



UFRR

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Rochelle Gomes de Souza

**Estudo de um fluido cosmológico com produção de partículas em N
dimensões**

Boa Vista, RR

2013

Rochelle Gomes de Souza

**Estudo de um fluido cosmológico com produção de partículas em N
dimensões**

Dissertação de mestrado apresentada como pré-requisito para obtenção do título de Mestre em Física pelo programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima.

Orientador: Dr. Miguel Gustavo de Campos Batista.

Boa Vista, RR

2013

ROCHELLE GOMES DE SOUZA

Estudo de um fluido cosmológico com produção de partículas em N dimensões

Dissertação de mestrado apresentada como pré-requisito para conclusão do Curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima. Defendida em 12 de junho de 2013 e avaliada pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Miguel Gustavo de Campos Batista
Orientador/Curso de Física-UFRR

Prof. Dr. Francisco Ernandes Matos Costa
Curso de Física- UFERSA

Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira
Curso de Física - UFRR

Dedico à minha família e ao meu orientador pelo apoio.

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer ao apoio dado pelo meu orientador e pela minha família.

RESUMO

Faremos um estudo considerando que partículas materiais são formadas as expensas do campo gravitacional de uma dimensão extra. Um dos processos que podem explicar o conteúdo entrópico do universo bem como o aumento da velocidade de expansão foi denominado por I. Prigogine de “Open system cosmology”. Neste modelo o número de partículas no universo não é conservado, gerando uma pressão negativa responsável pelo processo acelerado de expansão. Neste estudo vamos implementar uma dimensão adicional ao modelo cosmológico com produção de partículas, com objetivo de tornar mais claro o processo de produção de partículas às custas do campo gravitacional.

Palavras-chave: formação de partículas; dimensão extra; aceleração do universo.

ABSTRACT

We study a cosmological model where the number of particles do not conserve in a spacetime with extra dimensions. The open system cosmological model by I. Prigogine considered the particle formation at expenses of the gravitational field with intent to explain the entropic content of the universe, and presently, this model can be an alternative to explain the accelerated expansion of the universe. We generalize the open system cosmological model including an extra dimension and the creation process of particles is due to the compactification of the extra dimension, evolving for the usual quadri-dimensional spacetime.

Keywords: particle production; extra dimension; acceleration of the universe.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Esquema da evolução do fator de escala normalizado em modelos de Friedmann espacialmente abertos, fechados e planos.	21
Figura 2.2	Evolução dos parâmetros de densidade Ω_m e Ω_Λ para vários modelos cosmológicos que passam pelos pontos $\Omega_{m_0} = 0.3$ e $\Omega_{\Lambda_0} = 0.2, \dots, 1$	25
Figura 2.3	Evolução dos parâmetros de densidade Ω_m e Ω_Λ para vários modelos cosmológicos que passam pelos pontos $\Omega_{\Lambda_0} = 0.7$ e $\Omega_{m_0} = 0.1, \dots, 1.1$	26
Figura 4.1	Perfis de $R(t)$ e $Y(t)$ para um fluido de radiação.	38
Figura 4.2	Perfis de $R(t)$ e $Y(t)$ para matéria densa.	39
Figura 4.3	Parâmetro de desaceleração q_R . Usamos a expressão (4.42) e consideramos $\alpha = \sqrt{2}/2$	41
Figura 4.4	Fator de escala $R(t)$. Usamos a expressão (4.40) e $\alpha = \sqrt{2}/2$	42
Figura 4.5	Fator de escala da dimensão adicional $Y(t)$. Usamos a expressão (4.39) e $\alpha = \sqrt{2}/2$	42
Figura 4.6	Fonte de produção de Partículas $\Psi(t)$. Consideramos $\alpha = \sqrt{2}/2$	43
Figura 5.1	Esquema geral.	49

SUMÁRIO

1	Introdução.....	p. 1
2	MODELO COSMOLÓGICO DE FRIEDMANN.....	p. 5
2.1	A geometria de Friedmann-Robertson-Walker.....	p. 5
2.2	Coordenadas Síncronas.....	p. 6
2.3	A métrica de Friedmann-Robertson-Walker.....	p. 7
2.4	As equações de campo cosmológicas.....	p. 10
2.5	Equação do movimento para o fluido cosmológico.....	p. 12
2.6	Os componentes do fluido cosmológico.....	p. 13
2.7	Os parâmetros Cosmológicos.....	p. 16
2.8	Modelo de Friedmann-Robertson-Walker.....	p. 18
2.9	Modelo de Sitter.....	p. 21
2.10	A relação distância-desvio para o vermelho.....	p. 22
2.11	Evolução dos parâmetros de densidade.....	p. 23
2.12	Evolução da curvatura espacial.....	p. 26
3	TERMODINÂMICA E COSMOLOGIA.....	p. 28
4	PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS EM DIMENSÕES EXTRAS.....	p. 33
4.1	Modelo de Friedmann.....	p. 37
4.2	Modelo de Prigogine.....	p. 40
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	p. 44

Referências Bibliográficas	p.46
---	-------------

1 INTRODUÇÃO

Um tempo depois que Albert Einstein incluiu nas suas equações de campo a constante cosmológica (geralmente escrita como Λ) buscando um universo estático, A. Friedmann apresenta sua solução com expansão. Embora a relação encontrada por A. Friedmann encontra grande resistência de aceitação inclusive pelo próprio Albert Einstein, as observações de E. Hubble corroboram o universo expansionista de Friedmann.

A. Friedmann encontrou uma solução das equações de campo da relatividade geral que possuía um caráter dinâmico. Com as observações de E. Hubble, que indicavam o afastamento das galáxias uma das outras, e que a velocidade deste processo era dependente das distâncias destas galáxias, a tese de um Universo dinâmico ganhou força (HUBBLE, 1929). Entretanto, anteriormente, Lemaître já antecipava este resultado (LEMAITRE, 1929). Atualmente, encontra-se aberta a discussão de quem cabe a defesa original de um universo dinâmico (BERGH, 2011) (FABRIS, 2012).

Recentemente, no final do século passado, dois grupos independentes descobrem a expansão acelerada do universo e surgem os modelos com energia escura para explicar o aumento de velocidade de expansão do universo (PERLMUTTER, 1999)(RIESS, 1998). Uma das alternativas à inclusão da energia escura para justificar a expansão acelerada é considerar que o número de partículas no universo não se conserva, de tal modo que o tensor momento-energia é redefinido, aparecendo uma pressão negativa responsável pelo processo acelerado de expansão. Outros experimentos também indicam a expansão acelerada do universo, dos quais citamos: a radiação cósmica de fundo de micro-ondas (SPERGEL, 2007); formação de estrutura à grande escala (SELJAK, 2005); oscilações acústicas de bárions (EISENSTEIN, 2005); e lenteamento gravitacional (JAIN, 2003).

Por outro lado, é possível que o nosso universo possua mais de quatro dimensões, principalmente quando consideramos o estágio primordial da evolução do universo. A contribuição original neste sentido foi publicada por Kaluza (KALUZA, 1921) e Klein (KLEIN, 1926) procurando a unificação entre as interações eletromagnética e gravitacional.

A versão moderna desta idéia propõe um espaço-tempo quadridimensional ordinário e uma dimensão extra compacta. Ainda que o espaço-tempo tenha quatro dimensões, isso por si só não é suficiente para provar que a dimensão extra seja compacta, ou seja, a dinâmica de modelos cosmológicos com dimensões extras devem ser estudados. Assim, o cenário ideal seria a evolução do universo para um espaço-tempo quadridimensional com a concomitante diminuição da dimensão extra. O que pretendemos estudar é relacionar o processo de colapso de dimensão extra com a produção de partículas materiais, de tal modo que ambos findarão sem participação na dinâmica do processo. No modelo estudado por I. Prigogine e demais autores, a criação de matéria é contínua e eterna. De tal modo que o espaço-tempo é eternamente acelerado e produz além de partículas, entropia eternamente.

Caso o processo de produção de partículas seja adiabático em um universo com dimensões extras, uma grande quantidade de entropia será produzida. O termo adiabático em nosso estudo é entendido como sendo constante a produção de entropia por partícula. Naturalmente, o processo não pode ser eterno, de tal modo que a produção de entropia cessará com o domínio do espaço-tempo quadridimensional usual e colapso da dimensão adicional. Esta produção de entropia deve ser suficiente para solucionar o problema de planura do universo, bem como o problema do horizonte, proporcionando um modelo alternativo no paradigma inflacionário.

A teoria da relatividade geral passou, e continua passando por vários testes experimentais. De tal modo que, não seria de se estranhar a adoção de correções à teoria da relatividade geral. Neste ponto em particular já existem na literatura diversas sugestões que alteram a Teoria da Relatividade Geral. Podemos citar como muito popular nos dias de hoje a consideração de termos de ordem superior na seção relativística. Por outro lado, a inclusão de dimensões superiores tem sido levada em conta principalmente no que se trata do universo em seus primórdios. Originalmente, nos trabalhos de Kaluza e Klein, a inclusão de uma dimensão extra procura unificar as interações eletromagnética e gravitacional, pois no espaço quadridimensional usual o quociente entre estas forças é de diversas ordens de grandeza. Como exemplo podemos considerar um elétron e um próton cujas massas são respectivamente $m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{kg}$ e $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{kg}$, e separados por uma distância de $5,3 \times 10^{-11} \text{m}$. Podemos estimar o quociente entre a força elétrica e a força gravitacional, resultando $2,3 \times 10^{39}$. Para tal, usamos a constante gravitacional $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$, a constante de Coulomb, $k = 9,0 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$, e consideramos o módulo da carga do elétron como sendo igual à do próton, ou seja, $|e| = 1,6 \times 10^{-19} \text{C}$.

Naturalmente, quando pensamos em uma variedade, nossa noção intuitiva é de consi-

derá-la como contínua. Embora esta continuidade tenha sido estabelecida até por volta de 10^{-15} cm (HAWKING, 1999), levar esta propriedade para distâncias ainda menores é no mínimo inapropriado. Logo, uma variedade que modele o espaço-tempo para regiões tão pequenas deve estar ligada a uma teoria que estructure de um outro modo o espaço-tempo.

Levar em conta as distâncias por volta de 10^{-15} cm não devem eventualmente afetar a validade da teoria da relatividade geral, e isso deve acontecer quando estivermos lidando com densidades da ordem de 10^{58} g/cm³. Assim, chegando ao limite onde a teoria da relatividade perde sua validade, podemos dizer que possivelmente as equações de campo estão incompletas; ou ainda que é necessário realizar o processo de quantização do espaço-tempo, ou ainda, determinar uma nova estrutura para a variedade que representa o espaço-tempo.

Não é nosso objetivo tratar especificamente de processos de unificação, mas vamos de modo muito breve, escrever um pouco da evolução deste processo na física, digamos moderna. O desenvolvimento da física tem passado por diversos processos de unificação. Podemos citar a eletricidade e o magnetismo que eram tratados como fenômenos físicos independentes. Não vamos aqui relatar todo o processo de unificação entre a eletricidade e o magnetismo, mas podemos citar o final do processo, quando James Clark Maxwell construiu uma série de equações consistentes com a unificação da eletricidade e magnetismo.

Aproximadamente 100 anos após o processo de unificação de Maxwell, um outro processo de unificação foi revelado, tratando da unificação entre as forças eletromagnéticas e as forças responsáveis pelas chamadas interações fracas.

Em um âmbito diferente da unificação de forças até agora mencionadas podemos considerar a teoria especial da relatividade de Einstein, onde os conceitos de espaço e tempo são unificados, deixando de serem estruturalmente conceitos físicos diferentes.

Por outro lado, e igualmente revolucionárias, as bases do determinismo newtoniano são abaladas pelos fundamentos da teoria quântica desenvolvida por Max Planck, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg, Paul Dirac e outros.

Adicionalmente ao desenvolvimento do que presentemente chamamos de física moderna, podemos considerar como um número de quatro as forças fundamentais da natureza: temos então a força da gravidade que foi descrita de forma precisa por Isaac Newton e profundamente reformulada por Albert Einstein, temos a força eletromagnética que é descrita pelas equações de Maxwell, que são completamente compatíveis com a estrutura da teoria da relatividade especial. A responsabilidade pelo processo de decaimento beta é a conhecida força fraca, no qual um nêutron decai formando um próton, um elétron e um anti-neutrino. Por fim, temos

a força forte que é responsável pela interação entre os constituintes das partículas nucleares. Atualmente é comum acharmos a expressão força de cor para este tipo de interação.

Enquanto o eletromagnetismo clássico é útil para calcular a transmissão de energia em linhas de transmissão, este falha totalmente quando se trata de fenômenos microscópicos. Assim, a versão quântica do eletromagnetismo clássico, a eletrodinâmica quântica, é que deve ser usada quando estamos no âmbito de processos eletromagnéticos na escala microscópica. Na eletrodinâmica quântica o fóton aparece como o quantum do campo eletromagnético. Por outro lado, como a teoria das interações fracas é também uma teoria quantizada de partículas, temos então a teoria quântica eletrofraca que resulta do processo de unificação e quantização da força eletromagnética e da força fraca. Este processo de unificação foi feito no final dos anos 60 por S. Weinberg e A. Salam.

Por fim o processo de quantização envolvendo as forças fortes origina a cromodinâmica quântica. A teoria eletrofraca conjuntamente com a cromodinâmica quântica formam então a base para o modelo padrão da física de partículas. Embora o número de partículas previstas na teoria seja um tanto quanto grande, não deixa por esta razão de ser uma teoria elegante e extremamente poderosa. Uma mistura como esta, poder e elegância, não é porém suficiente para incluir a força gravitacional no processo de unificação.

Embora os efeitos gravitacionais em um mundo microscópico sejam negligenciáveis o processo de unificação envolvendo a gravitação é essencial para estudarmos a formação do universo e seus primeiros momentos. Por ora, uma das pistas considerada no processo de unificação leva em conta teorias com dimensões adicionais, onde a teoria das cordas é a mais popular.

Neste estudo vamos propor uma generalização do modelo com produção de partículas considerando um espaço-tempo com uma dimensão adicional. A dinâmica do processo propõe um mecanismo para o decaimento da dimensão adicional e a posterior evolução para um espaço-tempo quadridimensional usual.

Os capítulos seguintes são divididos na seguinte forma: No capítulo 2 descrevemos em linhas gerais o modelo cosmológico padrão; no capítulo 3 descrevemos brevemente no âmbito da termodinâmica relativística o processo quadridimensional de produção de partículas. Por fim, no capítulo 4 fazemos a generalização do processo de produção de partículas considerando o espaço-tempo com uma dimensão adicional.

2 MODELO COSMOLÓGICO DE FRIEDMANN

2.1 A GEOMETRIA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

As estrelas que estão mais perto de nosso planeta são agrupadas na galáxia denominada Via Láctea. A Via Láctea pertence a um grupo de galáxias conhecido por Grupo Local, cuja massa é constituída principalmente por nossa galáxia e pela de Andrômeda.

Em uma escala um pouco maior, vemos um centro super gigante de galáxias na Constelação de Virgo onde está localizado o nosso Grupo Local. Com relação a matéria percebemos que em pequena escala sua distribuição é irregular, mas quando observamos escalas maiores a uniformidade domina.

A temperatura da radiação cósmica de fundo em diferentes direções no céu indica que o universo é isotrópico em escalas cada vez maiores. Então, se o universo não tem preferência de centro, a isotropia implicará também a homogeneidade. Embora, o contrário pode não ser verdadeiro.

O princípio de isotropia e homogeneidade é por vezes conhecido como princípio de Copérnico. A validade deste princípio é unificada em diferentes tipos de observações. Por exemplo, podemos citar a contagem do número de galáxias, observação da radiação difusa de raios-X, e radiação de fundo de raios gama. Entretanto é nas medições da radiação cósmica de fundo que o princípio de Copérnico ganha mais força.

O conceito de isotropia aplica-se a um ponto pertencente a uma variedade, e estabelece que o espaço ao redor deste ponto pareça o mesmo independentemente da direção que se leve em conta. Por outro lado, a homogeneidade requer que a métrica seja a mesma em toda a variedade. A princípio, não existe uma relação entre homogeneidade e isotropia. Todavia, se um espaço é isotrópico em todos os pontos, conseqüentemente será homogêneo. Do mesmo modo, se o espaço for isotrópico ao redor de um ponto e ao mesmo tempo homogêneo, será isotrópico em qualquer ponto da variedade. Resumindo, deixando de lado um certo egocentrismo humano, nós e o nosso planeta não ocupamos o centro do universo.

Um espaço que seja homogêneo e isotrópico é consequentemente maximamente simétrico. A isotropia podemos pensar como um invariante por rotações; e a homogeneidade como um invariante por translações. Assim, consideramos conjuntamente a homogeneidade e a isotropia teremos o maior conjunto possível de vetores de Killing.

As observações indicam a validade do princípio de Copérnico, porém temos que ressaltar que assumir este princípio para o espaço-tempo não é verdadeiro. Temos sim é a homogeneidade e isotropia para espaço em grande escala.

Em nosso estudo vamos admitir que em um determinado momento o universo parece o mesmo em todas as posições do espaço, e em todas as direções do espaço. Este princípio é conhecido por *princípio cosmológico* e estabelece a igualdade entre pontos distintos no universo.

As duas consequências estruturais testáveis do princípio cosmológico são a homogeneidade e a isotropia.

O princípio cosmológico é consistente com a isotropia observada: (i) da distribuição celeste de rádio galáxias, que estão distribuídas aleatoriamente por todo o céu; (ii) da estrutura espacial em grande escala da distribuição de galáxias, que formam uma teia aleatória de clusters e vazios com cerca de 400 Mps de largura; (iii) a distribuição isotrópica do desvio para o vermelho observado no espectro de galáxias distantes, o que implica uma expansão uniforme do espaço ou uma constante de Hubble em (iv) e a radiação cósmica de fundo liberada pela expansão e resfriamento do Universo primordial, que é constante em todas as direções até uma parte em 100.000.

2.2 COORDENADAS SÍNCRONAS

As trajetórias de qualquer observador fundamental vão ser parametrizadas pela variável t , que por sua vez pode ser considerada como o *tempo próprio*. Para cada observador fundamental podemos associar um conjunto de coordenadas espaciais (x_1, x_2, x_3) que são constantes para cada trajetória, as quais denominaremos de *coordenadas comóveis*. Em outras palavras, para cada hipersuperfície $t = \text{constante}$ a trajetória do observador será ortogonal à hipersuperfície. Consequentemente podemos escrever o elemento de linha como:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

onde as componentes g_{ij} são funções das coordenadas (t, x_1, x_2, x_3) .

Vamos considerar a trajetória $x^\mu(\tau)$ de um observador fundamental, onde τ é o tempo

próprio. Assim:

$$x^0 = \tau, x^1 = x^2 = x^3 = \text{constante}. \quad (2.2)$$

Como $dx^i = 0$ temos que $ds = cd\tau$, além do que, naturalmente a quadri-velocidade do observador fundamental será dada por:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0). \quad (2.3)$$

Qualquer vetor que esteja na superfície $\tau = \text{constante}$ e tenha a forma $a^\mu = (0, a^1, a^2, a^3)$ pode ser escrito como:

$$g^{\mu\nu} u^\mu a^\nu = 0. \quad (2.4)$$

Consequentemente a quadri-velocidade em coordenadas comóveis é ortogonal à hipersuperfície definida por $t = \text{constante}$. Por fim, a trajetória definida por (2.2) satisfaz a equação da geodésica:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (2.5)$$

2.3 A MÉTRICA DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

A relação intuitiva do princípio cosmológico precisa se torna mais precisa. Em particular, como se define um determinado tempo na relatividade geral, que seja válido a nível universal.

Na relatividade geral, o conceito de *um momento de tempo* é ambíguo e é substituído pela noção de uma hipersuperfície tridimensional do tipo espaço. Para definir um parâmetro de *tempo* que seja válido a nível universal, *folheamos* o espaço-tempo introduzindo uma série de não-interseções de hipersuperfícies tipo espaço que são rotuladas por algum parâmetro t .

É útil, neste ponto, introduzirmos o conceito idealizado de *observadores fundamentais*, os quais não se movimentam com relação ao fluido cosmológico. Um observador fundamental seria, por exemplo, incapaz de medir um momento de dipolo em suas observações da radiação cósmica de micro-ondas; um observador com uma velocidade peculiar diferente de zero iria observar o momento de dipolo, como resultado do efeito Doppler decorrentes do seu movimento em relação ao fluido cosmológico. Adotando o *postulado de Weyl* as linhas de mundo tipo tempo desses observadores formam um feixe, ou congruência, no espaço-tempo que diverge de

um ponto no (finito ou infinitamente distante) passado ou converge para esse ponto no futuro. Estas linhas de mundo se que cruzam, exceto possivelmente em um ponto singular no passado ou futuro, ou ambos. Assim, existe uma única linha de mundo passando por cada ponto (não singular) do espaço-tempo.

As hipersuperfícies, $t = \text{constante}$, podem agora ser naturalmente construídas de tal forma que a quadri-velocidade de qualquer observador fundamental seja ortogonal à superfície. Assim, a superfície que detém a propriedade da simultaneidade do referencial local de Lorentz coincide localmente com hipersuperfície.

Portanto, cada hipersuperfície pode ser considerada como um elemento de uma rede formada de todos os referenciais locais de Lorentz de observadores fundamentais.

Vamos agora introduzir os conceitos de homogeneidade e isotropia no espaço-tempo governado pela métrica (2.1). A homogeneidade indica que todos os pontos de uma hipersuperfície espacial são equivalentes, enquanto a isotropia indica que todas as direções na hipersuperfície são equivalentes para todos os observadores fundamentais. Considerando uma hipersuperfície em particular a distância entre duas galáxias situadas em (x^1, x^2, x^3) e $(x^1 + \Delta x^1, x^2 + \Delta x^2, x^3 + \Delta x^3)$ é dada por:

$$d\sigma^2 = g_{ij}\Delta x^i\Delta x^j. \quad (2.6)$$

Se considerarmos o triângulo formado por três galáxias próximas, em algum tempo t particular, então a isotropia exige que o triângulo formado por essas galáxias mesmo em algum momento posterior deve ser similar ao triângulo original. Além disso, a homogeneidade exige que o fator de ampliação deve ser independente da posição do triângulo no espaço tridimensional. Consequentemente, a função temporal que for inserida na métrica deve ser um fator comum, ou seja:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t)h_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.7)$$

onde $S(t)$ é o fator de escala e h_{ij} são funções só das coordenadas (x^1, x^2, x^3) .

Notamos que é prática comum para identificar os observadores fundamentais, associadas a galáxias individuais (que estão a ser assumidas pontuais). No entanto, uma vez que o fator de ampliação é independente da posição, devemos negligenciar as pequenas velocidades peculiares de galáxias individuais reais.

Caso consideremos o espaço 3D com coordenadas (x^1, x^2, x^3) homogêneo e isotrópico,

o tensor de Riemann terá seis componentes independentes; em que cada uma das componentes será função das coordenadas (x^1, x^2, x^3) . Quanto mais simétrico for o espaço que trabalhamos menor será o número de funções necessárias. Consequentemente, em espaço que tenha simetria máxima deve ser caracterizado unicamente por uma constante (K).

Um espaço que possui simetria máxima pode ser definido como possuindo um tensor de curvatura na forma (HOBSON, 2006)(WEINBERG, 1972):

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad (2.8)$$

Neste caso, o tensor de Ricci é dado por:

$$R_{jk} = -2kg_{jk}, \quad (2.9)$$

e o escalar de curvatura por:

$$R = -6k. \quad (2.10)$$

Podemos verificar diretamente que a métrica dada por:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2, \quad (2.11)$$

possui as componentes do tensor de Riemann dada em (2.8).

Observe que essa é a métrica de uma esfera tridimensional embutida em um espaço euclidiano de quatro dimensões, a qual incorpora o princípio cosmológico e o postulado de Weyl, explicitamente:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.12)$$

É usual escrever este elemento de linha de uma forma alternativa em que a arbitrariedade na magnitude K é absorvida pela coordenada radial e o fator de escala.

Assumindo $K \neq 0$ vamos definir a variável $k = K/|K|$, de tal forma que $k = \pm 1$ dependendo se K é positivo ou negativo. Se introduzirmos a coordenada radial:

$$\bar{r} = |K|^{\frac{1}{2}} r, \quad (2.13)$$

então a eq. (2.1) torna-se:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{S^2(t)}{|K|} \left[\frac{d\bar{r}^2}{1-k\bar{r}^2} + \bar{r}^2(d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.14)$$

Finalmente, definimos uma função escalar $R(t)$ por:

$$R(t) = \begin{cases} \frac{S(t)}{|K|^{\frac{1}{2}}} & \text{se } K \neq 0 \\ S(t) & \text{se } K = 0 \end{cases}$$

Então, tirando o módulo da coordenada radial, obtemos a forma padrão para o elemento de linha Friedmann-Robertson-Walker (FRW),

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.15)$$

onde k assume os valores $-1, 0$ ou 1 , dependendo se a seção espacial tem curvatura negativa, zero ou positiva, respectivamente.

2.4 AS EQUAÇÕES DE CAMPO COSMOLÓGICAS

Para determinarmos explicitamente o fator de escala $R(t)$, devemos integrar as equações de campo de Einstein, que são dadas por:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

onde:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.17)$$

são as componentes do tensor de Einstein. A constante de gravitação é dada por: $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$, e Λ é o termo cosmológico.

Podemos expressar as equações de campo em uma forma equivalente (HOBSON, 2006)(LANDAU, 1975)(WEINBERG, 1989)

$$R_{\mu\nu} = -\kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}T g_{\mu\nu} \right), \quad (2.18)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia e T é o traço do tensor momento-energia dado por: $T = T^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$.

Para integrar estas equações, claramente precisamos de um modelo para o tensor momento-energia da matéria que preenche o universo. Podemos idealizar o universo e o modelo de matéria como um fluido macroscópico simples, desprovido de viscosidade, volume - viscoso e propriedades de condutividade de calor. Assim, assumimos um fluido perfeito, que é caracterizado em cada ponto com sua densidade própria ρ e a pressão p . Neste caso, o tensor momento-energia

é dado por (LANDAU, 1975):

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}. \quad (2.19)$$

onde u^μ é a quadri-velocidade do fluido. Desde que estejamos procurando soluções para um universo homogêneo e isotrópico, a densidade ρ e a pressão p devem ser função somente do tempo.

Para determinarmos a equação de campo cosmológico devemos usar o tensor métrico (2.15), cujas componentes são dadas por:

$$\begin{aligned} g_{00} &= c^2, \\ g_{11} &= -\frac{R^2(t)}{1-kr^2}, \\ g_{22} &= -R^2(t)r^2, \\ g_{33} &= -R^2(t)r^2 \text{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

As componentes do tensor de Ricci podem ser calculadas usando a expressão:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\sigma - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma, \quad (2.21)$$

onde os símbolos de Christoffel de segunda espécie são dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\nu g_{\rho\mu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.22)$$

Explicitamente para as componentes da métrica, (2.20), temos para as componentes do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{000}^0 + R_{010}^1 + R_{020}^2 + R_{030}^3 = \frac{3\ddot{R}}{R}, \\ R_{11} &= R_{101}^0 + R_{111}^1 + R_{121}^2 + R_{131}^3 = \frac{-(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k)c^{-2}}{(1-kr^2)}, \\ R_{22} &= R_{202}^0 + R_{212}^1 + R_{222}^2 + R_{232}^3 = -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k)c^{-2}r^2, \\ R_{33} &= R_{303}^0 + R_{313}^1 + R_{323}^2 + R_{333}^3 = -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2c^2k)c^{-2}r^2 \text{sen}^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Em um sistema de coordenadas comóveis a quadri-velocidade do fluido é dada por:

$$[u^\mu] = (1, 0, 0, 0), \quad (2.24)$$

que podemos escrever como:

$$u^\mu = \delta_0^\mu. \quad (2.25)$$

Assim, o tensor momento-energia é dado por:

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + p)c^2 \delta_{\mu}^0 \delta_{\nu}^0 - p g_{\mu\nu}. \quad (2.26)$$

consequentemente:

$$T = \rho c^2 - 3p. \quad (2.27)$$

Considerando na equação (2.18) as componentes de Ricci (Equações (2.23)) e o tensor momento energia (2.26), podemos escrever as equações de campo cosmológicas para o modelo cosmológico padrão:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) R. \quad (2.28)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 - c^2 k, \quad (2.29)$$

onde $\dot{R} = dR/dt$. Estas duas equações diferenciais determinam a evolução do tempo do fator escalar $R(t)$ e são conhecidas como as equações de campo de Friedmann-Lemaître. No caso $\Lambda = 0$, elas são frequentemente chamadas simplesmente como as equações de Friedmann.

2.5 EQUAÇÃO DO MOVIMENTO PARA O FLUIDO COSMOLÓGICO

Além das equações de campo cosmológicas (2.28) e (2.29), vamos considerar as equações de conservação do tensor momento-energia dadas por:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.30)$$

onde o ∇_{μ} denota a derivada covariante.

Para um sistema de referência comóvel a equação de conservação (2.30), assume a forma:

$$\dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{3\dot{R}}{R} = 0, \quad (2.31)$$

Esta equação pode de fato ser derivada diretamente das equações de campo, (2.28) e (2.29), através da eliminação de \ddot{R} . Assim, somente duas das três equações, (2.28), (2.29) e (2.31) são independentes.

A equação (2.31) pode ser rearranjada na forma:

$$\frac{d(\rho R^3)}{dt} = \frac{-3p\dot{R}R^2}{c^2}. \quad (2.32)$$

Podemos ainda trocar a variável de t para R , de tal modo que a equação (2.31) assume a forma:

$$\frac{d(\rho R^3)}{dR} = \frac{-3pR^2}{c^2}. \quad (2.33)$$

De um modo geral o fluido cosmológico é caracterizado por uma equação de estado:

$$p = \omega \rho c^2, \quad (2.34)$$

onde o parâmetro ω da equação de estado é uma constante. Portanto, a equação da energia (2.31) pode então ser escrita como:

$$\frac{d(\rho R^3)}{dR} = -3\omega \rho R^2. \quad (2.35)$$

cuja integração resulta:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (2.36)$$

que representa a evolução da densidade ρ como uma função do fator de escala $R(t)$. Em particular $\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{3}$ e $\omega = -1$ representam respectivamente: poeira, radiação e vácuo.

2.6 OS COMPONENTES DO FLUIDO COSMOLÓGICO

Suponha que o fluido cosmológico seja constituído por vários componentes distintos (por exemplo, matéria, radiação e o vácuo) que não interagem, com exceção através de sua gravidade mútua. Suponhamos ainda, que cada componente pode ser modelado como um fluido perfeito.

O tensor momento-energia de um fluido com múltiplos componentes é dado pelo somatório:

$$T^{\mu\nu} = \sum_i (T^{\mu\nu})_i, \quad (2.37)$$

onde i são os diferentes componentes do fluido. Uma vez que cada componente é modelado

como um fluido perfeito, temos:

$$T^{\mu\nu} = \sum_i \left(\rho_i + \frac{p_i}{c} \right) u^\mu u^\nu - \left(\sum_i p_i \right) g_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Assim, os multicomponentes de um fluido que podem ser modelados como um único fluido perfeito, com:

$$\rho = \sum_i \rho_i \text{ e } p = \sum_i p_i, \quad (2.39)$$

Além disso, uma vez que estamos supondo que os componentes do fluido não interagem, a conservação do tensor momento-energia exige que ocorra separadamente para cada componente, ou seja:

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu})_i = 0, \quad (2.40)$$

Então, cada um dos fluidos obedecem a uma equação de conservação de energia:

$$\dot{\rho} + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \frac{3\dot{R}}{R} = 0. \quad (2.41)$$

cuja integração resulta:

$$\rho_i \propto R^{-3(1+\omega_i)}. \quad (2.42)$$

Para $\omega = 0$ estamos lidando com poeira, onde a pressão termodinâmica é nula. Teremos radiação para $\omega = 1/3$, e matéria densa (*stiff matter*) para $\omega = 1$. A introdução da constante cosmológica pode ser considerada no lado geométrico das equações de campo de Einstein, porém, atualmente Λ é interpretada como a energia de densidade do vácuo e pode ser modelada como uma componente adicional ao fluido perfeito. A equação de estado para a energia de vácuo geralmente utilizada é dada por: $P = -\rho$.

Explicitamente, podemos escrever a densidade de energia em termos dos seus componentes por:

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t). \quad (2.43)$$

De um modo geral considera-se que não há interação entre os componentes cósmicos, o que pode ser considerado verdadeiro para a maior parte da história do universo.

A matéria bariônica é a usualmente conhecida do nosso dia-a-dia e sua estrutura é entendida como tendo prótons, elétrons e nêutrons. Por outro lado, há já algum tempo temos co-

nhecimento de uma componente material com estrutura não-bariônica, denominada de matéria escura. Pelos dados observacionais recentes a matéria bariônica constitui cerca de 3 por cento à 5 por cento do conteúdo universal, e a matéria escura contribui com 25 por cento à 27 por cento.

A necessidade da inclusão de uma matéria não-bariônica vêm da observação de estruturas à grande escala, especificamente das curvas de rotação de galáxias. O termo escuro dado a este tipo de matéria vem de sua fraca interação com campos eletromagnéticos. Além disso, temos a matéria escura fria (CDM) ou quente (HDM), cuja diferença esta ligada ao fato das partículas constituintes serem relativísticas ou não.

No caso de matéria relativista temos uma característica diferente do caso material usual, ou seja, a massa de repouso deste constituinte é desprezível frente a sua energia cinética. A densidade total de radiação é basicamente constituída por fótons e neutrinos:

$$\rho_r(t) = \rho_\gamma(t) + \rho_\nu(t). \quad (2.44)$$

onde o sub-escrito γ para fóton e ν indica neutrinos.

Podemos dizer que os fótons são os principais constituintes da energia relativista no cosmos, de tal modo que a radiação cósmica de fundo pode ser considerada como constituída predominantemente por fótons.

A radiação cósmica de fundo é distribuída uniformemente por todo o universo e possui espectro de corpo negro. Para radiação de corpo negro a densidade do número de fótons é dado por:

$$n(\nu, T)d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{(e^{h\nu/kT} - 1)}d\nu, \quad (2.45)$$

onde T é a temperatura da radiação e os fótons populam a banda de frequência entre ν e $\nu + d\nu$.

A energia dada em unidade de frequência pode ser escrita como:

$$E(\nu, T) = n(\nu, T)h\nu. \quad (2.46)$$

Assim, podemos escrever a densidade de energia de radiação como:

$$\rho_r(t) = \int_0^\infty E d\nu = aT^4, \quad (2.47)$$

onde

$$a = \frac{4\pi^2k^2}{60\hbar^3} \quad (2.48)$$

é a constante de Stefan-Boltzmann reduzida.

Do ponto de vista observacional a presente temperatura da radiação cósmica de fundo é da ordem de: $T_0 = 2.726K$, que corresponde à densidade do número de fótons: $n_{r_0} \approx 4 \times 10^8 m^{-3}$.

Para um tempo arbitrário, a temperatura da radiação cósmica de fundo relaciona-se com o fator de escala por:

$$T(t) = T_0 \frac{R_0}{R(t)}, \quad (2.49)$$

ou

$$T(t) = T_0(1+z), \quad (2.50)$$

onde z é o desvio para o vermelho.

Podemos ver que no passado o universo era mais denso e quente do que atualmente.

2.7 OS PARÂMETROS COSMOLÓGICOS

Uma análise breve do que foi feito até o momento aponta para a importância das densidades de energia, e da função de Hubble na evolução do universo. Porém é comum em cosmologia fazer uso de quantidades adimensionais. Neste sentido é que definimos o parâmetro de densidade como:

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_i(t), \quad (2.51)$$

Presentemente, a cosmologia observacional tem como um dos principais objetivos determinar os valores atuais para a função de Hubble e para os parâmetros de densidade. Vamos então considerar os seguintes valores (LAHAV, 2011):

$$\begin{aligned} H_0 &= 73,8 \pm 2,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \\ \Omega_{m_0} &= 0,289 \pm 0,019, \\ \Omega_{r_0} &= 2,47 \times 10^{-5}, \\ \Omega_{\Lambda_0} &= 0,73 \pm 0,03, \\ \Omega_{b_0} &= 0,0225 \pm 0,0006, \\ \Omega_{v_0} &= 0,05 \pm 0,0009, \end{aligned} \quad (2.52)$$

Constantemente estes valores são atualizados na literatura. Recentemente foram considerados os seguintes valores medidos pelo Planck (ADE, 2013):

$$\begin{aligned} H_0 &= (67,4 \pm 1,4) \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \\ \Omega_\Lambda &= 0,686 \pm 0,020, \\ \Omega_m h^2 &= 0,1423 \pm 0,0029. \end{aligned}$$

Usando a definição do parâmetro de densidade podemos reescrever a equações de campo (2.28) e (2.29) como:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda - \frac{\kappa}{H^2 R^2} = 1. \quad (2.53)$$

Definindo o parâmetro de densidade de curvatura como dado por:

$$\frac{-\kappa}{H^2 R^2}, \quad (2.54)$$

temos, então:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_\kappa = 1, \quad (2.55)$$

ou simplesmente,

$$\sum \Omega_i = 1. \quad (2.56)$$

Deste modo, podemos escrever a dependência da curvatura espacial do universo em termos dos constituintes materiais como:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1 \Leftrightarrow \text{curvatura espacial negativa } (\kappa = -1) \Leftrightarrow \text{universo aberto,}$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1 \Leftrightarrow \text{curvatura espacial zero } (\kappa = 0) \Leftrightarrow \text{universo plano,}$$

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1 \Leftrightarrow \text{curvatura espacial positiva } (\kappa = 1) \Leftrightarrow \text{universo fechado.}$$

Os dados observacionais indicam presentemente que o universo é plano, ou ainda, levemente fechado. Considerando o universo como plano, a quantidade $3H^2/8\pi G$ usada para definir o parâmetro de densidade é chamada de densidade crítica. Logo, a densidade crítica estabelece o valor necessário da densidade de energia total para que o universo seja plano. Explicitamente:

$$\rho_{crit} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 9.2 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3, \quad (2.57)$$

$$\rho_{crit} = 5.5 \text{ protons/m}^3. \quad (2.58)$$

Com a introdução das quantidades adimensionais (2.51), vamos reescrever as equações de campo, (2.28) e (2.29), em termos destes parâmetros:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} + \Omega_{r_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-4} + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{\kappa_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2} \right], \quad (2.59)$$

$$q = \frac{1}{2}(\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda), \quad (2.60)$$

onde q é o parâmetro de desaceleração, e é definido por: $q = -\frac{\ddot{R}}{R^2}$.

Podemos ainda, reescrever (2.59) como:

$$\Omega_i = \Omega_{i_0} \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3(1+\omega)}, \quad (2.61)$$

onde lembramos que o sub-escrito i refere-se a cada uma das componentes do fluido cósmico em particular.

2.8 MODELO DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

Para o universo preenchido somente com poeira, temos que $\Omega_{\Lambda_0} = 0$, e $\Omega_{r_0} = 0$.

Partindo da equação (2.59) e levando em conta que $H = \frac{\dot{R}}{R}$, podemos reescrevê-la como:

$$\dot{R}^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} + \Omega_{r_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2} + \Omega_{\Lambda_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + 1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0} - \Omega_{\Lambda_0} \right], \quad (2.62)$$

que pode ainda ser reescrita em termos do tempo adimensional $\tau = H_0(t - t_0)$, resultando:

$$\left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 = \Omega_{m_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} + \Omega_{r_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2} + \Omega_{\Lambda_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + 1 - \Omega_{m_0} - \Omega_{r_0} - \Omega_{\Lambda_0}. \quad (2.63)$$

Voltando ao caso de interesse nesta seção, a equação acima assume a forma:

$$\dot{R}^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} + 1 - \Omega_{m_0} \right], \quad (2.64)$$

que pode ser escrita na forma integral:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{R}{R_0}} \left[\frac{x}{\Omega_{m_0} + (1 - \Omega_{m_0})x} \right]^{1/2} dx. \quad (2.65)$$

Primeiramente vamos escrever o caso $\Omega_{m_0} = 1$.

A condição $\Omega_{m_0} = 1$ é equivalente a uma constante de curvatura nula, $\kappa = 0$. Neste caso a integração:

$$\left(\frac{R(t)}{R_0}\right) = \left(\frac{3}{2}H_0t\right)^{2/3}. \quad (2.66)$$

Esta solução é conhecida como modelo de Einstein-de-Sitter.

Para a constante de curvatura positiva ($\kappa = 1$), ou seja, $\Omega > 1$, a integral (2.65) pode ser calculada fazendo a transformação:

$$x = \left(\frac{\Omega_{m_0}}{\Omega_{m_0} - 1}\right) \text{sen}^2\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad (2.67)$$

onde o domínio do ângulo ψ é $[0, \pi]$.

A integração é dada na forma paramétrica, e é dada por:

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\Omega_{m_0}}{2(\Omega_{m_0} - 1)}(1 - \cos\psi), \quad (2.68)$$

$$t = \frac{\Omega_{m_0}}{2H_0(\Omega_{m_0} - 1)^{3/2}}(\psi - \text{sen}\psi). \quad (2.69)$$

Finalmente, considerando a constante de curvatura negativa ($\kappa = -1$), ou seja, $\Omega_{m_0} < 1$ vamos integrar (2.65) realizando a transformação $x = \frac{\Omega_{m_0}}{1 - \Omega_{m_0}} \text{senh}^2(\psi/2)$,

$$\frac{R}{R_0} = \frac{\Omega_{m_0}}{2(\Omega_{m_0} - 1)}(\cosh\psi - 1), \quad (2.70)$$

$$t = \frac{\Omega_{m_0}}{2H_0(1 - \Omega_{m_0})^{3/2}}(\text{senh}\psi - \psi). \quad (2.71)$$

Por outro lado, se considerarmos nosso universo preenchido apenas com radiação, ou seja, $\Omega_{\Lambda_0} = 0$ e $\Omega_{m_0} = 0$, neste caso temos:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{r_0} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-2} + 1 - \Omega_{r_0} \right] \quad (2.72)$$

Representando a expressão acima na forma integral temos:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{\frac{R}{R_0}} \frac{x}{\sqrt{\Omega_{r_0} + (1 - \Omega_{r_0})x^2}} dx. \quad (2.73)$$

Para o caso plano ($\kappa = 0$), ou seja, $\Omega_{r_0} = 1$ a integração é imediata e resulta:

$$\frac{R}{R_0} = (2H_0 t)^{1/2}. \quad (2.74)$$

Para as constantes de curvatura positiva ($\kappa = 1$) e negativa ($\kappa = -1$), a integração de (2.65) resulta:

$$\frac{R}{R_0} = [2H_0 \Omega_{r_0}^{1/2} t]^{1/2} \left(1 + \frac{1 - \Omega_{r_0}}{2\Omega_{r_0}^{1/2}} H_0 t \right)^{1/2}. \quad (2.75)$$

Para finalizar esta seção vamos considerar que nosso universo possua tanto matéria bariônica bem como radiação. Neste caso a equação (2.59) assume a forma:

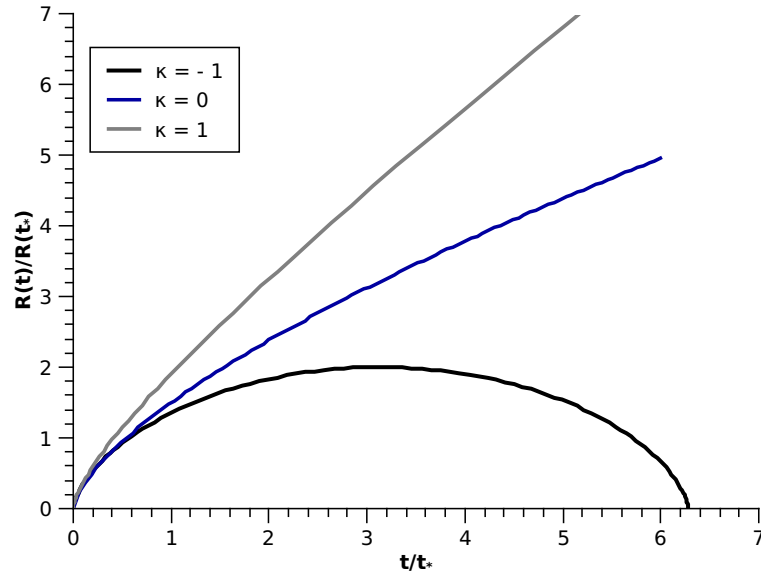
$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-1} + \Omega_{r_0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2} \right]. \quad (2.76)$$

Fazendo a troca de variável: $y = \Omega_{m_0} x + \Omega_{r_0}$, o processo de integração resulta:

$$H_0 t = \frac{2}{3\Omega_{m_0}^2} \left[\left(\Omega_{m_0} \frac{R}{R_0} + \Omega_{r_0} \right)^{1/2} \left(\Omega_{m_0} \frac{R}{R_0} - 2\Omega_{r_0} \right) + 2\Omega_{r_0}^{3/2} \right]. \quad (2.77)$$

Embora não possamos escrever uma forma explícita para o fator de escala da última relação, para um universo somente com poeira ou somente com radiação podem ser facilmente obtidos.

Figura 2.1: Esquema da evolução do fator de escala normalizado em modelos de Friedmann espacialmente abertos, fechados e planos.



Fonte: (SOUZA, 2013)

Para a feitura dos gráficos acima Figura (2.1) usamos as expressões: (2.70) para $k = -1$; (2.66) para $k=0$ e (2.68) para $k = 1$.

2.9 MODELO DE SITTER

O modelo de Sitter é um caso especial de um modelo de Lemaître definido pelos parâmetros cosmológicos $\Omega_{m_0} = 0$, $\Omega_{r_0} = 0$ e $\Omega_{\Lambda_0} = 1$. Este modelo é portanto, espacialmente plano ($\kappa = 0$), e a densidade da matéria e radiação são zero. Para o modelo de Sitter, a equação de campo cosmológica (2.59) é dada por:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = H_0^2. \quad (2.78)$$

O parâmetro de Hubble $H(t)$ é uma constante e o fator de escala que aumenta exponencialmente é dado por:

$$R(t) = e^{[H_0(t-t_0)]} = e^{[\sqrt{\Lambda/3c}(t-t_0)]}, \quad (2.79)$$

Assim, o modelo de Sitter não tem singularidade no big-bang.

2.10 A RELAÇÃO DISTÂNCIA-DESVIO PARA O VERMELHO

Vamos considerar que uma galáxia emite um fóton em um tempo t e observamos este mesmo fóton em t_0 . Podemos definir uma coordenada χ comóvel dada por:

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{cd\bar{t}}{R(\bar{t})} = \frac{c}{R_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{H(\bar{z})}. \quad (2.80)$$

Podemos reescrever a equação de campo (2.59) em termos do desvio para o vermelho $((1+z)^{-1} = R/R_0)$, onde obtemos:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{r_0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{r_0}(1+z)^2]. \quad (2.81)$$

Substituindo a última relação em (2.80), resulta:

$$\chi(z) = \frac{c}{R_0 H_0} \int_0^z \frac{d\bar{z}}{\sqrt{\Omega_{m_0}(1+\bar{z})^3 + \Omega_{r_0}(1+\bar{z})^4 + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{\kappa_0}(1+\bar{z})^2}}. \quad (2.82)$$

Fazendo a troca de variável $y = (1+z)^{-1}$, obtemos:

$$\chi(z) = \frac{c}{R_0 H_0} \int_{(1+z)^{-1}}^1 \frac{dy}{\Omega_{m_0}y + \Omega_{r_0} + \Omega_{r_0}y^4 + \Omega_{\kappa_0}y^2}. \quad (2.83)$$

As definições para a distância luminosa e distância angular são dadas respectivamente por:

$$d_L(z) = R_0 S(\chi(z))(1+z), \quad (2.84)$$

e

$$d_A(z) = \frac{R_0}{1+z} S(\chi(z)), \quad (2.85)$$

onde:

$$S(\chi(z)) = \begin{cases} \text{sen}\chi, & \text{para } \kappa = 1 \\ \chi, & \text{para } \kappa = 0 \\ \text{senh}\chi, & \text{para } \kappa = -1. \end{cases}$$

Resumindo, com a ajuda das expressões (2.83), (2.84), (2.85), podemos analisar com relativa facilidade a evolução da distância luminosa e da distância angular com relação ao desvio para o vermelho.

2.11 EVOLUÇÃO DOS PARÂMETROS DE DENSIDADE

A maior parte da nossa discussão até agora, têm se concentrado em explorar modelos cosmológicos com determinadas propriedades fixando os valores das atuais densidades Ω_{m_0} , Ω_{r_0} e Ω_{Λ_0} . A partir da definição (2.51), no entanto, é claro que cada uma das densidades é, em geral, uma função do tempo cósmico t . É, portanto, de interesse investigar a evolução dessas densidades como o universo se expande.

A partir da (2.51), temos:

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)}\rho_i(t) \Rightarrow \dot{\Omega}_i = \frac{8\pi G}{3H^2} \left(\dot{\rho}_i - \frac{2\dot{H}}{H}\rho_i \right), \quad (2.86)$$

onde o índice i denota m , r ou Λ , e os pontos denotam diferenciação com respeito ao tempo cósmico t . A partir da equação de movimento (2.31) para um fluido cosmológico, no entanto, temos:

$$\dot{\rho}_i = -3(1 + \omega_i)H\rho_i,$$

onde escrevemos $H = \dot{R}/R$, e $\omega_i = p_i/\rho_i$ é o parâmetro da equação de estado para um determinado componente. Assim, (2.86) se torna:

$$\dot{\Omega}_i = \Omega_i H \left[3(1 + \omega_i) + \frac{2\dot{H}}{H^2} \right]. \quad (2.87)$$

Precisamos agora de uma expressão para \dot{H} , que é dada por:

$$\dot{H} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) = \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{\ddot{R}}{R} - H^2, \quad (2.88)$$

e assim podemos escrever,

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} - 1 = -(q+1), \quad (2.89)$$

onde q é o parâmetro de desaceleração. Substituindo este resultado em (2.87) e usando a expressão (2.60) para q , obtemos finalmente:

$$\dot{\Omega}_i = \Omega_i H (\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda - 1 - 3\omega_i).$$

Definindo $\omega_i = 0, 1/3, -1$ respectivamente para a matéria (pó), radiação e vácuo, obtemos:

•

$$\dot{\Omega}_m = \Omega_m H [(\Omega_m - 1) + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda], \quad (2.90)$$

•

$$\dot{\Omega}_r = \Omega_r H [\Omega_m + 2(\Omega_r - 1) - 2\Omega_\Lambda], \quad (2.91)$$

•

$$\dot{\Omega}_\Lambda = \Omega_\Lambda H [\Omega_m + 2\Omega_r - 2(\Omega_\Lambda - 1)]. \quad (2.92)$$

Ao dividir estas equações por uma das outras, pode-se remover a dependência entre o parâmetro de Hubble H e o tempo cósmico t e obter um conjunto de acoplamento de equações diferenciais de primeira ordem somente nas variáveis Ω_m , Ω_r e Ω_Λ . Portanto, dado algum ponto geral neste espaço de parâmetros, estas equações definem uma única trajetória que passa por esse ponto. Como exemplo, vamos considerar o caso em que $\Omega_r = 0$. Dividindo-se as duas equações restantes, em seguida dá:

$$\frac{d\Omega_\Lambda}{d\Omega_m} = \frac{\Omega_\Lambda [\Omega_m - 2(\Omega_\Lambda - 1)]}{\Omega_m [(\Omega_m - 1) - 2\Omega_\Lambda]},$$

que define um conjunto de trajetórias(ou *linhas de fluxo*) no plano $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$. Esta equação também realça a importância dos pontos $(1, 0)$ e $(0, 1)$ neste plano, que atuam como *atratores* para as trajetórias (*statefinder parameters*).

Vejamos um modo mais simples de construirmos as trajetórias no plano $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$.

É muito comum nos referirmos aos parâmetros de densidade atuais, mas não podemos esquecer que estas são funções, ou ainda, do desvio para o vermelho. Caso desejamos obter a expressão para o parâmetro de densidade em função do desvio para o vermelho (z) podemos partir da própria definição, ou seja:

$$\Omega_i(z) = \frac{8\pi G \rho_i(z)}{3H^2(z)}, \quad (2.93)$$

onde $\rho_i(z) = \rho_0 i(1 + z^{3(1+\omega)})$ e a função de Hubble é dada por(COLES, 2010):

$$H_{(z)}^2 = H_0^2 (1 + z)^2 \{ \Omega_{0i} (1 + z)^{(1+3\omega)} + (1 - \Omega_{0i}) \}. \quad (2.94)$$

Substituindo a expressão da função de Hubble na equação (2.93) obtemos então;

$$\Omega_i(z) = \frac{\Omega_{0i} (1 + z)^{(1+3\omega)}}{(1 - \Omega_{0i}) + \Omega_{0i} (1 + z)^{(1+3\omega)}}. \quad (2.95)$$

Para exemplificar vamos escrever como seriam as expressões para poeira ($\omega = 0$) e para vácuo ($\omega = -1$), respectivamente dadas por:

$$\Omega_m(z) = \frac{\Omega_{m_0} (1 + z)}{(1 - \Omega_{m_0}) + \Omega_{m_0} (1 + z)}, \quad (2.96)$$

$$\Omega_{\Lambda}(z) = \frac{\Omega_{\Lambda_0}(1+z)^{-2}}{(1-\Omega_{\Lambda_0}) + \Omega_{\Lambda_0}(1+z)^{-2}}.$$

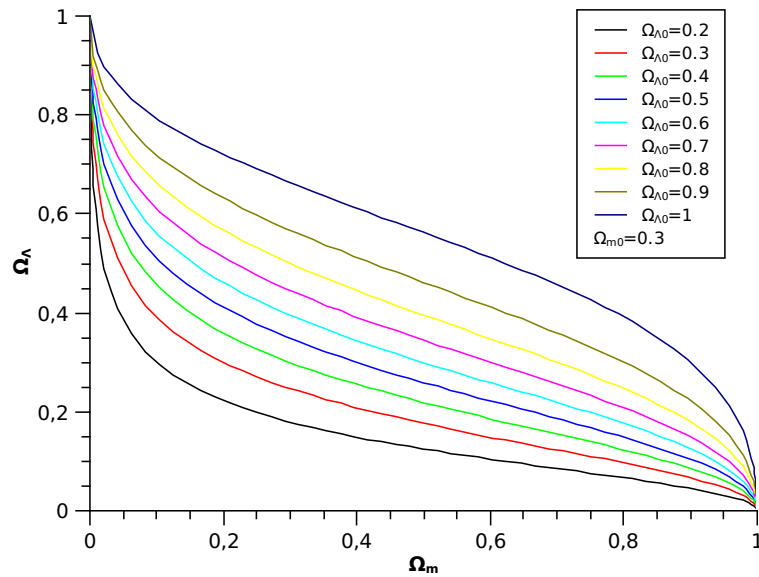
Podemos usar as expressões (2.96) para escrever uma relação direta entre Ω_{Λ} e Ω_m :

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\Omega_{\Lambda_0} \left\{ \frac{\Omega_m(1-\Omega_{m_0})}{\Omega_{m_0}(\Omega_m-1)} \right\}^{-2}}{1 - \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{\Lambda_0} \left[\frac{\Omega_m(1-\Omega_{m_0})}{\Omega_{m_0}(\Omega_m-1)} \right]^{-2}}, \quad (2.97)$$

$$\Omega_m = \frac{1}{1 - \frac{(1-\Omega_{m_0})}{\Omega_{m_0}} \sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda}(1-\Omega_{\Lambda_0})}{\Omega_{\Lambda_0}(1-\Omega_{\Lambda})}}} \quad (2.98)$$

Com esta expressão podemos construir a série de trajetórias no plano $\Omega_m - \Omega_{\Lambda}$ (Figura 2.2) e (Figura 2.3).

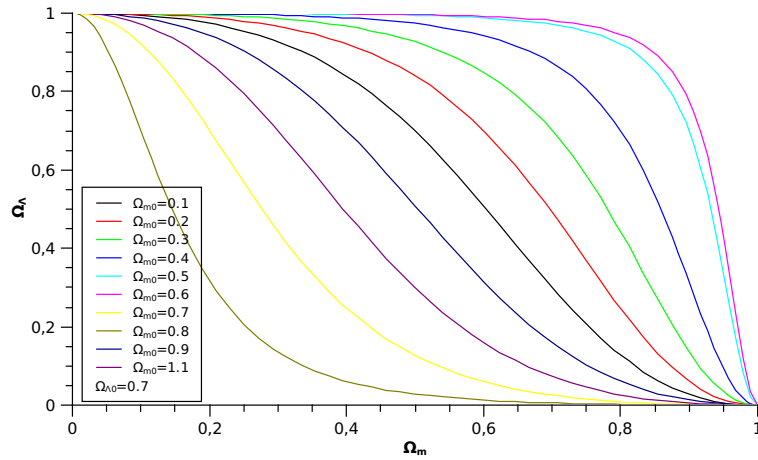
Figura 2.2: Evolução dos parâmetros de densidade Ω_m e Ω_{Λ} para vários modelos cosmológicos que passam pelos pontos $\Omega_{m_0} = 0.3$ e $\Omega_{\Lambda_0} = 0.2, \dots, 1$.



Fonte: (SOUZA, 2013)

Podemos notar o efeito de inserção de uma constante cosmológica diferente de zero na evolução dos parâmetros de densidade.

Figura 2.3: Evolução dos parâmetros de densidade Ω_m e Ω_Λ para vários modelos cosmológicos que passam pelos pontos $\Omega_{\Lambda_0} = 0.7$ e $\Omega_{m_0} = 0.1, \dots, 1.1$.



Fonte: (SOUZA, 2013)

2.12 EVOLUÇÃO DA CURVATURA ESPACIAL

Podemos analisar a evolução da curvatura espacial a medida que o universo expande usando a expressão:

$$\Omega_\kappa = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda = -\frac{c^2 \kappa}{H^2 R^2}. \quad (2.99)$$

Diferenciando a expressão acima em relação ao tempo e fazendo uso das expressões (2.90), (2.91) e (2.92), encontramos:

$$\dot{\Omega}_\kappa = 2\Omega_\kappa H q = \Omega_\kappa H (\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda), \quad (2.100)$$

onde q é o parâmetro de desaceleração. Note que, quando $\Omega_\Lambda = 0$, temos:

$$\Omega_m + 2\Omega_r > 0. \quad (2.101)$$

Consequentemente, se em alguma época em particular da existência do universo a curvatura for não-nula, rapidamente se distanciará do caso plano. Assim, vemos que a presença da constante cosmológica produz alterações perceptíveis. Na presença da constante cosmológica, em algum tempo específico haverá o domínio sobre a matéria e radiação, de tal modo que haverá um redirecionamento para o caso plano.

A expressão para o parâmetro de densidade de curvatura em termos do desvio para o

vermelho pode ser escrita como:

$$\Omega_{\kappa}(z) = \left[\frac{H_0(1+z)}{H(z)} \right]^2 \Omega_{\kappa_0}. \quad (2.102)$$

que auxiliada pela expressão

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_{m_0}(1+z)^3 + \Omega_{r_0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda_0} + \Omega_{\kappa_0}(1+z)^2],$$

fornece:

$$\Omega_{\kappa}(z) = \frac{\Omega_{\kappa_0}}{\Omega_{m_0}(1+z) + \Omega_{r_0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda_0}(1+z)^{-2} + \Omega_{\kappa_0}}. \quad (2.103)$$

Podemos notar que, caso presentemente tenhamos um universo que esteja distante da curvatura nula, para grandes desvios para o vermelho a curvatura irá estar bem próxima do valor nulo.

Em outras palavras, digamos que presentemente o parâmetro de densidade de curvatura seja não nulo. Consequentemente, teremos como condição inicial para Ω_{κ} um valor bem próximo de zero. Esta especificidade do valor inicial para o Ω_{κ} é conhecido como “flatness problem”.

3 TERMODINÂMICA E COSMOLOGIA

Nosso universo possui uma considerável quantidade de entropia, principalmente na forma de radiação de corpo negro. No âmbito da teoria da relatividade geral esta quantidade universal de entropia dificilmente seria explicada, pois as equações de campo de Einstein são adiabáticas e reversíveis.

Baseado neste problema foi que Prigogine e demais autores (PRIGOGINE, 1988), propuseram um modelo para o universo onde o número de partículas não se conserva.

Levando em conta as equações de campo de Einstein acopladas com uma equação da continuidade de uma fonte de produção de partículas, ficaria caracterizado um direcionamento do processo físico, ou seja, o processo é irreversível.

O processo de produção, segundo o modelo de Prigogine, formaria partículas às custas do campo gravitacional, com criação também de entropia, acoplando deste modo a termodinâmica com a cosmologia.

Por outro lado, no final do século passado a observação de supernovas do tipo Ia apontaram para um processo acelerado de expansão do universo (RIESS, 1998)(RIESS, 2004)(PERLMUTTER, 1999). Vários são os agentes apontados para a geração deste processo acelerado na literatura, porém o mais popular é a inclusão de uma constante cosmológica. Embora a adição de uma constante cosmológica responda adequadamente aos dados observacionais oriundos da observação de supernovas distantes, surge o problema da diferença da ordem de 10^{120} referente ao valor estimado pela teoria quântica de campos para a constante cosmológica e o valor estimado na cosmologia moderna (WEINBERG, 1989)(GARRIDA, 2001).

Um modo adotado para driblar este problema é considerar não mais uma constante, mas sim um termo cosmológico com dependência temporal. Ainda que o termo cosmológico possa ser considerado em qualquer um dos lados das equações de Einstein, presentemente se prefere considerar o termo cosmológico como sendo parte do tensor momento-energia. O termo cosmológico contribui ao tensor momento-energia com uma pressão negativa, e este é que seria o responsável pelo processo de expansão acelerada do universo (CARROL, 2001)(STEIGMAN,

2009).

Voltando para o tema central de nosso trabalho, o processo irreversível de criação de partículas às custas do campo gravitacional é mais uma opção para se explicar o processo de expansão acelerada do universo. Considerando-se que o número de partículas no universo não se conserva, gera ao nível do tensor momento-energia uma pressão negativa denominada pressão de criação, e esta pressão é que então seria a responsável pelo processo de aceleração do universo.

Nesta seção escrevemos as equações básicas de um universo em que o número de partículas não se conserva.

Assim sendo, usaremos a equação da continuidade na forma:

$$\frac{\dot{n}}{n} + 3\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\psi}{n}, \quad (3.1)$$

onde n é a densidade do número de partículas, e ψ é a fonte da criação de partículas. Como já dito, a inclusão de produção de partículas exige uma redefinição do tensor momento-energia, de tal modo que as equações de campo de Einstein assumem a forma:

$$8\pi G\rho = 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{\kappa}{R^2}, \quad (3.2)$$

$$8\pi GP_T = -2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\kappa}{R^2}, \quad (3.3)$$

onde P_T é a pressão total do sistema $P_T = P_{th} + P_c$. P_c denota a pressão de criação e P_{th} é a pressão termodinâmica usual.

O espaço-tempo que consideramos é dado por:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \right). \quad (3.4)$$

Para detalhes da obtenção de uma expressão para a pressão de criação o leitor poderá consultar (CALVAO, 1992). Todavia, considerando o processo de produção de partículas como adiabática a pressão de criação pode ser escrita como (LIMA, 1996)(CALVAO, 1992)(CALVAO, 1989)(LIMA, 1990):

$$P_c = -\frac{\rho + P_{th}}{3\frac{\dot{R}}{R}n} \psi. \quad (3.5)$$

Note que a pressão de criação é negativa, como já foi dito anteriormente, e é esta característica que possibilita a expansão acelerada de um universo com criação de partículas.

Combinando as equações (3.2) e (3.3) e a equação para a pressão de criação (3.5) podemos escrever uma única equação de campo, que é dada por:

$$R\ddot{R} + \left(\frac{3\omega + 1}{2} - \frac{3(\omega + 1)\psi}{2nH} \right) \dot{R}^2 + \left(\frac{3\omega + 1}{2} - \frac{3(\omega + 1)\psi}{2nH} \right) \kappa = 0, \quad (3.6)$$

onde consideramos também a equação de estado $P_{th} = \omega\rho$.

Nas equações de campo de Einstein aparece ρ , que é a densidade de energia, porém a fonte de produção de partículas vem associada a equação de continuidade para a densidade do número de partículas explicitamente a equação (3.1). Vamos agora determinar uma relação entre ρ e n (LIMA, 1996). Usando a equação de estado ($P_{th} = \omega\rho$) e a definição para a pressão de criação Eq. (3.5), a equação de conservação $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$, resulta:

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P_{th} + P_c)H = 0. \quad (3.7)$$

Com a devida substituição da pressão de criação, a expressão acima assume a forma:

$$\dot{\rho} + 3(\omega + 1)\rho \left(1 - \frac{\psi}{3Hn} \right) H = 0. \quad (3.8)$$

Eliminando a fonte ψ através da equação da continuidade podemos escrever então:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = (1 + \omega) \frac{\dot{n}}{n}, \quad (3.9)$$

cuja integração resulta:

$$n = n_* \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\frac{1}{1+\omega}}, \quad (3.10)$$

onde n_* e ρ_* são os respectivos valores destas quantidades para um determinado tempo.

Para exemplificar o modelo com criação vamos considerar o trabalho de Prigogine e demais autores (PRIGOGINE, 1988), que estabelece como fonte de produção de partículas:

$$\psi = \alpha H^2, \quad (3.11)$$

onde α é constante. Considerando a pressão termodinâmica nula ($P_{th} = 0$) e substituindo a fonte (3.11) na equação de campo (3.6), encontramos:

$$R\ddot{R} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha H}{2n} \right) \dot{R}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{3\alpha H}{2n} \right) \kappa = 0. \quad (3.12)$$

Integrando a equação anterior, Prigogine e demais autores acharam para o fator de escala a

seguinte expressão:

$$R(t) = [1 + C(e^{(\alpha\kappa M\tau)/6} - 1)]^{2/3}, \quad (3.13)$$

onde a constante C é dada por:

$$C = \frac{9}{\kappa M \alpha} \left(\frac{\kappa M n_0}{3} \right)^{1/2}, \quad (3.14)$$

e M é a massa das partículas formadas. Neste exemplo o processo de formação de partículas às custas do campo gravitacional elimina a singularidade primordial, ou seja, não temos Big Bang, que neste ponto se iguala a solução de De Sitter.

Vamos finalizar este capítulo determinando a evolução da temperatura em um universo onde o número de partículas não é conservado.

Considerando a equação de conservação $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$ e a equação de continuidade com fonte $(nu^\alpha)_{;\alpha} = \psi$ escrita na forma:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P_{th} + P_c) = 0, \quad (3.15)$$

$$\dot{n} + 3\frac{\dot{R}}{R}n = \psi, \quad (3.16)$$

respectivamente. Pois então, vamos considerar T e n como sendo as variáveis fundamentais do processo termodinâmico, logo:

$$\dot{T} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_n} \left\{ \left[\rho + P_{th} - n \left(\frac{\partial\rho}{\partial n} \right)_T \right] \frac{3\dot{R}}{R} + 3\frac{\dot{R}}{R}P_c + \left(\frac{\partial\rho}{\partial n} \right)_T \psi \right\}. \quad (3.17)$$

Por outro lado, considerando a entropia específica (σ) como sendo uma diferencial exata temos que (WEINBERG, 1971):

$$\rho + P_{th} - n \left(\frac{\partial\rho}{\partial n} \right)_T = T \left(\frac{\partial P_{th}}{\partial T} \right)_n. \quad (3.18)$$

Substituindo a relação acima na equação (3.17), obtemos:

$$\frac{\dot{T}}{T} = -3\frac{\dot{R}}{R} \left(\frac{\partial P_{th}}{\partial \rho} \right)_n \frac{-3\frac{\dot{R}}{R}P_c + \left(\frac{\partial\rho}{\partial n} \right)_T \psi}{T \left(\frac{\partial\rho}{\partial T} \right)_n}. \quad (3.19)$$

Considerando o processo como adiabático, ou seja, $\dot{\sigma} = 0$, podemos escrever a última relação

como:

$$\frac{\dot{T}}{T} = \left(\frac{\partial P_{th}}{\partial \rho} \right)_n \frac{\dot{n}}{n}. \quad (3.20)$$

Esta expressão é idêntica à equação para um fluido simples com conservação do número de partículas(WEINBERG, 1971)(TIOMNO, 1989).

4 PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS EM DIMENSÕES EXTRAS

Há já um certo tempo que a existência de dimensões extras vem sendo consideradas na literatura. Ainda que o acréscimo de dimensões extras inclua um processo de compactificação, devemos estudar a dinâmica cosmológica deste processo. Assim, a evolução de um universo com dimensões extras deve incluir um mecanismo que compactifique estas dimensões, fazendo que o cosmos evolua para o espaço-tempo quadridimensional usual.

É interessante observar que o processo da compactificação pode vir acompanhado da produção de uma grande quantidade de entropia, que cessaria sua produção assim que a dimensão extra alcançasse um valor mínimo, e o espaço-tempo quadridimensional usual expandiria adiabaticamente (ALVAREZ, 1983).

No trabalho de Alvarez e Gavela os autores chamam a atenção que o processo de produção de entropia deve vir acompanhado de um crescimento rápido do espaço-tempo quadridimensional usual, com o decaimento igualmente rápido para a dimensão extra. Outra opção descrita pelos autores que resultaria em uma produção da entropia seria considerar um número elevado de dimensões extras.

A idéia de considerar a produção de partículas materiais como consequência do decaimento da energia estocada no campo gravitacional já aparece no texto de Prigogine (PRIGOGINE, 1988). Por outro lado, não fica claro no trabalho dele como seria o término do processo de criação, dando-se a entender que este processo seria contínuo e infinito temporalmente. Manteremos a idéia principal do modelo de Prigogine incluindo uma dimensão extra. Em resumo, vamos propor um universo onde o número de partículas não é conservado, e cuja energia necessária para este processo seja suprida pelo campo gravitacional estocado em uma dimensão extra.

Vamos considerar o espaço-tempo dado pela métrica:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \{ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}(\theta)^2 d\phi^2 \} - Y(t)^2 dy^2, \quad (4.1)$$

onde $R(t)$ e $Y(t)$ são funções apenas do tempo, e y é uma dimensão adicional.

Consequentemente, as componentes do tensor de Einstein são dadas por:

$$G_0^0 = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{3\dot{R}\dot{Y}}{RY}, \quad (4.2)$$

$$G_1^1 = 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + 2 \frac{\dot{R}\dot{Y}}{RY} + \frac{\ddot{Y}}{Y}, \quad (4.3)$$

$$G_1^1 = G_2^2 = G_3^3, \quad (4.4)$$

$$G_4^4 = 3 \frac{\ddot{R}}{R} + 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2. \quad (4.5)$$

Como as componentes do tensor de Einstein e o tensor momento-energia estão relacionadas pela equação de campo de Einstein, é natural que o tensor momento-energia possua invariância correlata com as das componentes do tensor de Einstein (CHATTERJEE, 2006). Logo, as componentes do tensor momento-energia são dadas por:

$$T_0^0 = \rho, \quad (4.6)$$

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = P_{th}, \quad (4.7)$$

$$T_4^4 = P_c, \quad (4.8)$$

onde ρ é a densidade de energia, P_{th} é pressão termodinâmica, e P_c é a pressão de dissipação adicional devido à produção de partículas.

Consequentemente, as equações de campo de Einstein podem ser escritas como:

$$8\pi G\rho = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + \frac{3\dot{R}\dot{Y}}{RY}, \quad (4.9)$$

$$-8\pi G P_{th} = 2 \frac{\ddot{R}}{R} + \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + 2 \frac{\dot{R}\dot{Y}}{RY} + \frac{\ddot{Y}}{Y}, \quad (4.10)$$

$$-8\pi G P_c = 3 \frac{\ddot{R}}{R} + 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2. \quad (4.11)$$

Note que as equações acima se reduzem ao caso quadridimensional com criação de partículas se desconsiderarmos a dimensão adicional. Por outro lado, desconsiderando também a criação de partículas, teremos então as equações de campo usuais para o modelo de Friedmann.

No nosso modelo, o número de partículas no universo não é conservado. Então a

equação da continuidade, $(nU^\mu)_{;\mu} = \Psi$, é dada explicitamente por:

$$\dot{n} + \left(3\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{Y}}{Y}\right)n = \Psi, \quad (4.12)$$

onde n é densidade de partículas, e Ψ é a fonte de partículas.

Por outro lado, a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$TdS = dU + P_{th}dV - \mu dN, \quad (4.13)$$

onde T é a temperatura, S a entropia, V o volume, N o número de partículas e μ é o potencial químico. Com alguma manipulação a primeira lei pode ser colocada na forma:

$$Tnd\sigma = d\rho - \mu dn - T\sigma dn, \quad (4.14)$$

onde σ é a entropia específica.

Com a ajuda da equação de Euler,

$$\mu = \frac{\rho + P_{th}}{n} - T\sigma, \quad (4.15)$$

a equação (4.14) pode ser escrita como:

$$nT\dot{\sigma} = \dot{\rho} - (\rho + P_{th})\frac{\dot{n}}{n}. \quad (4.16)$$

Considerando o processo como adiabático ($\dot{\sigma} = 0$), ou equivalentemente, afirmando que as partículas que serão formadas possuam velocidades idênticas as partículas pré-existent (WAGA, 1996) podemos escrever:

$$\dot{\rho} - (\rho + P_{th})\frac{\dot{n}}{n} = 0. \quad (4.17)$$

Podemos integrar a equação acima fazendo uso da equação de estado $P_{th} = \omega\rho$, resultando:

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{n}{n_*}\right)^{1+\omega}. \quad (4.18)$$

Note que na expressão acima, para $\omega = 0$ temos:

$$\rho = \rho_* \frac{n}{n_*}, \quad (4.19)$$

ou seja, ρ_*/n_* representa a massa das partículas criadas, pois $\rho = mn$.

Voltemos a expressão (4.17) reescrevendo-a como:

$$\dot{\rho} - (1 + \omega)\rho \frac{\dot{n}}{n} = 0. \quad (4.20)$$

Considerando a equação de conservação $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$, que para nosso caso resulta:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P_{th}) + \frac{\dot{Y}}{Y}(\rho + P_c) = 0, \quad (4.21)$$

e a equação da continuidade com fonte:

$$\frac{\dot{n}}{n} = \frac{\Psi}{n} - \left(3\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{Y}}{Y}\right), \quad (4.22)$$

e substituindo-as na expressão (4.17), obtemos para a pressão de criação a expressão:

$$P_c = P_{th} - \frac{(\rho + P_{th})\Psi}{n\frac{\dot{Y}}{Y}}. \quad (4.23)$$

As expressões (4.21) e (4.23) se reduzem as expressões de Prigogine (PRIGOGINE, 1988) e de Ademir Lima (LIMA, 1996), quando desconsiderarmos a dimensão adicional.

Para finalizar esta seção, vamos obter explicitamente uma expressão para a fonte de produção de partículas. Levando em conta a equação de campo (4.11) e a expressão (4.23), podemos escrever a fonte de criação como:

$$\Psi = \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\frac{\dot{R}\dot{Y}}{RY} - \frac{\ddot{Y}}{Y} \right] \frac{\dot{Y}}{Y} \frac{n}{(1 + \omega)\rho}. \quad (4.24)$$

Reescrevendo a equação (4.18) como:

$$\frac{n}{\rho} = \frac{n_*}{\rho_*^{1+\omega}} \rho^{\frac{-\omega}{1+\omega}}, \quad (4.25)$$

e substituindo esta expressão em (4.24), obtemos a expressão para a fonte de produção de partículas:

$$\Psi = \frac{n_*}{(1 + \omega)\rho_*^{\frac{1}{1+\omega}}} \left[\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\frac{\dot{R}\dot{Y}}{RY} - \frac{\ddot{Y}}{Y} \right] \frac{\dot{Y}}{Y} \rho^{\frac{-\omega}{1+\omega}}. \quad (4.26)$$

O sub-escrito * refere-se a um tempo específico $t = t_*$. Por simplicidade consideramos, na obtenção da expressão acima, um tempo característico t_* onde $n_* = \rho_*^{1/1+\omega}$.

Substituindo na expressão (4.26) a equação de campo (4.9), podemos escrever a equação para a fonte de produção de partículas em termos dos fatores de escala R e Y e suas derivadas,

explicitamente:

$$\Psi = \frac{n_*}{8\pi G \rho_*^{\frac{1}{1+\omega}} (1+\omega)} \frac{\dot{Y}}{Y} \left(\frac{\ddot{R}}{R} + 2\frac{\dot{R}^2}{R^2} - 2\frac{\dot{R}\dot{Y}}{R Y} - \frac{\ddot{Y}}{Y} \right) \left(3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{\dot{R}\dot{Y}}{R Y} \right)^{\frac{-\omega}{1+\omega}}. \quad (4.27)$$

Nas seções posteriores vamos agora tratar de alguns casos particulares. De um modo geral, na literatura o ansatz inicial é realizado na fonte de produção de partículas. A partir da escolha da fonte de produção as equações de campo de Einstein são integradas e as demais quantidades cosmológicas são obtidas (função de Hubble, parâmetro de desaceleração, idade do universo e etc.). Vamos adotar um procedimento um tanto diferente. Como a generalização que estamos propondo envolve produção de partículas às custas da energia estocada em uma dimensão extra, que em princípio é compactificada, gerando o espaço quadridimensional usual, o nosso ponto de partida será considerar o fator de escala quadridimensional usual e conseqüentemente obter os demais parâmetros e expressões pertinentes. Analisaremos os seguintes modelos:

- Solução de Friedmann;
- Solução de Prigogine.

4.1 MODELO DE FRIEDMANN

Vamos considerar o fator de escala quadridimensional como equivalente ao de Friedmann com pressão termodinâmica não-nula, ou seja,

$$R = R_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (4.28)$$

onde ω vem da equação de estado $\omega = P_{th}/\rho$, e o sub-índice $*$ refere-se ao valor da quantidade em um tempo característico t_* .

Usando as equações de campo (4.9) e (4.10) podemos escrever a seguinte equação diferencial:

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\ddot{Y}}{Y} + (3\omega + 2)\frac{\dot{R}\dot{Y}}{R Y} + (1 + 3\omega) \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = 0. \quad (4.29)$$

Substituindo a expressão (4.28) em (4.29) obtemos uma equação diferencial envol-

vendo apenas o fator de escala da dimensão adicional:

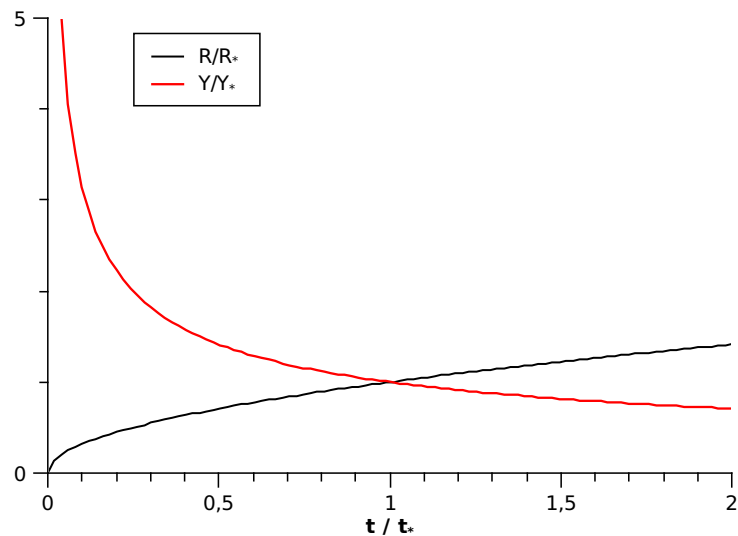
$$3(1 + \omega)t\ddot{Y} + 2(2 + 3\omega)\dot{Y} = 0. \quad (4.30)$$

A integração da equação acima resulta:

$$Y = Y_* \left(\frac{t}{t_*} \right)^{-\frac{1+3\omega}{3(1+\omega)}}. \quad (4.31)$$

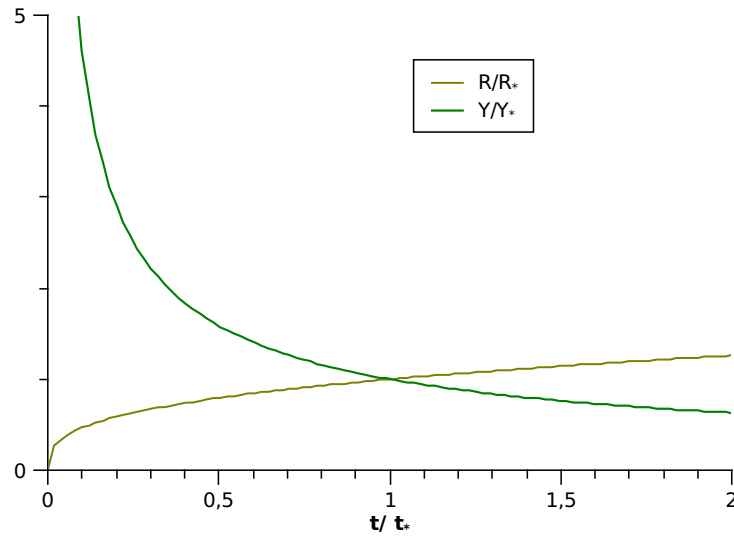
Na Figura (4.1) construímos os perfis para $R(t)$ e $Y(t)$ levando em conta um fluido de radiação ($\omega = 1/3$):

Figura 4.1: Perfis de $R(t)$ e $Y(t)$ para um fluido de radiação.



Fonte: (SOUZA, 2013)

Já na Figura (4.2) repetimos procedimento idêntico considerando matéria densa ($\omega = 1$):

Figura 4.2: Perfis de $R(t)$ e $Y(t)$ para matéria densa.

Fonte: (SOUZA, 2013)

Os parâmetros de desaceleração para cada caso são definidos por:

$$q_R = \frac{-\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{1}{2}(1 + 3\omega), \quad (4.32)$$

e

$$q_Y = \frac{-\ddot{Y}Y}{\dot{Y}^2} = \frac{-2(2 + 3\omega)}{1 + 3\omega}. \quad (4.33)$$

Enquanto para as funções de Hubble, temos:

$$H_R = \frac{2}{3(1 + \omega)t}, \quad (4.34)$$

e

$$H_Y = \frac{-(1 + 3\omega)}{3(1 + \omega)t}. \quad (4.35)$$

Neste exemplo, o fator de escala quadridimensional $R(t)$ expande de forma não acelerada, enquanto o fator de escala da dimensão adicional (4.31) decai aceleradamente, onde consideramos um fluido de radiação e de matéria densa.

O universo do nosso exemplo nasceria em cinco dimensões e seria anisotrópico, favorecendo por conseguinte a interpretação do processo de formação de estruturas à grande escala. Por outro lado, o processo de isotropização é rápido levando o universo a evoluir para as quatro dimensões usuais.

Usando a expressão (4.27) e os fatores de escala (4.28) e (4.31) encontramos para a fonte de produção de partículas a expressão:

$$\Psi \propto \frac{(1-3\omega)}{t^3} \left[\frac{1+3\omega}{(1+\omega)^2 t^2} \right]^{\frac{-\omega}{1+\omega}}. \quad (4.36)$$

Notamos que para radiação ($\omega = 1/3$) obtemos uma produção de partículas nula. Originalmente, a inclusão de uma dimensão adicional ligam-se ao processo de unificação entre as interações gravitacional e eletromagnética. A interpretação física da razão pela qual neste exemplo não temos a produção de fótons é um dos pontos que merece um estudo mais detalhado.

4.2 MODELO DE PRIGOGINE

Nosso segundo exemplo vai tratar da generalização do modelo de Prigogine, considerando uma dimensão adicional. O trabalho de Prigogine e demais autores foi o primeiro que considerou a produção de partículas do ponto de vista da termodinâmica no universo. Ou seja, neste modelo, a produção de partículas adota características globais, gerando uma pressão negativa adicional no tensor momento-energia, e que pode ser considerado um modelo alternativo para explicar o processo da expansão acelerada.

Vamos escrever a solução do modelo de Prigogine de uma forma particular, como:

$$R(t) = R_* e^{\alpha t/t_*}. \quad (4.37)$$

Neste caso, o fator de escala para a dimensão extra pode ser obtido integrando a Eq. (4.29), resultando:

$$Y(t) \propto \frac{\cos(\alpha\sqrt{2}t/t_*)}{e^{\alpha t/t_*}}. \quad (4.38)$$

Fazendo uma comparação entre as equações (4.37) e (4.38), vamos adotar um procedimento diferente neste exemplo. Ou seja, vamos considerar o fator de escala da dimensão adicional como sendo dado por:

$$Y(t) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha t\right)}{R(t)}. \quad (4.39)$$

e considerar esta expressão como nosso ansatz, que foi inspirado no aspecto da equação (4.38).

Substituindo a expressão (4.39) na equação diferencial (4.29), obtemos então:

$$R(t) = \left\{ \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left[e^{\sqrt{2}\alpha \frac{t}{t_*}} - e^{-\sqrt{2}\alpha \frac{t}{t_*}} \right] \right\}^{1/2}, \quad (4.40)$$

ou, de forma mais simplificada:

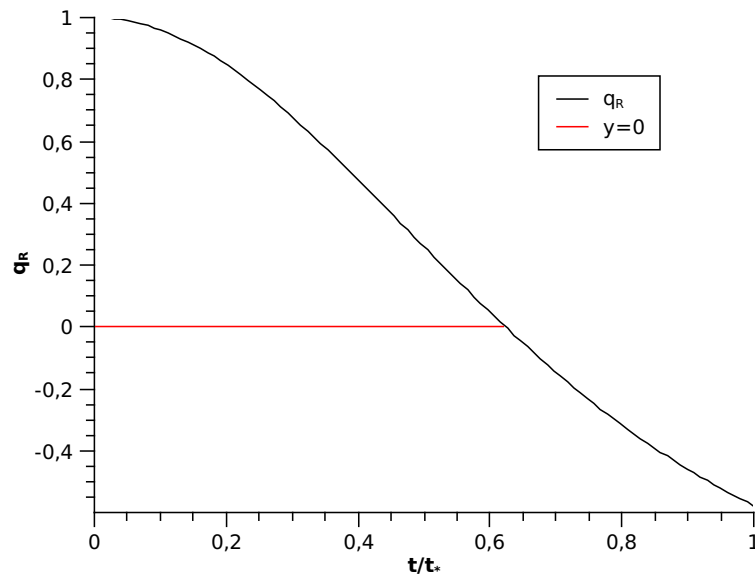
$$R(t) = \left[\frac{4}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{senh} \left(\sqrt{2}\alpha \frac{t}{t_*} \right) \right]^{1/2}. \quad (4.41)$$

Para finalizar os cálculos do nosso exemplo, vamos escrever explicitamente o parâmetro de desaceleração quadridimensional, dado por:

$$q_R = - \frac{\cosh \left(\sqrt{2}\alpha \frac{t}{t_*} \right)^2 - 2}{\cosh \left(\sqrt{2}\alpha \frac{t}{t_*} \right)^2}. \quad (4.42)$$

Assim, temos os seguintes gráficos:

Figura 4.3: Parâmetro de desaceleração q_R . Usamos a expressão (4.42) e consideramos $\alpha = \sqrt{2}/2$.

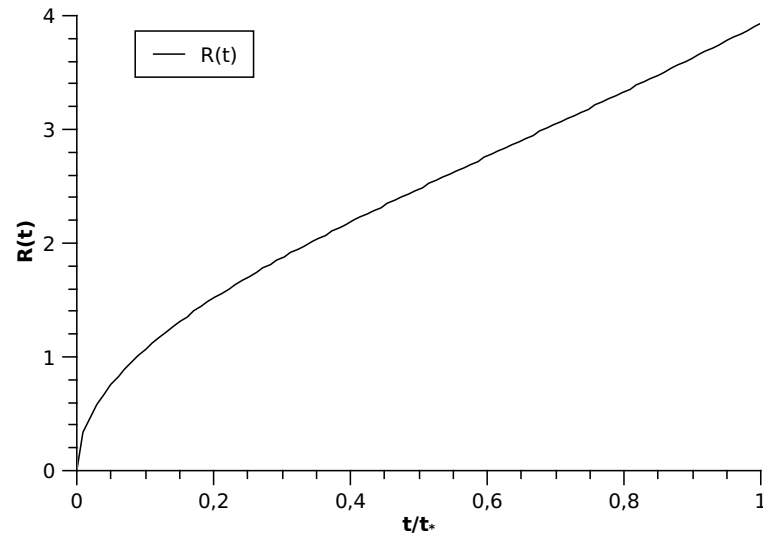


Fonte: (SOUZA, 2013)

Neste exemplo, podemos notar o decaimento forte da dimensão extra, onde o gráfico $Y(t) \times t/t_*$, Figura (4.5), é similar ao de um oscilador harmônico amortecido. Por outro lado, o fator de escala quadridimensional altera de desacelerado ($q > 0$) para acelerado ($q < 0$).

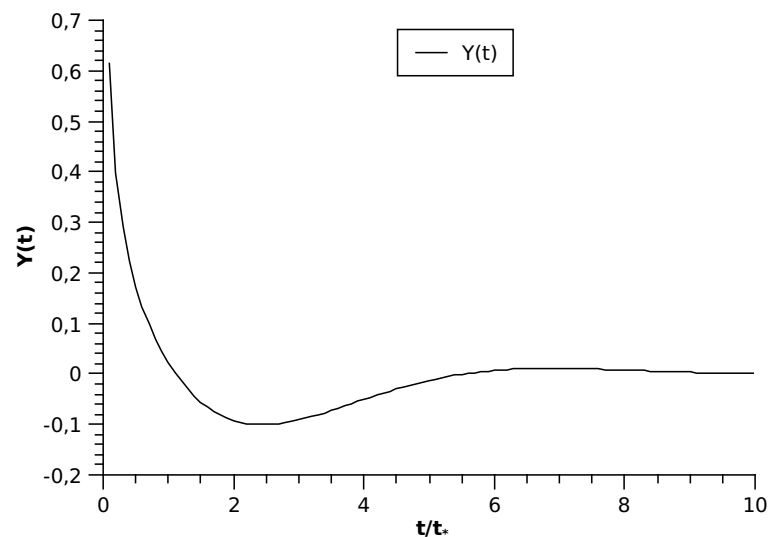
No gráfico do parâmetro de desaceleração, Figura (4.3) podemos notar uma transição

Figura 4.4: Fator de escala $R(t)$. Usamos a expressão (4.40) e $\alpha = \sqrt{2}/2$.



Fonte: (SOUZA, 2013)

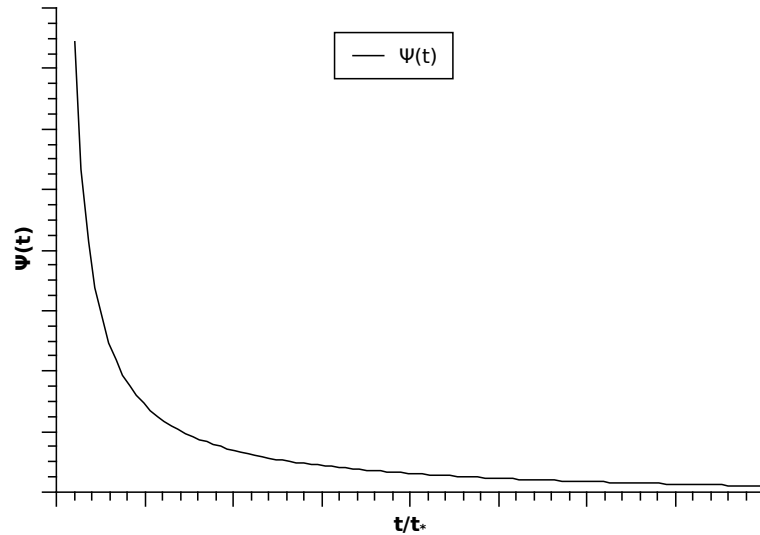
Figura 4.5: Fator de escala da dimensão adicional $Y(t)$. Usamos a expressão (4.39) e $\alpha = \sqrt{2}/2$.



Fonte: (SOUZA, 2013)

onde o processo de expansão do universo passa de desacelerado ($q > 0$) para acelerado ($q < 0$). Neste caso, na fase onde o processo de expansão não é acelerado teremos o favorecimento da formação de estruturas à grande escala. Já na fase onde o processo de expansão é acelerado podemos ter a concordância do modelo com os dados de supernovas distantes do tipo Ia, onde é necessário comparar a distância luminosa de nosso modelo com os dados observacionais.

Figura 4.6: Fonte de produção de Partículas $\Psi(t)$. Consideramos $\alpha = \sqrt{2}/2$.



Fonte: (SOUZA, 2013)

Recentemente, o Professor J. Fabris (FABRIS, 2010) e demais autores expressaram o favorecimento de uma dinâmica cosmológica onde o processo de expansão acelerada teria um valor máximo, e presentemente estaria novamente decaindo.

Por fim, mostramos a evolução da fonte de produção de partículas para o modelo de Prigogine com pressão termodinâmica nula (vide Figura (4.6)).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vamos delinear nesta seção alguns comentários adicionais e conclusões:

- O modelo com produção de partículas pode ser uma alternativa para explicar o processo de expansão acelerada do universo;
- No capítulo intitulado Produção de partículas, generalizamos o modelo cosmológico onde o número de partículas no universo não é conservado, adicionando uma dimensão extra;
- A inclusão de uma dimensão superior pode fornecer ao modelo cosmológico com criação de partículas uma alternativa ao modelo inflacionário para o universo primordial, em outras palavras, estaríamos tratando de um universo com fluido de alta densidade (SOUZA, 2013), onde o problema do horizonte cosmológico, e o problema da “planura” do universo também seriam eliminados.
- Do ponto de vista do I. Prigogine (PRIGOGINE, 1988), onde a produção de partículas ocorre às custas do campo gravitacional, o modelo com uma dimensão adicional permite uma melhor “visualização” deste processo. Desde que, de um modo geral, o processo de formação de partículas venha associado à compactificação da dimensão adicional.
- Nosso exemplo do modelo de Friedmann com uma dimensão adicional e produção de partículas, merece uma atenção especial. Um melhor exame de produção de fótons neste modelo pode ser uma abordagem futura com desdobramentos interessantes do ponto de vista físico, a respeito de processos de unificação.
- Notamos uma mudança de assinatura no fator de escala da dimensão adicional. Podemos eliminar este eventual problema considerando o seguinte “ansatz” para o fator de escala da dimensão adicional:

$$Y(t) = \frac{|\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha t)|}{R(t)}. \quad (5.1)$$

Deste modo, os valores negativos da função cosseno serão filtrados.

Por outro lado, a partir dos anos 80 têm aparecido na literatura discussões sobre a mudança de assinatura, principalmente mudanças que ocorrem entre a assinatura de Lorentz $(+, -, -, -)$ e a assinatura de Euclides $(-, -, -, -)$ no âmbito da teoria quântica de campos (HARTLE, 1983)(HAWKING, 1984)(DRAY, 1991)(HELLABY, 1994). Tal mudança é denominada na literatura de rotação de Wick.

A mudança de assinatura do ponto de vista da teoria quântica de campos e da cosmologia é um tema aberto a discussão, normalmente em espaço-tempo quadridimensional (KONSTANTINOV, 2004).

- Resumindo, todas as conjecturas relatadas acima indicam a necessidade de um exame futuro mais detalhado do modelo cosmológico com produção de partículas em dimensões superiores, principalmente no que se refere ao universo primordial.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

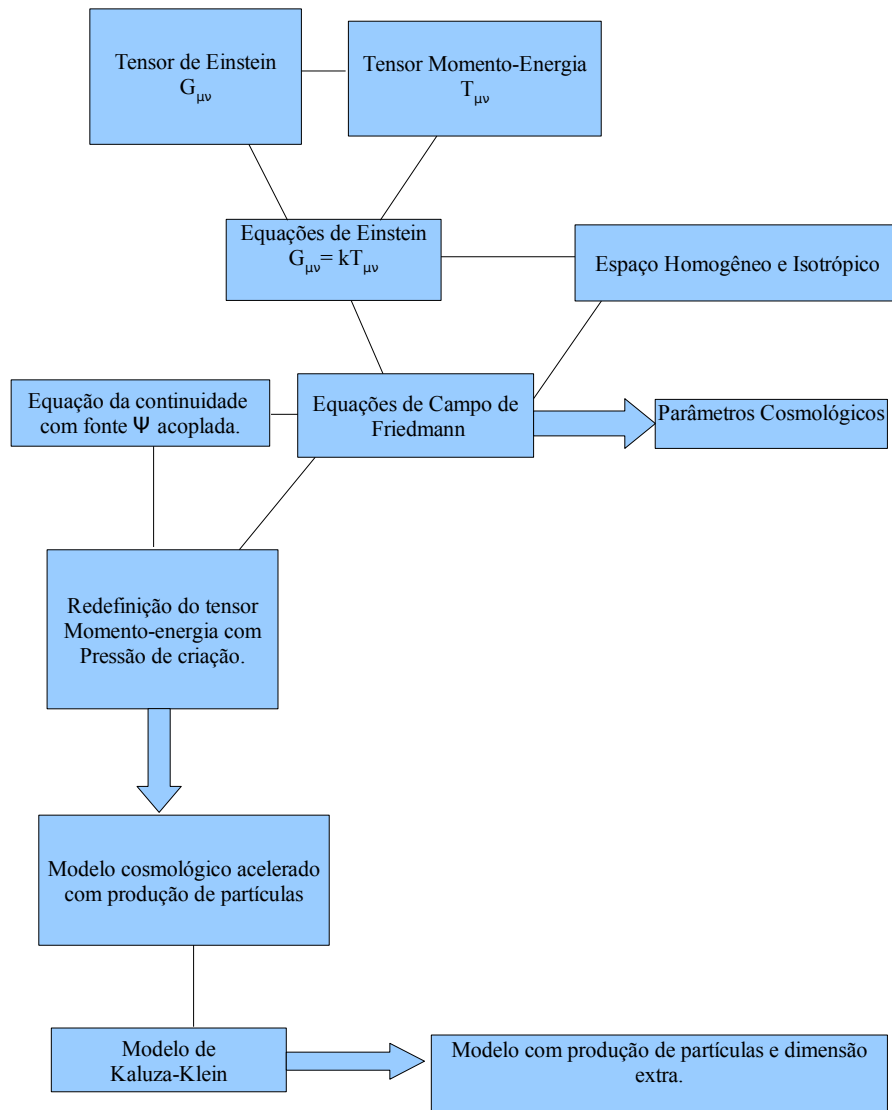
- ADE, P.A.R. et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. **arXiv:1303.5076v1**, 2013.
- ALVAREZ, E.; GAVELA, M. Belém. Entropy from Extra Dimensions. **Physical Review Letters**, 1983. v.51. 931 p.
- ARCURI, R. C.; WAGA, I. Growth of density inhomogeneities in Newtonian cosmological models with variable Λ . **Physical Review D**, 1996. v.50. 2928p.
- BERGH, S. van den. Discovery of the Expansion of the Universe. **arXiv:1108.0709**, 2011.
- CALVAO, M. O.; LIMA, J. A. S. On the thermodynamics of matter creation cosmology. **Physical Review A**, 1992. v. 162. 223 p.
- CALVAO, M. O.; LIMA, J. A. S. Non-Standard Big-Bang Models. **Physical Letter A**, 1989. v.141. 229 p.
- CALVAO, M. O.; LIMA, J. A. S.; WAGA, I. On the Thermodynamics of Matter Creation in Cosmology. **Physical Letter A**, 1992. v. 162. 223 p.
- CARROL, S. M. The Cosmological Constant. **Living Review Relativity**, 2001. v.4. 1 p.
- CHATTERJEE, S.; BANERJEE, A.; ZHANG, Y.Z. Accelerating universe from extra spatial dimension. **International Journal Modern Physical A**, 2006. v.21. 4035 p.
- COLES, P.; LUCHIN, F.; WILEY, J. and Sons. **Cosmology**, Chichester England, 2 ed. 2010.
- D'INVERNO, R. A. **Introducing Einstein's Relativity**, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- DRAY, T.; MANOGUE, C.A.; TUCKER, R.W. Particle Production from Signature Change. **General Relativity Gravitational**, 1991. v.23, 967 p.
- EISENSTEIN, D. J. et al. Detection of the Barion Acoustic Peak in the Large Scale Correlation Function of SDSS Luminas Red Galaxies. **Astrophysics Journal**, 2005. v.633. 560 p.
- FABRIS, J.C.; VELTEN, H. E.S. Cosmologia neo-newtoniana: um passo intermediário em direção à relatividade geral. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, 2012. v.34. 4302 p.
- FABRIS, J.C.; FRAGA, B. ; PINTO-NETO, N. ; ZIMDHAL, W. **Transient cosmic acceleration from interacting fluids**, JCAP, 2010. v. 1004. 08 p.
- GARRIDA, J.; VILENKIN, A. Solutions to the cosmological constant problem. **Physical Review D**, 2001. v.64. 023517 p.
- HARTLE, J. B.; HAWKING, S. W. Wave function of the Universe. **Physical Review D**, 1983. v.28. 2960 p.

- HAWKING, S. W.; ELLIS, G.F.R. **The large scale of space-time**, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1999.
- HAWKING, S.W. The quantum state of the universe. **Nuclear Physical B**, 1984. v.239. 257 p.
- HELLABY, C.; DRAY, T. Failure of standard conservation laws at a classical change of signature. **Physical Review D**, 1994. v.49. 5096 p.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. **General Relativity- An Introduction for Physicists**, Cambridge University Press, New York, 2006.
- HUBBLE, E.P. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. **Publications Natural Academy Science**, 1929. v.15. 168 p.
- JAIN, B. ; TAYLOR, A. Cross-Correlation Tomography: Measuring Dark Energy Evolution with Weak Lensing. **Physical Review Letter**, 2003. v.91. página 141302 p.
- KALUZA, T. **Zum Unitatsproblem der Physik**, Sitz. Preuss. Akad. Wiss., 1921. v.33, 966 p.
- KLEIN, O. Z. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. **Zeitschrift für Physik A**, 1926. v. 37. 895 p.
- KONSTANTINOV, M. Yu. A Simple Model of Space-Time Metric Signature Change. **Russian Physics Journal**, 2004. v.47. 4p.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Course of Theoretical Physics- The Classical Theory of Fields**, Fourth Revised English Edition, Pergamon Press, 1975. v.2.
- LAHAV, O.; LIDDLE, A.R. The Cosmological Parameters. **arXiv:1002.3488v1**, 2011.
- LEMAITRE, E. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant, rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. **Annual Society Science de Bruxelles**, 1927. v. 47. 49 p.
- LIMA, J.A.S; GERMANO, A. S. M.; ABRAMO, L. R. W. FRW-type Cosmologies with Adiabatic matter creation. **Physical Review D**, 1996. v.53. 4287 p.
- LIMA, J. A. S.; CALVAO, M. O.; WAGA, I. Thermodynamics and Matter Creation, Frontier Physics, Essays in Honor of Jayme Tiomno, World Scientific, Singapore, **arXiv: 0708.3397**, 1990.
- LIMA, J. A. S.; GERMANO, A. S. M. On the Equivalence of Bulk Viscosity and Matter Creation. **Physical Letter A**, 1992. v.170. 373 p.
- LIMA, J. A. S.; PORTUGAL, R.; WAGA, I. Bulk Viscosity Driven-Asymmetric Inflationary Universes. **Physical Review D**, 1988. v.37. 2755 p.
- MURPHY, G. L. Big-Bang Model Without Singularities. **Physical Review D**, 1973. v.8. 4231 p.
- PERLMUTTER, S. et. al. Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae. **Astrophysical Journal**, 1999. v.517. 565 p.
- PRIGOGINE, I.; GEHENIAU, J.; GUNZIG, E.; NARDONE, P. Thermodynamics and Cosmological. **General Relativity Gravity**, 1988. v.21. 767 p.

- RIESS, A.G. et al.Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant.**Astrophysical Journal**, 1998. v.116. 1009 p.
- RIESS, A.G. et al.Type Ia Supernovae Discoveries at $z > 1$ From Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy.**Astrophysical Journal**, 2004. v.607. 665 p.
- SELJAK, U. et al.Cosmological parameter analysis including SDSS Ly α forest and galaxy bias: Constraints on the primordial spectrum of fluctuations, neutrino mass, and dark energy.**Physical Review D**, 2005. v.71. 3515 p.
- SOUZA, R.G.; CAMPOS, M.The final stage of gravitational collapse for high density fluid medium.**The American Institute of Physics Conference Proceedings**,2013. v.1520. 418 p.
- SPERGEL, D. N.; BEAN,R.; DORE,O.; NOLTA,M.R.; BENNETT,C.L.; DUNKLEY, J.; HINSHAW, G.; JAROSIK,N.; KOMATSU,E.; PAGE, L.; PEIRIS, H. V.; VERDE, L.; HALPERN, M.; HILL, R. S.; KOGUT,A.; LIMON,M.; MEYER, S.S.; ODEGARD,N.; TUCKER, G.S.; WEILAND, J. L.; WOLLACK, E.; WRIGHT, E. L.Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology.**Astrophysical Journal Supplement**,2007. v.170. 377 p.
- STEIGMAN, G.; SANTOS, R. C.; LIMA, J. A. S.An accelerating cosmology without Dark Energy.**Journal Cosmology Astroparticles Physics**, 2009. v.0910:010.
- TIOMNO, J.;LIMA, J. A. S.On the Thermodynamics of One-Fluid Szekeres Like Cosmologies.**Class Quantum Gravity C**, 1989. v. 93.
- WEINBERG, S.The cosmological constant problem.**Review Modern Physics**, 61, 1009, 1989.
- WEINBERG, S.**Gravitation and Cosmology**, Wiley, New York, 1972.
- WEINBERG, S.Entropy Generation and the Survival of Protogalaxies in an Expanding Universe.**Astrophysics Journal**, 1971. v.168. 175 p.

Apêndice A: Esquema geral da Dissertação.

Figura 5.1: Esquema geral.



Fonte: (SOUZA, 2013)