^2 h_{\alpha\beta} = \square h_{\alpha\beta},$$

onde $\square$ é o D'Alembertiano. Assim, a partir de (3.12), as equações de campo fraco da teoria da Relatividade Geral são obtidas:

$$\square h_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} T \right]. \quad (3.13)$$

Nestas equações, uma vez que o conteúdo material $T_{\alpha\beta}$ seja conhecido, pode-se determinar $h_{\alpha\beta}$. Então, com o auxílio de (3.4), a métrica $g_{\alpha\beta}$ do espaço-tempo pode ser encontrada.

Se a métrica for independente do tempo, tem-se que

$$\square h_{\alpha\beta} = -\nabla^2 h_{\alpha\beta},$$

e portanto, as equações de campo (3.13) podem ser simplificadas dando o resultado

$$\nabla^2 h_{\alpha\beta} = \frac{16\pi G}{c^4} \left[T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} T \right]. \quad (3.14)$$

3.3 A MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD NO LIMITE DE CAMPO FRACO

Vamos obter a expressão da métrica de Schwarzschild quando o campo gravitacional produzido pelo corpo central de massa M é fraco. Como já conhecemos a métrica exata de Schwarzschild, obtida no Capítulo 2:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.15)$$

poderemos obter a métrica de campo fraco diretamente de (3.15). Para isso, deve-se notar que, se $M = 0$, a métrica anterior se reduz para

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

que corresponde naturalmente à métrica do espaço-tempo plano. Assim, para passarmos ao caso de campo fraco a partir de (3.15), consideraremos a situação particular em que

$$\frac{2GM}{c^2 r} \ll 1. \quad (3.16)$$

Dessa forma, usando-se a expansão binomial, obtém-se que

$$\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} = 1 + \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (3.17)$$

Então, a métrica de campo fraco de Schwarzschild procurada é

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.18)$$

3.4 O CÁLCULO DA DEFLEXÃO DA LUZ

Uma situação em que se pode considerar que o campo gravitacional é fraco, é quando precisamos calcular a deflexão sofrida por um raio de luz ao passar nas vizinhanças do Sol. Para ver isso, vamos partir da equação que descreve a trajetória do raio (PAPAPETROU, 1974):

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3GM}{c^2 r^2}. \quad (3.19)$$

Se o raio se move em uma região onde $M = 0$, a equação anterior fica

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = 0, \quad (3.20)$$

cuja solução é

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \varphi, \quad (3.21)$$

a qual corresponde, como deveria ser, a uma trajetória em linha reta, indicada pela seta escura na Figura 3.1. É interessante notar que,

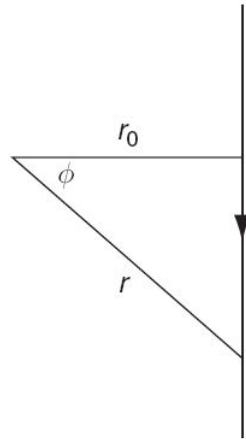


Figura 3.1: Trajetória de um raio de luz em um espaço-tempo plano. Figura retirada de Ryder (2009).

Agora, retornando para a equação (3.19), considerando que o campo gravitacional é fraco, de modo que

$$\frac{3GM}{c^2 r} \ll 1 \Rightarrow \frac{3GM}{c^2 r^2} \ll \frac{1}{r}, \quad (3.22)$$

vamos substituir a equação (3.21) em (3.19) como uma solução aproximada. Assim, vem que

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{3GM}{c^2 r_0^2} \cos^2 \varphi. \quad (3.23)$$

A solução para (3.23) é dada pela soma de (3.21), que é a solução da equação diferencial homogênea, mais uma solução particular de (3.23). Logo, pode-se obter

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} \cos \varphi + \frac{GM}{c^2 r_0^2} (1 + \sin^2 \varphi). \quad (3.24)$$

A trajetória seguida pelo raio de luz é indicada na Figura 3.2 pela curva escura.

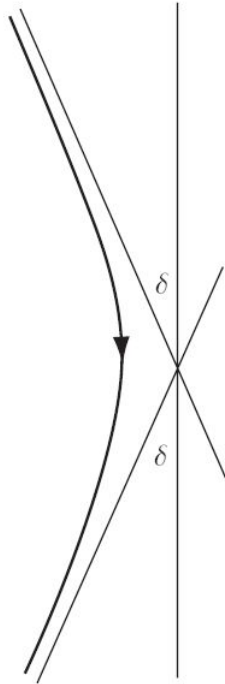


Figura 3.2: A deflexão da luz no campo gravitacional de Schwarzschild. Figura retirada de Ryder (2009).

Quando $r \rightarrow \infty$, temos agora que $\varphi \rightarrow \pm \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)$, e portanto obtemos de (3.24)

$$0 = \frac{1}{r_0} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) + \frac{GM}{c^2 r_0^2} \left[1 + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \delta\right)\right]$$

$$0 = -\frac{\sin \delta}{r_0} + \frac{GM}{c^2 r_0^2} (1 + \cos^2 \delta).$$

Como devemos ter $\delta \ll 1$, segue que $\sin \delta \sim \delta$ e $\cos \delta \sim 1$. Resulta então que,

$$0 = -\frac{\delta}{r_0} + \frac{2GM}{c^2 r_0^2},$$

isto é,

$$\delta = \frac{2GM}{c^2 r_0}.$$

A deflexão total do raio de luz, conforme a Figura 3.2, é

$$\triangle = 2\delta = \frac{4GM}{c^2 r_0}. \quad (3.25)$$

Para um feixe de luz passando nas proximidades do Sol, a distância de maior aproximação r_0 é efetivamente o raio do Sol. Colocando ainda M como a massa do Sol, pode-se obter o valor da deflexão

$$\triangle = 1,75'' \text{ de arco}. \quad (3.26)$$

Esse efeito foi verificado pela primeira vez em 1919, durante um eclipse solar, por equipes comandadas pelo astrônomo inglês Eddington, uma delas em Sobral no Ceará e a outra na África (WEINBERG, 1972). Elas fotografaram estrelas próximas ao Sol durante o eclipse. Essa mesma região do céu foi fotografada meses depois, sem a presença do Sol, o que permitiu a determinação da posição real das estrelas. A comparação entre as fotos comprovou a deflexão da luz das estrelas, em acordo com a previsão (3.26). É interessante notar, que a teoria de Newton da gravitação também prevê a deflexão da luz, mas o valor é metade do valor previsto pela Relatividade Geral (PAPAPETROU, 1974).

Atualmente, a diferença entre a previsão da Relatividade Geral e o valor observado para a deflexão da luz é de 3×10^{-4} (SHAPIRO et al., 2004).

4 SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA RELATIVIDADE GERAL E MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

4.1 INTRODUÇÃO

Inicialmente, obtemos a solução geral estática e com simetria esférica das equações de Einstein, passando em seguida ao limite de campo fraco. De posse dessa solução, examinamos a equação de movimento para uma partícula de massa m , supondo que a mesma se mova com baixa velocidade em comparação com a velocidade da luz. Mostra-se, então, que é possível obter uma força gravitacional modificada em relação à gravitação de Newton (DUAN; TIAN, 2008), a qual poderia ser aplicada em uma escala de comprimento pequena.

4.2 SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA RELATIVIDADE GERAL: AS EQUAÇÕES DE CAMPO

O Elemento de linha mais geral com simetria esférica e estático tem a seguinte forma:

$$ds^2 = A(r)c^2 dt^2 - B(r)dr^2 - \left[\frac{r}{f(r)} \right]^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.1)$$

Por conveniência, façamos $A(r) = e^{\nu(r)}$ e $B(r) = e^{\lambda(r)}$. Logo,

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - \left[\frac{r}{f(r)} \right]^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (4.2)$$

Assintoticamente, quando $r \rightarrow \infty$, o espaço-tempo torna-se o espaço-tempo de Minkowski, o que exige que $\nu \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$ e $f(r) \rightarrow 1$ para $r \rightarrow \infty$. Ainda, com a definição $F(r) = \frac{r}{f(r)}$, a métrica pode ser representada por

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e^\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -F^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

As equações de Einstein no vácuo são

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\beta_{\mu\nu}\Gamma^\alpha_{\beta\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha}\Gamma^\alpha_{\beta\nu} = 0, \quad (4.4)$$

com os símbolos de Christoffel dados por $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(-g_{\mu\nu,\rho} + g_{\rho\mu,\nu} + g_{\nu\rho,\mu})$.

Para a métrica (4.3), todos os símbolos de Christoffel são nulos, com exceção dos seguintes:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{1}{2}(\ln|g_{11}|)_{,1} = \frac{1}{2}[\ln|-e^\lambda|]_{,1} = \frac{1}{2}\lambda',$$

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{00,1} = -\frac{1}{2}\frac{g_{00,1}}{g_{11}} = -\frac{1}{2}\frac{e^\nu v'}{(-e^\lambda)} = \frac{1}{2}e^{(\nu-\lambda)}v',$$

$$\Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{22,1} = -\frac{1}{2}\frac{(-F^2)_{,1}}{(-e^\lambda)} = -FF'e^{-\lambda},$$

$$\Gamma^1_{33} = -\frac{1}{2}g^{11}g_{33,1} = -\frac{1}{2}\frac{(-F^2 \sin^2 \theta)_{,1}}{(-e^\lambda)} = -FF'\sin^2 \theta e^{-\lambda},$$

$$\Gamma^2_{33} = -\frac{1}{2}g^{22}g_{33,2} = -\frac{1}{2}\frac{g_{33,2}}{g_{22}} = -\frac{1}{2}\frac{(-F^2 \sin^2 \theta)_{,2}}{(-F^2)} = -\sin \theta \cos \theta,$$

$$\Gamma^0_{10} = \frac{1}{2}(\ln|g_{00}|)_{,1} = \frac{1}{2}(\ln e^\nu)_{,1} = \frac{v'}{2},$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{1}{2}(\ln|g_{22}|)_{,1} = \frac{1}{2}(\ln F^2)_{,1} = \frac{F'}{F},$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{1}{2} (\ln |g_{33}|)_{,1} = \frac{1}{2} (\ln (F^2 \sin^2 \theta))_{,1} = \frac{F'}{F},$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{1}{2} (\ln |g_{33}|)_{,2} = \frac{1}{2} (\ln (F^2 \sin^2 \theta))_{,2} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta.$$

Após a determinação dos símbolos de Christoffel, podemos encontrar as componentes independentes e não nulas do tensor de Ricci (ver Apêndice C):

$$R_{00} = e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') + \frac{F'v'}{F} \right],$$

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} - \frac{2F''}{F} + \frac{\lambda'v'}{4} + \frac{F'\lambda'}{F} - \frac{v'^2}{4},$$

$$R_{22} = -F'^2 e^{-\lambda} - FF'' e^{-\lambda} + FF' e^{-\lambda} \frac{\lambda'}{2} - FF' e^{-\lambda} \frac{v'}{2} + 1.$$

Igualando-se cada uma das componentes do tensor de Ricci a zero, obtemos as equações de campo

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') + \frac{F'v'}{F} = 0, \quad (4.5)$$

$$-\frac{v''}{2} - \frac{2F''}{F} + \frac{\lambda'v'}{4} + \frac{F'\lambda'}{F} - \frac{v'^2}{4} = 0, \quad (4.6)$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{F''}{F} + \frac{F'^2}{F^2} + \frac{F'}{2F} (v' - \lambda') \right] - \frac{1}{F^2} = 0, \quad (4.7)$$

onde o termo da componente R_{22} , após ter sido igualado a zero, foi multiplicado pelo fator $-1/F^2$.

4.3 SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA RELATIVIDADE GERAL: A MÉTRICA

Para resolver as equações de campo e encontrarmos a métrica, faremos algumas manipulações com as equações (4.5), (4.6) e (4.7), obtendo o sistema (ver Apêndice D):

$$e^{-\lambda} \left[\frac{2F''}{F} + \frac{F'^2}{F^2} - \frac{F'\lambda'}{F} \right] - \frac{1}{F^2} = 0, \quad (4.8)$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{F'^2}{F^2} + \frac{F'\nu'}{F} \right] - \frac{1}{F^2} = 0, \quad (4.9)$$

$$\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{2F''}{F} - \frac{\lambda'\nu'}{2} - \frac{F'}{F} (\lambda' - \nu') = 0. \quad (4.10)$$

Na sequência, vamos trabalhar com este sistema. Inicialmente, seja a subtração das equações: (4.8)–(4.9), resultando em

$$e^{-\lambda} \left[\frac{2F''}{F} + \frac{F'^2}{F^2} - \frac{F'\lambda'}{F} - \frac{F'^2}{F^2} - \frac{F'\nu'}{F} \right] = 0$$

$$\frac{2F''}{F} - \frac{F'\lambda'}{F} - \frac{F'\nu'}{F} = 0$$

$$2F'' - F'(\lambda' + \nu') = 0$$

$$F'' = F' \frac{(\lambda + \nu)'}{2}. \quad (4.11)$$

Fazendo $F' = p$, temos

$$p' = p \frac{(\lambda + \nu)'}{2}$$

$$\frac{p'}{p} = \left(\frac{\lambda + \nu}{2} \right)'$$

$$(\ln p)' = \left(\frac{\lambda + \nu}{2} \right)'$$

$$\ln p = \frac{\lambda + \nu}{2}$$

$$\lambda = 2 \ln p - \nu. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.12) em (4.9), encontra-se

$$e^{-\lambda} \left[F'^2 + F' F \nu' \right] = 1$$

$$e^{\ln p^{-2}} e^{\nu} \left[F'^2 + F' F \nu' \right] = 1$$

$$\frac{e^{\nu}}{p^2} \left[F'^2 + F' F \nu' \right] = 1$$

$$\frac{e^{\nu}}{F'} \left[F' + F \nu' \right] = 1$$

$$e^{\nu} (F' + F \nu') = F'$$

$$(e^{\nu} F)' = F' \Rightarrow e^{\nu} F = F + \alpha_0,$$

onde α_0 é uma constante arbitrária. Daí,

$$e^v = 1 + \frac{\alpha_0}{F}. \quad (4.13)$$

Como $F = \frac{r}{f(r)}$, também temos que

$$e^v = 1 + \frac{\alpha_0 f(r)}{r}. \quad (4.14)$$

A partir de (4.13), segue que $v = \ln \left(1 + \frac{\alpha_0}{F} \right)$. Levando esse resultado em (4.12), vem que

$$\lambda = \ln p^2 - v$$

$$e^\lambda = \exp \left[\ln p^2 - \ln \left(1 + \frac{\alpha_0}{F} \right) \right] = \exp \left[\ln \left(\frac{p^2}{1 + \frac{\alpha_0}{F}} \right) \right]$$

$$e^\lambda = \frac{p^2}{1 + \frac{\alpha_0}{F}}$$

$$e^\lambda = \frac{F'^2}{1 + \frac{\alpha_0}{F}} = \frac{F'^2}{1 + \frac{\alpha_0 f(r)}{r}}. \quad (4.15)$$

Obtivemos as soluções (4.14) e (4.15) usando apenas as equações (4.8) e (4.9) do sistema. Porém, pode-se mostrar (ver Apêndice E) que a equação (4.10) é identicamente satisfeita por (4.14) e (4.15).

De acordo com as equações (4.2), (4.14) e (4.15), a solução geral com simetria esférica das equações de Einstein é

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha_0 f(r)}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{F'^2}{1 + \frac{\alpha_0 f(r)}{r}} dr^2 - \left[\frac{r}{f(r)} \right]^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.16)$$

Para r muito grande, devemos ter $f(r) \rightarrow 1$, e logo $F \rightarrow r$. Nessas condições, tem-se também que $f'(r) \rightarrow 0$ e $F' \rightarrow 1$. Portanto, quando $r \rightarrow \infty$ obtém-se que

$$1 + \frac{\alpha_0 f(r)}{r} \rightarrow 1,$$

$$\frac{F'^2}{1 + \frac{\alpha_0 f(r)}{r}} \rightarrow 1,$$

$$\frac{r}{f(r)} \rightarrow r,$$

e a métrica (4.16), em pontos muito distantes da fonte, recai na solução de Minkowski para o espaço-tempo plano.

Fixar a função $f(r)$ significa fixar um sistema de referência. Porém, na Relatividade Geral, a escolha do sistema de referência é arbitrária e, dessa forma, a função $f(r)$ não é fixada de antemão pelas equações da teoria, ficando com o seu valor em aberto. Dependendo, então, da escolha que se faça de $f(r)$, encontram-se algumas soluções conhecidas, que correspondem a determinadas escolhas de coordenadas.

Como um exemplo, a solução de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.17)$$

é obtida de (4.16) se $f(r) = 1$ e $\alpha_0 = -\frac{2GM}{c^2}$. A solução de Fock (FOCK, 1959; DUAN; TIAN, 2008), por sua vez, pode ser obtida se fizermos $f(r) = \frac{1}{1 + \frac{GM}{c^2 r}}$ e $\alpha_0 = -\frac{2GM}{c^2}$ em (4.16), encontrando

$$ds^2 = \left[\frac{1 - \frac{GM}{c^2 r}}{1 + \frac{GM}{c^2 r}} \right] c^2 dt^2 - \left[\frac{1 + \frac{GM}{c^2 r}}{1 - \frac{GM}{c^2 r}} \right] dr^2 - r^2 \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.18)$$

É interessante comentar que se fizermos a mudança de coordenada $r \rightarrow r + \frac{GM}{c^2}$ em (4.17), obteremos a métrica de Fock (4.18), o que mostra que de fato as duas soluções (4.17) e (4.18) representam a mesma situação física, referindo-se à gravitação produzida no exterior de um corpo esfericamente simétrico.

4.4 SOLUÇÃO GERAL DE CAMPO FRACO COM SIMETRIA ESFÉRICA

Vamos fazer a seguinte escolha para $f(r)$:

$$f(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \left(g(r) + \frac{1}{2} \right), \quad (4.19)$$

onde $g(r)$ é tal que as condições mencionadas sobre $f(r)$ são satisfeitas. Além disso, consideremos que $\frac{GM}{c^2 r} \ll 1$. Então, com essas condições, a métrica (4.16) torna-se apropriada para o regime de campo fraco. Agora, se $g(r) = -\frac{1}{2}$ e $\alpha_0 = -\frac{2GM}{c^2}$, recuperamos, a partir de (4.16), a métrica de Schwarzschild na aproximação de campo fraco

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.20)$$

Ainda, se $g(r) = -1$ e $\alpha_0 = -\frac{2GM}{c^2}$, temos a métrica de Fock na aproximação de campo fraco

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) dr^2 - r^2 \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.21)$$

4.5 FORÇA GRAVITACIONAL SOBRE UMA PARTÍCULA

Assumindo a métrica geral de campo fraco com simetria esférica, dada por (4.16) com a função $f(r)$ expressa por (4.19) e $\frac{GM}{c^2 r} \ll 1$, vamos obter a equação de movimento para uma partícula de massa m sujeita a esse campo gravitacional. Para isso, vamos supor que a partícula se move com baixa velocidade em comparação com a velocidade da luz. Então,

$$\frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} = \frac{cdt}{ds} \sim 1. \quad (4.22)$$

A equação de movimento é a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (4.23)$$

que, de acordo com (4.22), fornece a equação relevante

$$\frac{d^2 x^i}{c^2 dt^2} + \Gamma_{00}^i = 0$$

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i c^2 = 0. \quad (4.24)$$

Porém,

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ii} (-g_{00,i} + g_{i0,0} + g_{0i,0}).$$

Observe que na equação acima, o índice "i" está fixo, sendo igual a 1, 2, ou 3, não se aplicando a convenção de soma de Einstein para índices repetidos. Portanto,

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ii} g_{00,i}. \quad (4.25)$$

Logo,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{c^2}{2} g^{ii} g_{00,i}. \quad (4.26)$$

Como $x^1 = r$, obtemos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{2} g^{11} g_{00,1} = \frac{c^2}{2} \frac{g_{00,1}}{g_{11}}. \quad (4.27)$$

Usando (4.16), segue que

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} \left(\frac{1 + \frac{\alpha_0}{F}}{F'^2} \right) \alpha_0 \left(\frac{1}{F} \right)'$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2 \alpha_0 F'}{2F^2} \left(\frac{1}{F'^2} + \frac{\alpha_0}{F F'^2} \right). \quad (4.28)$$

Mas,

$$F' = \frac{f(r) - rf'(r)}{[f(r)]^2} = \frac{f - rf'}{f^2}. \quad (4.29)$$

Então, (4.28) fica

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2\alpha_0}{2r^2} \left[\frac{f^4}{f - rf'} + \frac{\alpha_0 f^5}{r(f - rf')} \right]$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2\alpha_0}{2r^2} \left(\frac{f^4 + \frac{\alpha_0 f^5}{r}}{f - rf'} \right). \quad (4.30)$$

Daí, com $\alpha_0 = -\frac{2GM}{c^2}$, temos que

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{f^4 - \frac{2GM}{c^2 r} f^5}{f - rf'} \right). \quad (4.31)$$

Portanto, a expressão geral para força gravitacional sobre uma partícula de massa m , causada pela ação de uma outra partícula de massa M , é

$$F_{Grav} = m \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GMm}{r^2} \left[\frac{f^4 - \frac{2GM}{c^2 r} f^5}{f - rf'} \right]. \quad (4.32)$$

Deve-se notar que, se $f = 1$, o que corresponde a usar a métrica de Schwarzschild (4.20), recupera-se o limite Newtoniano da Relatividade Geral (NARLIKAR, 1993), pois

$$F_{Grav} = -\frac{GMm}{r^2}. \quad (4.33)$$

Façamos, porém, a seguinte escolha

$$\frac{2GM}{c^2 r} g(r) = \beta(r) e^{-\frac{r}{\lambda}}, \quad (4.34)$$

onde λ é uma constante. Assim, conforme (4.19) e (4.34),

$$f(r) = 1 + \beta(r) e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{GM}{c^2 r}. \quad (4.35)$$

Substituindo (4.35) em (4.32), desprezando termos de segunda ordem ou maiores em $\beta(r)$ e $\frac{GM}{c^2 r}$, encontramos que

$$F_{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left[\frac{1 + 4\beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{4GM}{c^2 r} - \frac{2GM}{c^2 r} \left(1 + 5\beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{5GM}{c^2 r} \right)}{1 + \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{GM}{c^2 r} - r \left(1 + \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} \right)' - r \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)'} \right]$$

$$F_{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left[\frac{1 + 4\beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{4GM}{c^2 r} - \frac{2GM}{c^2 r}}{1 + \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{GM}{c^2 r} - r \left(1 + \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} \right)' + \frac{GM}{c^2 r}} \right]$$

$$F_{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left[\frac{1 + 4\beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{2GM}{c^2 r}}{1 + \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{2GM}{c^2 r} - r\beta' e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{r}{\lambda} \beta e^{-\frac{r}{\lambda}}} \right]$$

$$\begin{aligned} F_{Grav} &= -\frac{GMm}{r^2} \left(1 + 4\beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{2GM}{c^2 r} \right) \\ &\quad \times \left(1 - \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} - \frac{2GM}{c^2 r} + r\beta' e^{-\frac{r}{\lambda}} - \frac{r}{\lambda} \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} \right) \end{aligned}$$

$$F_{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + 4\beta e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{2GM}{c^2 r} - \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} - \frac{2GM}{c^2 r} + r\beta' e^{-\frac{r}{\lambda}} - \frac{r}{\lambda} \beta e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]$$

$$F_{Grav} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + \left(3\beta + r\beta' - \frac{r}{\lambda} \beta \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]. \quad (4.36)$$

4.6 MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

De acordo com algumas teorias (ARKANI-HAMED; DIMOPOULOS; DVALI, 1999; ARKANI-HAMED et al., 2000), a existência de dimensões extras espaciais faria com que efeitos não-Newtonianos ocorressem em uma escala de comprimento pequena, menor do que 10^{-3} cm (HOYLE; SCHMIDT; HECKEL, 2001). Então, a energia potencial gravitacional modificada poderia ser dada por (DUAN; TIAN, 2008)

$$V = -\frac{GMm}{r}(1 + \alpha e^{-\frac{r}{\lambda}}), \quad (4.37)$$

onde nota-se, em relação à energia potencial Newtoniana, a presença de um termo adicional do tipo de Yukawa. Nesse termo, λ é uma constante e $\alpha = \alpha(r)$ uma função a ser determinada experimentalmente.

A força gravitacional associada com a energia potencial (4.37) pode ser calculada:

$$F_G = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + \left(\alpha - r\alpha' + \frac{r}{\lambda}\alpha \right) e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]. \quad (4.38)$$

Comparando-se (4.38) com (4.36), percebe-se que as equações são equivalentes desde que

$$\alpha - r\alpha' + \frac{r}{\lambda}\alpha = 3\beta + r\beta' - \frac{r}{\lambda}\beta. \quad (4.39)$$

Assim, a função $\beta(r)$ poderia ser determinada. Daí, usando-se (4.35), a forma exata de $f(r)$ poderia também ser obtida e, finalmente, encontraria-se a métrica (4.16) para uma escala de comprimento pequena.

Como foi demonstrado, é possível, no contexto da teoria da Relatividade Geral, obter-se uma força gravitacional em uma escala de comprimento pequena incorporando efeitos não-Newtonianos, os quais seriam causados por um potencial gravitacional com um termo adicional do tipo de Yukawa.

5 TEORIA DE BRANS-DICKE: SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA E MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA

5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos os conceitos básicos da teoria gravitacional de Brans-Dicke, exibindo as equações de campo na forma exata e depois introduzindo o formalismo de campo fraco dessa teoria. Na sequência, mostra-se como construir uma solução de campo fraco de Brans-Dicke a partir de uma solução conhecida da Relatividade Geral. Emprega-se esse resultado para obter-se a solução geral estática e com simetria esférica para a teoria de Brans-Dicke. Então, nesse contexto, calculamos a expressão da força sobre uma partícula, verificando a possibilidade de se obter uma gravitação modificada com um potencial adicional do tipo de Yukawa.

5.2 A TEORIA DE BRANS-DICKE

A teoria gravitacional de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961; LEITÃO, 2009) foi proposta como uma alternativa à teoria da Relatividade Geral. É uma teoria métrica, porque o conteúdo material está associado com a determinação da geometria do espaço-tempo. No entanto, além da métrica $g_{\mu\nu}$ a teoria possui um campo escalar ϕ para a descrição completa dos efeitos gravitacionais, sendo conhecida como uma teoria escalar-tensorial da gravitação. Esse campo escalar é identificado com G^{-1} , de modo que é uma teoria em que a “constante” gravitacional de Newton passa a ser variável.

As equações de campo da teoria de Brans-Dicke são (ADLER; BAZIN; SCHIFFER, 1975):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi c^4}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\square\phi), \quad (5.1)$$

$$\square\phi = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3)c^4}, \quad (5.2)$$

com $\square\phi = \phi^{;\sigma}_{;\sigma} = g^{\sigma\gamma}\phi_{,\gamma;\sigma}$. O tensor energia-momento associado ao conteúdo material é $T_{\mu\nu}$ e $T = T^\mu_\mu$. A constante de acoplamento ω é adimensional, não sendo fixada pela teoria. De acordo com observações experimentais, o melhor ajuste para o valor de ω é de 40.000 (BERTOTTI; IESS; TORTORA, 2003).

5.3 APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Para obter-se as equações de campo de Brans-Dicke na aproximação de campo fraco, vamos fazer a contração de (5.1):

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R &= \frac{8\pi}{\phi c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}) \\ &+ \frac{1}{\phi}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu;\nu} - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\square\phi), \end{aligned}$$

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{8\pi}{\phi c^4}T + \frac{\omega}{\phi^2}(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} - \frac{1}{2}4\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{\phi}(\square\phi - 4\square\phi)$$

$$R = -\frac{8\pi}{\phi c^4}T + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + \frac{3}{\phi}\square\phi. \quad (5.3)$$

Substituindo (5.3) em (5.1), tem-se que

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\square\phi}{\phi} + \frac{1}{\phi}\phi_{,\mu;\nu}. \quad (5.4)$$

Levando-se (5.2) em (5.4), obtemos que

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] + \frac{\omega}{\phi^2} \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} + \frac{1}{\phi} \phi_{,\mu;\nu}. \quad (5.5)$$

As equações (5.5) e (5.2) constituem uma forma alternativa para as equações de campo da teoria de Brans-Dicke.

Na aproximação de campo fraco da teoria de Brans-Dicke, considera-se que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (5.6)$$

e ainda,

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon = \phi_0 \left(1 + \frac{\varepsilon}{\phi_0} \right), \quad (5.7)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, ϕ_0 uma constante, e ε um termo de primeira ordem na densidade de energia, de maneira que $|\varepsilon/\phi_0| \ll 1$. Assim, manteremos apenas os termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$ e ε . Com as condições (5.6) e (5.7), as equações (5.5) e (5.2) tornam-se iguais a

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi_0 c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left(\frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] + \frac{\varepsilon_{,\mu;\nu}}{\phi_0}, \quad (5.8)$$

$$\square \varepsilon = \frac{8\pi T}{(2\omega+3) c^4}, \quad (5.9)$$

que são as equações de campo fraco da teoria de Brans-Dicke.

Quando $\omega \rightarrow \infty$, pode-se obter de (5.9) que $\varepsilon \rightarrow 0$. Além disso, (5.8) se reduz nesse limite a

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} T \right], \quad (5.10)$$

sendo que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi_0 \rightarrow 1/G$. Observa-se que (5.10), de acordo com (3.3), são as equações de campo fraco da Relatividade Geral. Portanto, as equações de campo fraco de Brans-Dicke se reduzem para as equações de Einstein no limite $\omega \rightarrow \infty$ (ROMERO; BARROS, 1993; FAR-
ONI, 1998).

5.4 RELAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DA TEORIA DE BRANS-DICKE E DA RELATIVIDADE GERAL

Pode-se obter uma relação bastante útil entre as soluções de campo fraco da teoria de Brans-Dicke e da Relatividade Geral. De fato, se a métrica $g_{\mu\nu}(G, x)$ é uma solução conhecida das equações de Einstein na aproximação de campo fraco para um dado $T_{\mu\nu}$, então a solução correspondente na teoria de Brans-Dicke para o mesmo $T_{\mu\nu}$ será dada por (BARROS; ROMERO, 1998)

$$g_{\mu\nu}^{BD}(x) = [1 - G_0 \varepsilon(x)] g_{\mu\nu}(G_0, x), \quad (5.11)$$

onde $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) G = \frac{1}{\phi_0}$.

Esse resultado permite encontrar a métrica de Brans-Dicke sem que seja necessário resolver as equações (5.8). Realmente, o que se precisa para encontrar-se $g_{\mu\nu}^{BD}(x)$ em (5.11) é fazer-se a substituição de G por G_0 na métrica conhecida de Einstein $g_{\mu\nu}(G, x)$, gerando o fator $g_{\mu\nu}(G_0, x)$. Além disso, deve-se resolver (5.9) para obter $\varepsilon(x)$.

No caso estático, em que $\varepsilon(x)$ é independente do tempo, a equação (5.9) ainda pode ser simplificada:

$$\square \varepsilon = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \nabla^2 \varepsilon = -\nabla^2 \varepsilon = \frac{8\pi T}{(2\omega+3)c^4},$$

ou seja,

$$\nabla^2 \varepsilon = -\frac{8\pi T}{(2\omega+3)c^4}. \quad (5.12)$$

5.5 SOLUÇÃO GERAL COM SIMETRIA ESFÉRICA NA TEORIA DE BRANS-DICKE

De acordo com (5.11), o elemento de linha mais geral estático e com simetria esférica no contexto da teoria de Brans-Dicke é

$$ds_{BD}^2 = [1 - G_0 \varepsilon(r)] ds^2, \quad (5.13)$$

onde ds^2 é dado por (4.16) com a substituição de G por G_0 e, devido à simetria esférica, deve-se ter $\varepsilon(x) = \varepsilon(r)$. Então, pode-se escrever

$$ds_{BD}^2 = [1 - G_0 \varepsilon(r)] \left[\left(1 + \frac{\alpha_0(G_0) f(r, G_0)}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{F^2}{1 + \frac{\alpha_0(G_0) f(r, G_0)}{r}} dr^2 - \frac{r^2}{[f(r, G_0)]^2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (5.14)$$

com $F = \frac{r}{f(r, G_0)}$, sendo que agora,

$$f(r, G_0) = 1 + \frac{2G_0 M}{c^2 r} \left(g(r) + \frac{1}{2} \right). \quad (5.15)$$

Por sua vez, vamos definir

$$\varepsilon(r) = \beta_0 \frac{f(r, G_0)}{r}, \quad (5.16)$$

onde β_0 é uma constante. No caso particular em que $\alpha_0(G_0) = -\frac{2G_0 M}{c^2}$, $\beta_0 = \frac{2M}{(2\omega + 3)c^2}$ e $f(r, G_0) = 1$, recuperamos a partir de (5.14) a solução com simetria esférica nas coordenadas de Brans-Dicke (BRANS; DICKE, 1961).

5.6 FORÇA GRAVITACIONAL SOBRE UMA PARTÍCULA NO CASO DE BRANS-DICKE

Para obtermos a força gravitacional sobre uma partícula de massa m , movendo-se com uma velocidade pequena em comparação com a da luz, e sujeita à ação de um campo gravitacional fraco, vamos partir da equação da geodésica (4.23) que, de modo análogo ao da Relatividade Geral, leva a

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{c^2}{2} (g^{11})^{BD} g_{00,1}^{BD}. \quad (5.17)$$

Logo, a força gravitacional sobre a partícula de massa m é:

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{d^2 r}{dt^2} = m \frac{c^2}{2} (g^{11})^{BD} g_{00,1}^{BD}. \quad (5.18)$$

Sabemos, conforme (5.11), que

$$(g^{11})^{BD} = \frac{1}{g_{11}^{BD}(r)} = \frac{1}{[1 - G_0 \epsilon(r)] g_{11}(r, G_0)} = [1 + G_0 \epsilon(r)] g^{11}(r, G_0), \quad (5.19)$$

e

$$g_{00}^{BD}(r) = [1 - G_0 \epsilon(r)] g_{00}(r, G_0). \quad (5.20)$$

Agora, substituindo-se (5.19) e (5.20) em (5.18), mantendo-se apenas os termos de primeira ordem em ϵ e $h_{\mu\nu}$, tem-se

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} [(1 + G_0 \epsilon(r)) g^{11}(r, G_0)] [(1 - G_0 \epsilon(r)) g_{00}(r, G_0)]_{,1}$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} [(1 + G_0 \epsilon(r)) g^{11}(r, G_0)] [-G_0 \epsilon'(r) g_{00}(r, G_0) + (1 - G_0 \epsilon(r)) g'_{00}(r, G_0)]$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} g^{11}(r, G_0) [-G_0 \varepsilon'(r) g_{00}(r, G_0) + g'_{00}(r, G_0)]$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} g^{11}(r, G_0) [-G_0 \varepsilon'(r) (1 + h_{00}(r, G_0)) + g'_{00}(r, G_0)]$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} g^{11}(r, G_0) [-G_0 \varepsilon'(r) + g'_{00}(r, G_0)]$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} g^{11}(r, G_0) [g_{00}(r, G_0) - G_0 \varepsilon(r)]'. \quad (5.21)$$

Nesse ponto, vamos notar a partir de (5.14) que

$$g_{00}(r, G_0) = 1 + \frac{\alpha_0(G_0) f(r, G_0)}{r}. \quad (5.22)$$

Então, usando-se (5.22) e (5.16) em (5.21), obtemos

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} g^{11}(r, G_0) \left[1 + (\alpha_0(G_0) - G_0 \beta_0) \frac{f(r, G_0)}{r} \right]'$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} (\alpha_0(G_0) - G_0 \beta_0) g^{11}(r, G_0) \left[\frac{f(r, G_0)}{r} \right]'. \quad (5.23)$$

Mas, de acordo com (5.14), ainda tem-se que

$$g^{11}(r, G_0) = - \frac{\left(1 + \frac{\alpha_0(G_0) f(r, G_0)}{r} \right)}{F'^2}, \quad (5.24)$$

e portanto,

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} (\alpha_0(G_0) - G_0 \beta_0) \left[- \frac{\left(1 + \frac{\alpha_0(G_0) f(r, G_0)}{r} \right)}{F'^2} \right] \left[\frac{f(r, G_0)}{r} \right]'$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} (\alpha_0(G_0) - G_0 \beta_0) \left[-\frac{\left(1 + \frac{\alpha_0(G_0)f(r, G_0)}{r}\right)}{F'^2} \right] \left[\frac{1}{F} \right]',$$

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2} (\alpha_0(G_0) - G_0 \beta_0) \left[\frac{\left(1 + \frac{\alpha_0(G_0)f(r, G_0)}{r}\right)}{F'F^2} \right]. \quad (5.25)$$

Utilizando-se (4.29), segue-se que

$$F_{Grav}^{BD} = m \frac{c^2}{2r^2} (\alpha_0(G_0) - G_0 \beta_0) \left(\frac{f^4(r, G_0) + \frac{\alpha_0(G_0)f^5(r, G_0)}{r}}{f(r, G_0) - rf'(r, G_0)} \right). \quad (5.26)$$

Com as escolhas $\alpha_0(G_0) = -\frac{2G_0M}{c^2}$, $\beta_0 = \frac{2M}{(2\omega+3)c^2}$ e ainda sabendo que $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right)G$, a equação (5.26) fica

$$F_{Grav}^{BD} = -\frac{GMm}{r^2} \left(\frac{f^4(r, G_0) - \frac{2G_0M}{c^2r} f^5(r, G_0)}{f(r, G_0) - rf'(r, G_0)} \right). \quad (5.27)$$

Observa-se que, se fizermos $f(r, G_0) = 1$, obtemos o limite Newtoniano, uma vez que $F_{Grav}^{BD} = -\frac{GMm}{r^2}$. Prosseguindo, pode-se definir

$$\frac{2G_0M}{c^2r} g(r) = \beta(r, G_0) e^{-\frac{r}{\lambda}}, \quad (5.28)$$

onde λ é uma constante, obtendo-se de (5.15) que

$$f(r, G_0) = 1 + \beta(r, G_0) e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{G_0M}{c^2r}. \quad (5.29)$$

Finalmente, substituindo-se (5.29) em (5.27) e realizando-se um cálculo inteiramente similar ao que foi feito na seção 4.5, encontraremos que a força gravitacional sobre uma partícula de massa m , exercida por uma outra partícula de massa M , é

$$F_{Grav}^{BD} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + (3\beta(r, G_0) + r\beta'(r, G_0) - \frac{r}{\lambda}\beta(r, G_0))e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]. \quad (5.30)$$

É interessante notar, que no limite $\omega \rightarrow \infty$ tem-se $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) G \rightarrow G$, significando que (5.30) se reduz para a força gravitacional (4.36) da Relatividade Geral.

5.7 MODIFICAÇÃO DA GRAVITAÇÃO NEWTONIANA NO CONTEXTO DA TEORIA DE BRANS-DICKE

A comparação de (5.30) com (4.38) permite obter

$$\alpha - r\alpha' + \frac{r}{\lambda}\alpha = 3\beta(r, G_0) + r\beta'(r, G_0) - \frac{r}{\lambda}\beta(r, G_0). \quad (5.31)$$

Esta equação é formalmente idêntica a (4.39) e, de uma forma mais exata, deve-se ter

$$\alpha(r, G_0) - r\alpha'(r, G_0) + \frac{r}{\lambda}\alpha(r, G_0) = 3\beta(r, G_0) + r\beta'(r, G_0) - \frac{r}{\lambda}\beta(r, G_0). \quad (5.32)$$

Então, a função $\beta(r, G_0)$ poderia ser determinada e, através de (5.29), também o elemento de linha (5.14).

Portanto, mostra-se que, no contexto da teoria de Brans-Dicke, também é possível a obtenção de uma força gravitacional em uma escala de comprimento pequena, a qual possui termos adicionais em relação à gravitação de Newton. No caso examinado, a força é compatível com uma energia potencial com um termo não-Newtoniano do tipo de Yukawa como em (4.37).

Deve-se perceber que efeitos não-Newtonianos mais gerais podem ser obtidos por meio do formalismo desenvolvido, bastando para isso que escolhas diferentes da que foi feita em (5.29) sejam feitas para $f(r, G_0)$ em (5.27).

6 CONCLUSÃO

Obtivemos a solução geral estática e com simetria esférica das equações de Einstein, em acordo com o resultado de Duan e Tian (2008). Examinamos, nessa solução, o caso de campo fraco, escrevendo a função $f(r)$ como:

$$f(r) = 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \left(g(r) + \frac{1}{2} \right), \quad (6.1)$$

onde $g(r)$ é tal que as condições admitidas sobre $f(r)$ são satisfeitas.

Considerando-se a métrica geral de campo fraco com simetria esférica que foi obtida, determinamos a equação de movimento para uma partícula de massa m movendo-se com baixa velocidade em comparação com a velocidade da luz.

Com a escolha,

$$\frac{2GM}{c^2 r} g(r) = \beta(r) e^{-\frac{r}{\lambda}}, \quad (6.2)$$

mostramos que é possível, no contexto da teoria da Relatividade Geral, obter-se uma força gravitacional em uma escala de comprimento pequena incorporando efeitos não-Newtonianos, os quais seriam causados por um potencial gravitacional com um termo adicional do tipo de Yukawa. De fato, esse resultado foi obtido por Duan e Tian (2008), porém utilizamos um procedimento diferente para derivá-lo, através das escolhas (6.1) e (6.2).

Na sequência, encontramos a solução geral estática e com simetria esférica para a teoria de Brans-Dicke. Para obtê-la, utilizamos um resultado (BARROS; ROMERO, 1998) que permite calcular a métrica de Brans-Dicke a partir da métrica conhecida da Relatividade Geral, quando o campo gravitacional é fraco.

Na solução de Brans-Dicke obtida, fizemos

$$f(r, G_0) = 1 + \beta(r, G_0)e^{-\frac{r}{\lambda}} + \frac{G_0 M}{c^2 r}, \quad (6.3)$$

calculando em seguida a expressão da força entre duas partículas de massas m e M :

$$F_{Grav}^{BD} = -\frac{GMm}{r^2} \left[1 + (3\beta(r, G_0) + r\beta'(r, G_0) - \frac{r}{\lambda}\beta(r, G_0))e^{-\frac{r}{\lambda}} \right]. \quad (6.4)$$

Observamos que, no limite $\omega \rightarrow \infty$, tem-se $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right)G \rightarrow G$, e recupera-se a expressão da força gravitacional da Relatividade Geral.

Demonstramos que, no contexto da teoria de Brans-Dicke, também é possível a obtenção de uma força gravitacional em uma escala de comprimento pequena possuindo termos adicionais em relação à gravitação Newtoniana. No caso examinado, a força é compatível com uma energia potencial com um termo não-Newtoniano do tipo de Yukawa.

Efeitos não-Newtonianos mais gerais podem ser obtidos por meio do formalismo desenvolvido, bastando para isso que escolhas diferentes da que foi feita em (6.3) sejam feitas para $f(r, G_0)$.

Como perspectivas futuras, elencamos as seguintes: (i) ampliar o estudo realizado aqui para as teorias escalares-tensoriais gerais, nas quais $\omega(\phi)$, (ii) investigar desvios da força gravitacional Newtoniana que não sejam devidos ao potencial do tipo de Yukawa.

REFERÊNCIAS

- ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. **Introduction to General Relativity**. Nova York: McGraw-Hill, 1975.
- ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G. Phenomenology, Astrophysics and Cosmology of Theories with Submillimeter Dimensions and Tev Scale Quantum Gravity. **Phys.Rev. D**, v. 59, p. 086004-1 a 086004-21, 1999.
- ARKANI-HAMED, N.; DIMOPOULOS, S.; DVALI, G.; KALOPER, N. Infinitely Large New Dimensions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 84, p. 586 a 589, 2000.
- BARROS, A.; ROMERO, C. On the Weak Field Approximation of Brans-Dicke Theory of Gravity. **Phys. Lett. A**, v. 245, p. 31 a 34, 1998.
- BERGMANN, P. G. Comments on the Scalar Tensor Theory. **Int. J. Theor. Phys.** v. 1, p. 25 a 36, 1968.
- BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P. A Test of General Relativity Using Radio Links with the Cassini Spacecraft. **Nature**, v. 425, p. 374 a 376, 2003.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. **Phys. Rev.**, v. 124, p. 925 a 935, 1961.
- CASIMIR, H. B. G. On the Attraction between Two Perfectly Conducting Plates. **Proc. K. Ned. Akad. Wet.**, v. 51, p. 793 a 795, 1948.
- CHANDRASEKHAR, S. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. **Astrophysical Journal**, v. 74, p. 81 a 82, 1931.
- DAMOUR, T.; POLYAKOV, A. The String Dilaton and a Least Coupling Principle. **Nucl. Phys. B**, v. 423, 532 a 558, 1994.
- DAMOUR, T. Experimental Tests of Relativistic Gravity. **Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B**, v. 80, p. 41 a 50, 2000.
- DECCA, R. S.; FISCHBACH, E.; KLIMCHITSKAYA, G. L.; KRAUSE, D. E.; LÓPEZ, D.; MOSTEPANENKO, V. M. Application of the Proximity Force Approximation to Gravitational and Yukawa-Type Forces. **Phys. Rev. D**, v. 79, p. 124021-1 a 124021-6, 2009.
- DIMOPOULOS, S.; GERACI, A. A. Probing Submicron Forces by Interferometry of Bose-Einstein Condensed Atoms. **Phys. Rev. D**, v. 68, p. 124021-1 a 124021-13, 2003.
- DIMOPOULOS, S.; GIUDICE, G. Macroscopic Forces from Supersymmetry. **Phys. Lett. B**, v. 379, p. 105 a 144, 1996.
- DUAN, Y.; TIAN, M. General Spherical Symmetry Solution to Einstein Equations and Newtonian Gravity Modification at Small Length Scale. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 23, p. 2649 a 2652, 2008.

EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation (The Field Equations of Gravitation). **Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften**, p. 844–847, 1915.

FARAONI, V. The $\omega \rightarrow \infty$ Limit of Brans-Dicke Theory. **Phys. Lett. A**, v. 245, p. 26 a 30, 1998.

FARAONI, V. Scalar Field Mass in Generalized Gravity. **Class. Quantum Grav.**, v. 26, p. 145014-1 a 145014-11, 2009.

FOCK, V. **The Theory of Space Time and Gravitation**. New York: Pergamon, 1959.

HARTLE, J. B. Bounds on the Mass and Moment of Inertia of Non-Rotating Neutron Stars, **Phys. Rep.**, v. 46, p. 201 a 247, 1978.

HARTLE, J. B. **Gravity**. São Francisco: Addison Wesley, 2003.

HITZER, E.; DEHNEN, H. Integration of Einstein's Equations in the Weak Field Domain using the 'Einstein' Gauge. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 36, p. 559 a 567, 1997.

HOYLE, C. D.; SCHMIDT, U.; HECKEL, B. R. Submillimeter Tests of the Gravitational Inverse Square Law: A Search for 'Large' Extra Dimensions. **Phys. Rev. Lett.**, v. 86, p. 1418 a 1421, 2001.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. Oxford: editora Butterworth-Heinemann, 1996.

LEITÃO, A. F. **Índice de Refração na Teoria Gravitacional de Brans-Dicke: Um Estudo para Métricas Estáticas e Fontes com Pressões Não Nulas**. Boa Vista, 2009. 86f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Roraima. Disponível no site: www.bc.ufrr.br. Acesso em 05 Jan. 2010.

LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A; MINKOWSKI, H. **O Princípio da Relatividade**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

MASUDA, M.; SASAKI, M. Limits on Nonstandard Forces in the Submicrometer Range. **Phys. Rev. Lett.**, v. 102, p. 171101-1 a 171101-4, 2009.

NARLIKAR, J. V. **Introduction to Cosmology**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

NORDTVEDT, K. Post-Newtonian Metric for a General Class of Scalar-Tensor Gravitational Theories and Observational Consequences. **Astrophys. J.**, v. 161, p. 1059 a 1067, 1970.

OHANIAN, H. C.; RUFFINI, R. **Gravitation and Spacetime**. Nova York: Norton, 1994.

PAPAPETROU, A. **Lectures on General Relativity**. Dordrecht: Reidel, 1974.

ROMERO, C.; BARROS, A. Does the Brans-Dicke Theory of Gravity go over to General Relativity when $\omega \rightarrow \infty$? **Phys. Lett. A**, v. 173, p. 243 a 246, 1993.

RYDER, L. **Introduction to General Relativity**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

SHAPIRO, S. S.; DAVIS, J. L., LEBACH, D. E.; GREGORY, J. S. Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979–1999. **Phys. Rev. Lett.**, v. 92, p. 121101-1 a 121101-4, 2004.

SHIFMAN, M. Large Extra Dimensions: Becoming Acquainted with an Alternative Paradigm. **Int. J. Mod. Phys. A**, v. 25, p. 199 a 225, 2010.

WAGONER, R. V. Scalar tensor theory and gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 1, 3209 a 3216, 1970.

WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. Nova York: Wiley, 1972.

WEINBERG, S. **Cosmology**. Nova York: Oxford University Press, 2008.

WILL, C. The Confrontation between General Relativity and Experiment. **Living Rev. Relativity**, v. 9, artigo 3, p. 1 a 100, 2006. Disponível no site: www.livingreviews.org/lrr-2006-3. Acesso em: 12 ago. 2009.

APENDICES

APÊNDICE A - Tensor de Ricci para a Métrica de Schwarzschild

Vamos calcular as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{00}^{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}$$

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{00}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^0 - \Gamma_{01}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^1 - \Gamma_{02}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^2 - \Gamma_{03}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^3$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \left(e^{(\nu-\lambda)} v' \right)' + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \left(v'' e^{(\nu-\lambda)} + e^{(\nu-\lambda)} v' (v' - \lambda') \right) + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)} [v'' + v' (v' - \lambda')] + \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)} v' \left[\frac{1}{2} \lambda' + \frac{2}{r} - \frac{v'}{2} \right]$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)} \left[v'' + v'^2 - v' \lambda' + \frac{v' \lambda'}{2} + \frac{2v'}{r} - \frac{v'^2}{2} \right]$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(\nu-\lambda)} \left[v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{v' \lambda'}{2} + \frac{2v'}{r} \right]$$

$$R_{00} = e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') \right]. \quad (1)$$

E também,

$$R_{11} = \Gamma_{11,\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha,1}^\alpha + \Gamma_{11}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 1}^\alpha$$

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha - \Gamma_{10}^\beta \Gamma_{\beta 1}^0 - \Gamma_{11}^\beta \Gamma_{\beta 1}^1 - \Gamma_{12}^\beta \Gamma_{\beta 1}^2 - \Gamma_{13}^\beta \Gamma_{\beta 1}^3$$

$$R_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + (\Gamma_{11}^1)^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - (\Gamma_{11}^1)^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} + \frac{2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\lambda' v'}{2} + \frac{1}{2} \frac{2\lambda'}{r} - \frac{v'^2}{4} - \frac{2}{r^2}$$

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v'). \quad (2)$$

A componente R_{22} é dada por

$$R_{22} = \Gamma_{22,\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha,2}^\alpha + \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\alpha$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha - \Gamma_{20}^\beta \Gamma_{\beta 2}^0 - \Gamma_{21}^\beta \Gamma_{\beta 2}^1 - \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta 2}^2 - \Gamma_{23}^\beta \Gamma_{\beta 2}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} + re^{-\lambda}\lambda' - (\cotg\theta)_{,2} - re^{-\lambda}\frac{v'}{2} - re^{-\lambda}\frac{\lambda'}{2} - \cotg^2\theta$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} + \frac{re^{-\lambda}\lambda'}{2} - \frac{re^{-\lambda}v'}{2} + \cossec^2\theta - \cotg^2\theta$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} + \frac{re^{-\lambda}}{2}(\lambda' - v') + 1$$

$$R_{22} = -e^{-\lambda} \left[1 - e^{\lambda} + \frac{r}{2}(v' - \lambda') \right]. \quad (3)$$

A componente R_{33} , por sua vez, é

$$R_{33} = \Gamma_{33,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{3\alpha,3}^{\alpha} + \Gamma_{33}^{\beta}\Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{3\alpha}^{\beta}\Gamma_{\beta 3}^{\alpha}$$

$$R_{33} = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1\Gamma_{1\alpha}^{\alpha} + \Gamma_{33}^2\Gamma_{2\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{30}^{\beta}\Gamma_{\beta 3}^0 - \Gamma_{31}^{\beta}\Gamma_{\beta 3}^1 - \Gamma_{32}^{\beta}\Gamma_{\beta 3}^2 - \Gamma_{33}^{\beta}\Gamma_{\beta 3}^3$$

$$R_{33} = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^1\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^1\Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2\Gamma_{23}^3 - \Gamma_{31}^3\Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3\Gamma_{33}^2 - \Gamma_{33}^1\Gamma_{13}^3 - \Gamma_{33}^2\Gamma_{23}^3$$

$$R_{33} = -e^{-\lambda}\text{sen}^2\theta + re^{-\lambda}\lambda'\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta - re^{-\lambda}\frac{v'}{2}\text{sen}^2\theta - re^{-\lambda}\frac{\lambda'}{2}\text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta \cos\theta \cotg\theta$$

$$R_{33} = -e^{-\lambda}\text{sen}^2\theta + re^{-\lambda}\lambda'\text{sen}^2\theta - \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta - \frac{re^{-\lambda}\text{sen}^2\theta}{2}(v' + \lambda') + \cos^2\theta$$

$$R_{33} = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left[1 - r\lambda' + \frac{rv'}{2} + \frac{r\lambda'}{2} - e^\lambda \right]$$

$$R_{33} = -e^{-\lambda} \sin^2 \theta \left[1 - e^\lambda + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right]$$

$$R_{33} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (4)$$

Esse resultado demonstra que a componente R_{33} não é independente. As demais componentes, R_{01} , R_{02} , R_{03} , R_{12} , R_{13} e R_{23} , são nulas.

APÊNDICE B - Tensor de Ricci para $g_{\mu\nu}(r,t)$

O cálculo das componentes de $R_{\mu\nu}$ nos dá:

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') \right] + \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{00,0}^0 - \Gamma_{01,0}^1 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{00}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{10}^\alpha \\
 R_{00} &= e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') \right] - \Gamma_{01,0}^1 + (\Gamma_{00}^0)^2 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - (\Gamma_{01}^1)^2 \\
 R_{00} &= e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') \right] - \Gamma_{01,0}^1 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^1 - (\Gamma_{01}^1)^2 \\
 R_{00} &= e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{r} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') \right] - \frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{v}\dot{\lambda}}{4} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

$$R_{11} = \left[-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') \right] + \Gamma_{11,0}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^0 \Gamma_{01}^\alpha - \Gamma_{1\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha$$

$$R_{11} = \left[-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') \right] + \Gamma_{11,0}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{11}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{11}^0$$

$$R_{11} = \left[-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') \right] + \frac{1}{2} \ddot{\lambda} e^{(\lambda-v)} + \frac{1}{2} \dot{\lambda} e^{(\lambda-v)} \left(\dot{\lambda} - \dot{v} \right) + \frac{1}{4} \dot{\lambda} \dot{v} e^{(\lambda-v)} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4} e^{(\lambda-v)}$$

$$R_{11} = \left[-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') \right] + \frac{1}{2} e^{(\lambda-v)} \left(\ddot{\lambda} + \dot{\lambda}^2 - \dot{\lambda} \dot{v} + \frac{\dot{\lambda} \dot{v}}{2} - \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right)$$

$$R_{11} = \left[-\frac{v''}{2} + \frac{\lambda'}{r} + \frac{v'}{4} (\lambda' - v') \right] + e^{(\lambda-v)} \left(\frac{\ddot{\lambda}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{4} - \frac{\dot{\lambda} \dot{v}}{4} \right). \quad (6)$$

R_{22} e R_{33} não se alteram em relação à expressão formal obtida no apêndice anterior, permanecendo:

$$R_{22} = -e^{-\lambda} \left[1 - e^{\lambda} + \frac{r}{2} (v' - \lambda') \right], \quad (7)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}. \quad (8)$$

As componentes R_{02} , R_{03} , R_{12} , R_{13} e R_{23} continuam sendo nulas. Mas, vejamos como fica R_{01} :

$$R_{01} = \Gamma_{01,0}^0 + \Gamma_{01,1}^1 - \Gamma_{00,1}^0 - \Gamma_{01,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{0\alpha}^\alpha + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^0 \Gamma_{01}^\alpha - \Gamma_{0\alpha}^1 \Gamma_{11}^\alpha$$

$$\begin{aligned} R_{01} = & \Gamma_{01,0}^0 + \Gamma_{01,1}^1 - \Gamma_{00,1}^0 - \Gamma_{01,1}^1 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^1 + 2\Gamma_{01}^1 \Gamma_{12}^2 \\ & - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{01}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^0 - \Gamma_{01}^1 \Gamma_{11}^1 \end{aligned}$$

$$R_{01} = \Gamma_{01,0}^0 - \Gamma_{00,1}^0 + 2\Gamma_{01}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^0 + \Gamma_{01}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{01} = \frac{\left(\dot{v}\right)'}{2} - \frac{\left(\dot{v}\right)'}{2} + \frac{\dot{\lambda}}{r} - \frac{1}{2}e^{(v-\lambda)}v'\cdot\frac{1}{2}\dot{\lambda}e^{(\lambda-v)} + \frac{\dot{\lambda}v'}{4}$$

$$R_{01} = \frac{\dot{\lambda}}{r}. \tag{9}$$

APÊNDICE C - Tensor de Ricci para a Métrica Geral

Calculando a componente R_{00} , temos

$$R_{00} = \Gamma_{00,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha,0}^{\alpha} + \Gamma_{00}^{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0\alpha}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^{\alpha}$$

$$R_{00} = \Gamma_{00,1}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{00}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^0 - \Gamma_{01}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^1 - \Gamma_{02}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^2 - \Gamma_{03}^{\beta} \Gamma_{\beta 0}^3$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \left(e^{(v-\lambda)} v' \right)' + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{01}^0 \Gamma_{00}^1$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} \left(v'' e^{(v-\lambda)} + e^{v-\lambda} v' (v' - \lambda') \right) + \Gamma_{00}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{01}^0)$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(v-\lambda)} [v'' + v' (v' - \lambda')] + \frac{1}{2} e^{(v-\lambda)} v' \left[\frac{1}{2} \lambda' + \frac{F'}{F} + \frac{F'}{F} - \frac{v'}{2} \right]$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(v-\lambda)} \left[v'' + v'^2 - v' \lambda' + \frac{v' \lambda'}{2} + \frac{2F' v'}{F} - \frac{v'^2}{2} \right]$$

$$R_{00} = \frac{1}{2} e^{(v-\lambda)} \left[v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{v' \lambda'}{2} + \frac{2F' v'}{F} \right]$$

$$R_{00} = e^{(v-\lambda)} \left[\frac{v''}{2} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') + \frac{F' v'}{F} \right]. \quad (10)$$

Por sua vez, a componente R_{11} é

$$R_{11} = \Gamma_{11,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{1\alpha,1}^{\alpha} + \Gamma_{11}^{\beta} \Gamma_{\beta\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{1\alpha}^{\beta} \Gamma_{\beta 1}^{\alpha}$$

$$R_{11} = \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha - \Gamma_{10}^\beta \Gamma_{\beta 1}^0 - \Gamma_{11}^\beta \Gamma_{\beta 1}^1 - \Gamma_{12}^\beta \Gamma_{\beta 1}^2 - \Gamma_{13}^\beta \Gamma_{\beta 1}^3$$

$$R_{11} = -\Gamma_{10,1}^0 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + (\Gamma_{11}^1)^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 - (\Gamma_{11}^1)^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3$$

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} - 2 \left(\frac{F'}{F} \right)' + \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{F' \lambda'}{F} - \frac{v'^2}{4} - 2 \left(\frac{F'}{F} \right)^2$$

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} - 2 \left(\frac{F''}{F} - \frac{F'^2}{F^2} \right) + \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{F' \lambda'}{F} - \frac{v'^2}{4} - 2 \frac{F'^2}{F^2}$$

$$R_{11} = -\frac{v''}{2} - \frac{2F''}{F} + \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{F' \lambda'}{F} - \frac{v'^2}{4}. \quad (11)$$

Também, encontra-se a componente R_{22} :

$$R_{22} = \Gamma_{22,\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha,2}^\alpha + \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha - \Gamma_{2\alpha}^\beta \Gamma_{\beta 2}^\alpha$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{1\alpha}^\alpha - \Gamma_{20}^\beta \Gamma_{\beta 2}^0 - \Gamma_{21}^\beta \Gamma_{\beta 2}^1 - \Gamma_{22}^\beta \Gamma_{\beta 2}^2 - \Gamma_{23}^\beta \Gamma_{\beta 2}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 - \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3$$

$$R_{22} = \left(-FF'e^{-\lambda} \right)' - (\cotg \theta)_{,2} - FF'e^{-\lambda} \cdot \frac{v'}{2} - FF'e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda'}{2} - \cotg^2 \theta$$

$$R_{22} = - (FF')' e^{-\lambda} - FF' (e^{-\lambda})' + \cos^2 \theta - FF' e^{-\lambda} \cdot \frac{v'}{2} - FF' e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda'}{2} - \cot^2 \theta$$

$$R_{22} = -F'^2 \cdot e^{-\lambda} - FF'' \cdot e^{-\lambda} + FF' \lambda' e^{-\lambda} - FF' e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda'}{2} - FF' e^{-\lambda} \cdot \frac{v'}{2} + 1$$

$$R_{22} = -F'^2 \cdot e^{-\lambda} - FF'' \cdot e^{-\lambda} + FF' e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda'}{2} - FF' e^{-\lambda} \cdot \frac{v'}{2} + 1. \quad (12)$$

A componente R_{33} pode ser escrita em termos de R_{22} , ou seja, não é uma componente independente. As componentes R_{01} , R_{02} , R_{03} , R_{12} , R_{13} e R_{23} são nulas.

APÊNDICE D - Sistema de Equações

Consideremos as equações de campo

$$\frac{v''}{2} + \frac{v'}{4} (v' - \lambda') + \frac{F'v'}{F} = 0, \quad (13)$$

$$-\frac{v''}{2} - \frac{2F''}{F} + \frac{\lambda'v'}{4} + \frac{F'\lambda'}{F} - \frac{v'^2}{4} = 0, \quad (14)$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{F''}{F} + \frac{F'^2}{F^2} + \frac{F'}{2F} (v' - \lambda') \right] - \frac{1}{F^2} = 0. \quad (15)$$

Somando-se (13) e (14), tem-se

$$\frac{F'v'}{F} - \frac{2F''}{F} + \frac{F'\lambda'}{F} = 0$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{F'v'}{2F} - \frac{F''}{F} + \frac{F'\lambda'}{2F} \right] = 0. \quad (16)$$

Agora, Fazendo-se (15)–(16), vem que

$$e^{-\lambda} \left[\frac{F''}{F} + \frac{F'^2}{F^2} + \frac{F'v'}{2F} - \frac{F'\lambda'}{2F} - \frac{F'v'}{2F} + \frac{F''}{F} - \frac{F'\lambda'}{2F} \right] - \frac{1}{F^2} = 0$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{2F''}{F} + \frac{F'^2}{F^2} - \frac{F'\lambda'}{F} \right] - \frac{1}{F^2} = 0. \quad (17)$$

Prosseguindo, vamos calcular (15)+(16):

$$e^{-\lambda} \left[\frac{F''}{F} + \frac{F'^2}{F^2} + \frac{F'v'}{2F} - \frac{F'\lambda'}{2F} + \frac{F'v'}{2F} - \frac{F''}{F} + \frac{F'\lambda'}{2F} \right] - \frac{1}{F^2} = 0$$

$$e^{-\lambda} \left[\frac{F'^2}{F^2} + \frac{F'v'}{F} \right] - \frac{1}{F^2} = 0. \quad (18)$$

Finalmente, façamos (13)–(14), obtendo

$$v'' + \frac{v'^2}{4} - \frac{\lambda' v'}{4} + \frac{F' v'}{F} + \frac{2F''}{F} - \frac{\lambda' v'}{4} - \frac{F' \lambda'}{F} + \frac{v'^2}{4} = 0$$

$$v'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{2F''}{F} - \frac{\lambda' v'}{2} - \frac{F'}{F} (\lambda' - v') = 0. \quad (19)$$

As equações (17), (18) e (19) formam o sistema desejado.

APÊNDICE E - Verificação de Equação

Consideremos a equação

$$v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{\lambda' v'}{2} + \frac{2F''}{F} - \frac{F'}{F} (\lambda' - v') = 0. \quad (20)$$

Sabendo que $F'' = F' \frac{(\lambda+v)'}{2}$, obtemos imediatamente que

$$\lambda' = 2 \frac{F''}{F'} - v'. \quad (21)$$

Substituindo (21) em (20), temos

$$v'' + \frac{v'^2}{2} - \frac{v'}{2} \left(\frac{2F''}{F'} - v' \right) + \frac{2F''}{F} - \frac{F'}{F} \left(\frac{2F''}{F'} - v' \right) + \frac{F'}{F} v' = 0$$

$$v'' + v'^2 - v' \frac{F''}{F'} + \frac{2F''}{F} - \frac{2F''}{F} + \frac{F'}{F} v' + \frac{F'}{F} v' = 0$$

$$v'' + v'^2 - v' \frac{F''}{F'} + \frac{2F'}{F} v' = 0$$

$$v'' + v' \left(v' - \frac{F''}{F'} + \frac{2F'}{F} \right) = 0. \quad (22)$$

Por outro lado, sabemos que $v = \ln \left(1 + \frac{\alpha_0}{F} \right)$. Então,

$$v' = - \frac{\alpha_0 F'}{(F + \alpha_0) F} \quad (23)$$

e

$$v'' = - \frac{\alpha_0 F''}{(F + \alpha_0) F} + \frac{\alpha_0 F' [F' F + (F + \alpha_0) F']}{(F + \alpha_0)^2 F^2}$$

$$v'' = - \frac{\alpha_0 F''}{(F + \alpha_0) F} + \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F} + \frac{\alpha_0 F'^2 (F + \alpha_0)}{(F + \alpha_0)^2 F^2}$$

$$v'' = -\frac{\alpha_0 F''}{(F + \alpha_0)F} + \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F} + \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)F^2}. \quad (24)$$

Levando (23) e (24) em (22), obtém-se

$$-\frac{\alpha_0 F''}{(F + \alpha_0)F} + \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F} + \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)F^2} + \frac{\alpha_0^2 F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F^2} + \frac{\alpha_0 F''}{(F + \alpha_0)F} - \frac{2\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)F^2} = 0$$

$$\frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F} - \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)F^2} + \frac{\alpha_0^2 F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F^2} = 0$$

$$\frac{F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F} - \frac{F'^2}{(F + \alpha_0)F^2} + \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)^2 F^2} = 0$$

$$\frac{F'^2 F}{(F + \alpha_0)^2} - \frac{F'^2}{F + \alpha_0} + \frac{\alpha_0 F'^2}{(F + \alpha_0)^2} = 0$$

$$F'^2 F - F'^2 (F + \alpha_0) + \alpha_0 F'^2 = 0$$

$$F'^2 F - F'^2 F - F'^2 \alpha_0 + \alpha_0 F'^2 = 0$$

$$0 = 0,$$

o que mostra que as soluções para λ e v dadas em (21) e (23) satisfazem identicamente a equação (20).