



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ANTONIO FRANCISCO LEITÃO

ÍNDICE DE REFRAÇÃO NA TEORIA GRAVITACIONAL DE BRANS-DICKE: UM  
ESTUDO PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS E FONTES COM PRESSÕES NÃO NULAS

Boa Vista

2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
CURSO DE MESTRADO EM FÍSICA.

ANTONIO FRANCISCO LEITÃO

**ÍNDICE DE REFRAÇÃO NA TEORIA GRAVITACIONAL DE BRANS-DICKE: UM  
ESTUDO PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS E FONTES COM PRESSÕES NÃO NULAS**

Dissertação apresentada como pré-requisito para  
conclusão do Curso de Mestrado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Trindade Barros

Boa Vista

2009

ANTONIO FRANCISCO LEITÃO

**ÍNDICE DE REFRAÇÃO NA TEORIA GRAVITACIONAL DE BRANS-DICKE: UM ESTUDO PARA MÉTRICAS ESTÁTICAS E FONTES COM PRESSÕES NÃO NULAS**

Dissertação apresentada como pré-requisito para a conclusão do Curso de Mestrado em Física da Universidade Federal de Roraima, defendida em 14 de outubro de 2009 e avaliada pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. Adriano Trindade Barros  
Orientador/ Departamento de Física–UFRR

---

Prof. Dr. Edmundo Marinho do Monte  
(Departamento de Física–UFPB)

---

Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira  
(Departamento de Física–UFRR)

*Dedico esta dissertação a memória de minha mãe,  
Rita Alves de Souza Leitão e o bem estar de meu pai,  
Valdemar Dias Leitão, e que viva muitos anos.*

## AGRADECIMENTOS

- (i) Ao meu orientador e amigo, Prof. Adriano Trindade Barros (DFis–UFRR), pela assistência e incentivo na elaboração deste trabalho e por auxiliar-me no começo de minha vida científica.
- (ii) Ao meu filho Allef e minha esposa Lina pela paciência que tiveram com um chato que estuda coisa de "doido".
- (iii) Aos meus colegas da primeira turma de mestrado João Ribamar, Luzinete VilaNova e Chan Tat pela colaboração nas discussões durante todo o desenvolvimento deste trabalho e companheirismo.
- (iv) Aos professores que ministraram as disciplinas Prof. Dr. Ijanílio Gabriel Araújo , Prof. Dr. Abel Dionízio Azeredo que me ensinou o latex para escrever a esta dissertação e o Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira sempre muito presente em todos os momentos.
- (v) Ao meu amigo e Prof. Dr. Guido Nunes Lopes pelo incentivo e críticas oportunas.

## RESUMO

Neste trabalho obtemos o índice de refração considerando-se a teoria de Brans-Dicke como a teoria fundamental da gravitação. Na investigação admitimos que o espaço-tempo é estatico e as pressões internas da fonte do campo gravitacional são, em princípio, não nulas e anisotrópicas. Utilizamos a técnica da aproximação de campo fraco das equações de campo para obter expressões para o índice de refração tensorial, fazendo-se algumas aplicações dos resultados.

Palavras Chave: Índice de Refração; Teoria de Brans-Dicke; Aproximação de Campo Fraco.

## **ABSTRACT**

In this work we obtain the refractive index taking the Brans-Dicke theory as the fundamental and underlying theory of gravitation. In our investigation we consider that the spacetime is static and we makes no assumptions about the relative smallness or isotropy of internal pressures of the sources generating the gravitational field. We employ the technique of weaking the gravitational field equations in order to derive formulae for the refractive index tensor and we make some applications of these results.

Keywords: Refractive Index; Brans-Dicke Theory; Weak Field Approximation.

## SUMÁRIO

<b>Lista de Figuras</b> .....	
<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>2 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL</b> .....	13
2.1 INTRODUÇÃO .....	13
2.2 FORMALISMO TENSORIAL .....	13
2.3 ORIGENS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL .....	20
2.4 EQUAÇÕES DE CAMPO.....	23
2.5 APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO .....	25
2.6 APROXIMAÇÃO NEWTONIANA .....	28
2.7 COMENTÁRIOS .....	30
<b>3 A TEORIA DE BRANS-DICKE</b> .....	35
3.1 INTRODUÇÃO .....	35
3.2 A TEORIA DE BRANS-DICKE .....	35
3.3 FORMA ALTERNATIVA DAS EQUAÇÕES DE CAMPO DE BRANS-DICKE .	38
3.4 AS EQUAÇÕES DE BRANS-DICKE NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO	39
3.5 APROXIMAÇÃO NEWTONIANA NA TEORIA DE BRANS-DICKE .....	43
3.6 COMENTÁRIOS .....	44
<b>4 ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NO CONTEXTO DA TEORIA DE BRANS-DICKE</b> .....	47



4.1	INTRODUÇÃO .....	47
4.2	ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL .....	47
4.3	RELAÇÃO ENTRE AS TEORIAS DA RELATIVIDADE GERAL E DE BRANS- DICKE .....	52
4.4	ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NA TEORIA DE BRANS-DICKE .....	54
4.5	COMENTÁRIOS .....	56
<b>5</b>	<b>ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NA TEORIA DE BRANS-DICKE: MÉTRICAS COM SIMETRIA ESFÉRICAS .....</b>	<b>57</b>
5.1	INTRODUÇÃO .....	57
5.2	SOLUÇÃO DE CAMPO FRACO COM SIMETRIA ESFÉRICA NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL .....	57
5.3	CÁLCULO DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO .....	62
5.4	SOLUÇÃO DE CAMPO FRACO COM SIMETRIA ESFÉRICA NA TEORIA DE BRANS-DICKE .....	64
5.5	ÍNDICE DE REFRAÇÃO NA TEORIA DE BRANS-DICKE .....	71
5.6	COMENTÁRIOS .....	74
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>76</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>78</b>
	<b>APÊNDICES.....</b>	<b>81</b>
	APÊNDICE A - Cálculo das quantidades $T^{0\beta}{}_{;\beta}$ , $T^{2\beta}{}_{;\beta}$ e $T^{3\beta}{}_{;\beta}$ .....	81
	APÊNDICE B - Cálculo de $\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta}$ .....	83

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Deflexão da luz. Figura editada, retirada de Papapetrou (1974)	22
Figura 2.2	Órbita planetária com a precessão do periélio. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).	31
Figura 2.3	Mudança aparente na posição da estrela devido à deflexão da luz. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).	32
Figura 2.4	Trajetória de um sinal de luz entre a Terra e um planeta. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).	33
Figura 2.5	Anel de Einstein. Figura editada, retirada de Mollerach (2002).	34
Figura 5.1	Propagação do raio de luz.	63

## 1 INTRODUÇÃO

A teoria da Relatividade Geral, desenvolvida por Einstein (1915), é a teoria padrão de gravitação da Física. Do ponto de vista experimental, a teoria passou por um período inicial de poucos testes que depois estagnaram, face aos equipamentos da época. Porém, a partir dos anos 60 do século passado houve um renascimento quanto às possibilidades de testar-se a teoria, a qual desde então vem tendo as suas previsões confirmadas em vários novos experimentos (WILL, 2005).

A teoria gravitacional de Einstein é uma teoria métrica da gravitação, em contraste com a teoria gravitacional de Newton, que considera o espaço como absoluto. De fato, segundo Einstein, o conteúdo material é que determina as propriedades métricas do espaço, isto é, a métrica  $g_{\mu\nu}$  do espaço-tempo. Essa teoria é muito rica em relação à variedade de problemas que podem ser abordados, como, por exemplo, a analogia entre o campo gravitacional e um meio ótico refrativo (NANDI, 1995).

Segundo de Felice (1971), Einstein foi o primeiro a sugerir a idéia da analogia entre o campo gravitacional e um meio refrativo. Depois, Eddington (1920) calculou a deflexão dos raios de luz na vizinhança de um objeto material, considerando que o espaço em torno do objeto era preenchido com um meio com índice de refração  $n$ , obtido a partir da métrica do espaço-tempo. Por sua vez, Plebanski (1960) mostrou que, em um espaço-tempo curvo com um tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ , as equações de Maxwell do eletromagnetismo podem ser reescritas como se elas fossem válidas em um espaço-tempo plano, no qual existe um meio ótico com uma equação constitutiva. Desse modo, especificamente em relação à propagação da luz, o campo gravitacional age como um meio ótico refrativo.

Uma consequência da deflexão da luz por um campo gravitacional é o fenômeno da lente gravitacional (WEINBERG, 2008), que leva à visão de várias imagens de um mesmo objeto no espaço, como por exemplo uma estrela distante. Isso ocorre porque uma galáxia ou

um aglomerado de galáxias, que está entre a fonte de luz e o observador na Terra, curva a luz que passa na sua vizinhança fazendo-a convergir para a Terra. O estudo dos efeitos dessas lentes pode ser realizado empregando-se o regime de campo fraco da teoria da Relatividade Geral (LANDAU, 1996), definindo-se um índice de refração para o "meio" correspondente ao campo gravitacional que curva a luz.

Por outro lado, existem outras teorias gravitacionais (WILL, 1993) que servem de alternativas para a teoria de Einstein. Um protótipo de uma teoria alternativa é a teoria de Brans-Dicke (BRANS, 1961), que é a mais simples generalização da teoria da Relatividade Geral, sendo também uma teoria métrica do espaço-tempo, mas com os efeitos gravitacionais descritos pela métrica  $g_{\mu\nu}$  e por um campo escalar  $\phi$ . Assim, ela é uma teoria escalar-tensorial da gravitação. Por sua vez, a teoria de Brans-Dicke é um caso particular da classe das teorias escalares-tensoriais, para as quais o fator de acoplamento do campo escalar com a geometria é  $\omega(\phi)$ . Na teoria de Brans-Dicke,  $\omega(\phi) = \omega = \text{constante}$ .

O interesse no estudo de teorias alternativas da gravitação ocorre também porque boa parte das teorias de altas energias que buscam quantizar a gravitação ou unificá-la com as outras interações fazem previsões que divergem da Relatividade Geral. No caso das teorias escalares-tensoriais, elas incorporam naturalmente ingredientes da teoria de cordas, tais como um campo escalar tipo dilaton (FARAONI, 2009).

Neste trabalho, generalizamos alguns dos resultados encontrados por Boonserm (2005) para a teoria da Relatividade Geral. De fato, obtivemos a expressão do índice de refração tensorial que simula os efeitos gravitacionais de um espaço-tempo estático em torno de fontes com pressões não nulas no contexto da teoria de Brans-Dicke. Comparando este resultado com o resultado previsto pela Relatividade Geral podemos avaliar a influência exercida pelo campo escalar de Brans-Dicke. Um aspecto a ser mencionado é que trabalhamos na chamada aproximação de campo fraco da gravitação (ASHTEKAR, 1994; HITZER, 1997). Esta aproximação consiste em manter nas equações de campo termos até a ordem  $G\lambda$ , onde  $\lambda$  é alguma quantidade relacionada com a densidade de matéria e as pressões da fonte considerada.

Na determinação do índice de refração para a teoria de Brans-Dicke, consideramos métricas estáticas do espaço-tempo, particularizando depois para o importante caso de métricas com simetria esférica, que é considerado uma boa aproximação para halos galácticos contendo matéria escura (BOONSERM, 2005). Exibimos ainda a expressão desse índice de refração para

o monopolo global de Barriola-Vilenkin (BARRIOLA, 1989).

A dissertação está estruturada da seguinte forma: no Capítulo 2, fazemos uma revisão de noções básicas do formalismo tensorial necessário para a teoria da Relatividade Geral, discutimos alguns aspectos ligados com as origens da teoria e exibimos as equações de campo na forma exata e depois na aproximação linear. É feito ainda um breve apanhado do status experimental da teoria da Relatividade Geral. No Capítulo 3, a teoria gravitacional de Brans-Dicke é apresentada e mais uma vez encontraremos as equações de campo fraco da teoria, que serão utilizadas nos capítulos subsequentes. Em continuação, no Capítulo 4, obtemos a expressão para o índice de refração tensorial no contexto da teoria de Brans-Dicke, considerando o caso de métricas estáticas e pressões não nulas. Então, o resultado é comparado com o da Relatividade Geral e as consequências são examinadas. Finalmente, no último capítulo, consideramos o caso particular das métricas estáticas com simetria esférica e obtemos a expressão do índice de refração na teoria de Brans-Dicke. Em seguida são discutidas algumas aplicações.

Adotamos, ao longo da dissertação, a métrica  $g_{\mu\nu}$  com a assinatura  $(-+++)$ . Nos capítulos 4 e 5, usamos por conveniência o sistema de unidades em que  $c = 1$ .

## 2 A TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

### 2.1 INTRODUÇÃO

Inicialmente, neste capítulo, desenvolvemos algumas noções básicas do formalismo tensorial necessário para a teoria da Relatividade Geral de Einstein. Na sequência, discutimos alguns aspectos ligados com as origens da teoria, notadamente o Princípio da Equivalência. Então, as equações de campo são obtidas na forma exata e depois na aproximação linear. Verificamos o limite Newtoniano, obtendo a equação de campo da teoria de Newton com hipóteses apropriadas. Finalmente, fazemos um breve apanhado da situação experimental em que a teoria da Relatividade Geral se encontra na atualidade.

### 2.2 FORMALISMO TENSORIAL

Uma quantidade física, como por exemplo, a velocidade de uma partícula, é determinada por um conjunto de valores (as suas componentes), que dependem do sistema de coordenadas. O estudo da forma como estes valores mudam de um sistema para outro originou o conceito de tensor. Com a ajuda deste conceito, é possível expressar as leis da Física através de equações tensoriais, as quais possuem a mesma forma em qualquer sistema de coordenadas (PAPAPETROU, 1974).

Dois conceitos básicos do cálculo tensorial são os conceitos de escalar e de vetor: o escalar é uma quantidade que independe do sistema de coordenadas. Já os vetores, em uma transformação de um sistema com coordenadas  $x^\mu$  para outro com coordenadas  $\tilde{x}^\mu$ , podem ser de dois tipos. Temos o vetor contravariante, que é aquele cujas  $n$  componentes  $a^\lambda$  se transformam como

$$\tilde{a}^\lambda = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} a^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\lambda}{\partial x^\alpha} a^\alpha, \quad (2.1)$$

onde introduzimos a convenção de soma de Einstein: índices repetidos, um em cima e outro embaixo indicam uma soma, que fica então subentendida. Tem-se também o vetor covariante  $a_\lambda$ , cuja lei de transformação é

$$\tilde{a}_\lambda = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\lambda} a_\alpha. \quad (2.2)$$

A definição de tensores de ordem superior é direta. Por exemplo, um tensor contravariante de ordem 2 é uma quantidade de  $n^2$  componentes  $T^{\lambda\mu}$  que transformam-se quando  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$  como

$$\tilde{T}^{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\mu} T^{\lambda\mu}. \quad (2.3)$$

Agora, tem-se também o tensor covariante  $T_{\lambda\mu}$  e o tensor misto  $T^\lambda{}_\mu$ . É interessante notar que o delta de Kronecker  $\delta^\lambda{}_\mu$  é um tensor misto. De um modo mais geral, pode-se usar a seguinte notação para classificar o tensor quanto à sua ordem: um tensor com  $p$  índices superiores e  $q$  índices inferiores é dito um tensor de ordem  $(p, q)$ . Assim, um escalar é um tensor de ordem  $(0, 0)$ , um vetor contravariante é um tensor de ordem  $(1, 0)$  e assim por diante.

Para discutirmos propriedades de simetria, vamos considerar um tensor  $T^{\lambda\mu}$  de ordem  $(2, 0)$ . Este tensor é dito simétrico se

$$T^{\lambda\mu} = T^{\mu\lambda}. \quad (2.4)$$

Por outro lado, se

$$T^{\lambda\mu} = -T^{\mu\lambda}, \quad (2.5)$$

o tensor é anti-simétrico. Essas mesmas propriedades se aplicam para tensores covariantes  $T_{\lambda\mu}$ . Porém, não são definidas propriedades de simetria para um tensor misto  $T^\lambda{}_\mu$ . No caso de um tensor de ordem  $(p, q)$ , pode-se definir simetrias com respeito a pares de índices que sejam ambos superiores ou inferiores. Um tensor de segunda ordem contravariante ou covariante, sem simetria, pode sempre ser escrito como a soma de dois tensores: um simétrico e outro anti-simétrico. De fato,

$$T_{\lambda\mu} = T_{(\lambda\mu)} + T_{[\lambda\mu]}, \quad (2.6)$$

onde  $T_{(\lambda\mu)} \equiv \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu} + T_{\mu\lambda})$  é simétrico e  $T_{[\lambda\mu]} \equiv \frac{1}{2}(T_{\lambda\mu} - T_{\mu\lambda})$  é anti-simétrico. O número de componentes independentes de um tensor simétrico  $T_{\lambda\mu}$  é igual

$$\frac{n(n+1)}{2}, \quad (2.7)$$

enquanto um tensor anti-simétrico de mesma ordem tem

$$\frac{n(n-1)}{2} \quad (2.8)$$

componentes independentes.

É possível construir um novo tensor por diferenciação de outro. Para isso, faz-se uso da conexão afim  $\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}$ , uma quantidade que possui, em geral,  $n^3$  componentes independentes e não se transforma como um tensor. Um importante teorema é válido para conexões simétricas, as quais satisfazem a  $\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} = \Gamma^\alpha_{\mu\lambda}$ . Esse teorema, que será importante na próxima seção na discussão do Princípio da Equivalência, tem o seguinte enunciado:

*Seja  $\Gamma^\alpha_{\lambda\mu}$  uma conexão simétrica que possui em um ponto  $P$ , em um sistema de coordenadas  $x^\mu$ , os valores  $(\Gamma^\alpha_{\lambda\mu})_P$  para as suas componentes. Então, é sempre possível escolher uma transformação  $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$  tal que  $(\Gamma^\alpha_{\lambda\mu})_P = 0$ .*

Pode-se definir a derivada covariante do tensor  $a_\lambda$  como sendo o tensor

$$a_{\lambda;\mu} = a_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\rho}_{\lambda\mu} a_\rho, \quad (2.9)$$

onde  $a_{\lambda,\mu} \equiv \frac{\partial a_\lambda}{\partial x^\mu}$ . Por sua vez, a derivada covariante de um tensor  $a^\lambda$  é igual a

$$a^{\lambda}{}_{;\mu} = a^{\lambda}{}_{,\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\mu} a^\rho. \quad (2.10)$$



No caso geral de um tensor de ordem  $(p, q)$ , teremos a derivada covariante

$$\begin{aligned} T^{\lambda\mu\dots}{}_{\nu\rho\dots\sigma} &= T^{\lambda\mu\dots}{}_{\nu\rho\dots\sigma} + \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\sigma} T^{\alpha\mu\dots}{}_{\nu\rho\dots} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma} T^{\lambda\alpha\dots}{}_{\nu\rho\dots} + \dots \\ &\quad - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\sigma} T^{\lambda\mu\dots}{}_{\alpha\rho\dots} - \Gamma^{\alpha}{}_{\rho\sigma} T^{\lambda\mu\dots}{}_{\nu\alpha\dots} - \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

A diferença de dois vetores é novamente um vetor, desde que os dois vetores sejam dados no mesmo ponto. Porém, a conexão  $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$  permite definir a derivada covariante  $a_{\mu;\nu}$ , que é um tensor. O significado deste fato é que, com a ajuda de  $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ , pode-se determinar um vetor no ponto  $P'$  que deve ser considerado como equivalente ao vetor  $a_{\mu}$  dado em  $P$ . Assim, a conexão permite definir o transporte do vetor  $a_{\mu}$  do ponto  $P$  ao ponto vizinho  $P'$ . Essa operação é chamada de transporte paralelo.

O resultado do transporte paralelo de um vetor, de um ponto  $P$  para outro ponto  $Q$  ao longo de uma curva, dependerá não apenas dos pontos  $P$  e  $Q$ , mas também da curva que conecta os dois pontos. Existe, no entanto, um caso especial no qual se  $a^{\mu}$  é tangente à curva em  $P$ , será tangente à curva em  $Q$ , qualquer que seja o ponto  $Q$  da curva. Neste caso, chamamos a curva de geodésica do espaço.

A forma geral da equação diferencial de uma geodésica é

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = f(\lambda) \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}, \quad (2.12)$$

sendo  $\lambda$  algum parâmetro que suporemos ser um escalar. Pode-se obter uma forma mais simples para a equação da geodésica, usando-se uma classe particular de parâmetro chamado de parâmetro afim. Ele desempenha nesses espaços o mesmo papel que o intervalo no espaço de Minkowski. Então, se  $\sigma$  é um parâmetro afim, a equação da geodésica fica

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\sigma^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{d\sigma} \frac{dx^{\beta}}{d\sigma} = 0. \quad (2.13)$$

Pode-se definir o tensor de curvatura do espaço, o qual é dado por

$$R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu,\mu} + \Gamma^\beta{}_{\lambda\nu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\mu} - \Gamma^\beta{}_{\lambda\mu}\Gamma^\alpha{}_{\beta\nu}. \quad (2.14)$$

Esse tensor é anti-simétrico em  $\mu$  e  $\nu$ :

$$R^\alpha{}_{\lambda\mu\nu} = -R^\alpha{}_{\lambda\nu\mu}. \quad (2.15)$$

Como o tensor de curvatura é de ordem  $(1,3)$ , pode-se construir contrações dele. Elas são as seguintes:

$$R^\lambda{}_{\lambda\mu\nu} = A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}, \quad (2.16)$$

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\lambda} = R_{\mu\nu}. \quad (2.17)$$

Nenhuma outra contração existe em um espaço que não possui métrica.

Denominamos de espaço métrico aquele espaço em que existe uma prescrição atribuindo uma distância escalar a cada par de pontos vizinhos. Um espaço Riemanniano, por sua vez, é um espaço métrico no qual a distância entre pontos vizinhos é dada pela expressão

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (2.18)$$

O tensor  $g_{\mu\nu}$  é chamado de tensor métrico ou simplesmente de métrica do espaço Riemanniano. Em geral, as componentes de  $g_{\mu\nu}$  são funções arbitrárias das coordenadas, porém, para os espaços Euclidiano e de Minkowski, que são casos particulares de espaços Riemannianos, as componentes de  $g_{\mu\nu}$  são constantes. É interessante observar ainda que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é simétrico. Em espaços Riemannianos, a distinção fundamental entre tensores contravariantes e covariantes não existe, pois a métrica pode subir ou descer índices:

$$a_\mu = g_{\mu\nu}a^\nu \text{ e } a^\mu = g^{\mu\nu}a_\nu. \quad (2.19)$$

Pode-se mostrar também que a métrica é covariantemente constante, ou seja,

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0. \quad (2.20)$$

Em uma geometria Riemanniana, as componentes da conexão  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$  recebem o nome de símbolos de Christoffel, que são dados por

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(-g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu}), \quad (2.21)$$

com  $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$ . Com o auxílio dos símbolos de Christoffel, pode-se escrever a equação da geodésica

$$\frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds} = 0, \quad (2.22)$$

tendo-se agora o comprimento  $s$ , dado por (2.18), como um parâmetro afim da geodésica. As geodésicas de um espaço Riemanniano possuem a propriedade, que as distingue das outras linhas conectando dois pontos vizinhos, de terem o comprimento máximo ou mínimo.

Em espaços de Riemann, o tensor de curvatura, equação (2.14), é conhecido como tensor de Riemann. Ele é o único tensor que pode ser construído com a métrica e suas 1ª e 2ª derivadas e que é linear nas derivadas segundas. O número de componentes independentes do tensor de Riemann será igual a 20, em virtude dele possuir as seguintes simetrias

$$R^{\rho}_{[\lambda\mu\nu]} = 0, \quad (2.23)$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = -R_{\alpha\lambda\nu\mu}, \quad (2.24)$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\alpha\mu\nu}, \quad (2.25)$$

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\lambda}. \quad (2.26)$$

A única contração não nula do tensor de Riemann é

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.27)$$

que é chamado de tensor de Ricci. Este tensor é simétrico, possuindo 10 componentes independentes em um espaço de quatro dimensões ( $n = 4$ ), de acordo com a equação (2.7). Com a métrica, pode-se contrair o tensor de Ricci

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = R^{\nu}{}_{\nu} = R, \quad (2.28)$$

obtendo-se o escalar de curvatura  $R$ .

A combinação

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.29)$$

é conhecida como tensor de Einstein, o qual tem a divergência nula, isto é,

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.30)$$

### 2.3 ORIGENS DA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

A teoria de Newton da gravitação teve grande sucesso, sobretudo quando aplicada ao estudo do movimento planetário. Porém, ela está fora de um esquema relativístico, uma vez que incorpora conceitos como o tempo absoluto, isto é, admite uma interação instantânea.

Para construir uma teoria relativística da gravitação, Einstein elaborou o chamado "Princípio da Equivalência", que estabelece (PAPAPETROU, 1974):

*"Forças gravitacionais e inerciais são completamente equivalentes do ponto de vista físico, isto é, elas têm a mesma natureza e é impossível distinguí-las por meio de qualquer experimento".*

Assim, a distinção existente na Física Clássica entre sistemas de referência inerciais e não-inerciais, onde os sistemas não-inerciais são considerados "anômalos" uma vez que surgem neles forças inerciais que não têm causa física, é superada porque um sistema não-inercial pode ser considerado como um sistema em repouso, em relação ao qual existe um campo de gravitação. Logo, todos os sistemas de referência devem ser considerados igualmente válidos para a descrição dos fenômenos físicos. Porém, nos ditos sistemas de referência não-inerciais, ocorrem efeitos de geometrias não-Euclidianas, como se deduz, por exemplo, do seguinte comentário de Einstein (EINSTEIN, 1984):

*"Seja  $K'$  um sistema de coordenadas cujo eixo coincide com o eixo  $z$  de um sistema  $K$ , e gira com um movimento de rotação de velocidade angular constante em volta deste eixo. Estarão as configurações de corpos rígidos, em repouso relativamente a  $K'$ , de acordo com as leis da geometria Euclidiana? Visto que  $K'$  não é um sistema inercial, não conhecemos diretamente as leis de configuração dos corpos rígidos relativamente a  $K'$ , nem, em geral, as leis da natureza. Conhecemos no entanto bem estas leis relativamente ao sistema inercial  $K$ , e podemos portanto inferir a sua forma relativamente a  $K'$ . Consideremos um círculo com o centro na*

origem e no plano  $x'y'$  de  $K'$ , e um dos seus diâmetros. Imaginemos ainda que dispomos de um grande número de réguas rígidas, iguais umas às outras, e que as dispomos não só ao longo da periferia, como também ao longo do referido diâmetro, em repouso relativamente a  $K'$ . Se for  $U$  o número destas réguas ao longo da periferia, e  $D$  o número ao longo do diâmetro, sabemos que seria, no caso de não haver rotação de  $K'$  relativamente a  $K$ :

$$\frac{U}{D} = \pi.$$

Mas, dado o movimento de rotação, o resultado será diferente. Suponhamos que, num dado instante  $t$  de  $K$ , nós determinamos as posições de todas as réguas. Relativamente a  $K$  todas as réguas ao longo da periferia sofrem a contração de Lorentz, mas as que estão dispostas sobre o diâmetro não sofrem tal contração (no sentido do seu comprimento). Daqui resulta que

$$\frac{U}{D} > \pi.$$

Logo, as leis de configuração dos corpos rígidos relativamente a  $K'$  não concordam com as leis de configuração dos corpos rígidos que são conformes com a geometria Euclidiana”.

Dessa forma, a conclusão de Einstein foi de que o campo de gravitação exerce uma influência e, de fato, determina a geometria do espaço, que não pode ser mais a geometria Euclidiana. Em termos da teoria da Relatividade Especial (EINSTEIN, 1999), tem-se que, na presença de um campo gravitacional, a geometria do espaço-tempo deixa de ser a geometria de Minkowski de um espaço plano para se tornar a geometria de um espaço curvo de Riemann com métrica  $g_{\mu\nu}$ .

Einstein considerou ainda que a equação de movimento para partículas materiais, sob a ação de um campo gravitacional, seria dada pela equação da geodésica, equação (2.22), de modo que o termo

$$-\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \frac{dx^{\alpha}}{ds} \frac{dx^{\beta}}{ds}, \quad (2.31)$$

corresponde à aceleração gravitacional experimentada pela partícula. De acordo com o teorema da seção anterior, esta aceleração gravitacional pode ser anulada localmente por uma escolha apropriada do sistema de referência, como, por exemplo, um elevador em queda livre em um campo gravitacional.

Uma consequência imediata pode ser obtida se considerarmos um elevador em queda livre nas vizinhanças da Terra. Se um raio de luz é emitido, o observador no interior do elevador assegura que o raio segue a trajetória retilínea *a*, indicada na figura a seguir, pois ele pode se considerar em um sistema inercial em repouso. Porém, um observador na Terra dirá que o raio segue a trajetória *b*, uma vez que é necessário um intervalo de tempo para o raio ir de um lado ao outro do elevador em queda, de modo que ao chegar do outro lado o raio terá percorrido uma trajetória curva. Assim, um raio de luz deve ser defletido em um campo gravitacional.

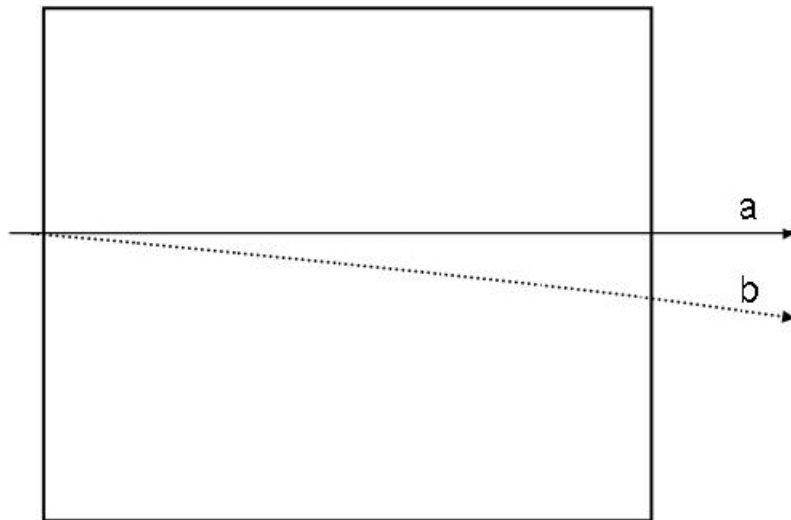


Figura 2.1: Deflexão da luz. Figura editada, retirada de Papapetrou (1974)

## 2.4 EQUAÇÕES DE CAMPO

Para estabelecer as equações de campo da sua teoria gravitacional, Einstein considerou equações que deveriam se reduzir à equação da teoria Newtoniana da gravitação em um limite apropriado, de maneira a prever os resultados já comprovados para o movimento planetário.

A equação de campo Newtoniana é

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (2.32)$$

onde  $\Phi$  é o potencial gravitacional,  $\rho$  a densidade de massa e  $G$  é a constante gravitacional de Newton. Para proceder a generalização relativística, deve-se fixar uma relação entre o conteúdo material existente em uma região do espaço e a geometria do espaço nesse mesmo local. O conteúdo material será representado pelo tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$ , termo que deve ficar do lado direito das novas equações, em analogia com (2.32). No lado esquerdo deve-se ter, entre as quantidades geométricas possíveis, derivadas segundas da métrica  $g_{\mu\nu}$ , a qual faz também o papel de potencial gravitacional. O tensor que satisfaz os requisitos esperados é o tensor de Einstein, dado por (2.29). Assim, as equações de campo devem ser do tipo

$$G_{\mu\nu} \propto T_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

Através do princípio variacional (ADLER, 1975)

$$\delta \int [R - 8\pi GL] \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (2.34)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura,  $L$  a densidade Lagrangiana de matéria e  $g$  o determinante de  $g_{\mu\nu}$ , as equações de campo gravitacional da teoria da Relatividade Geral são encontradas:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$



onde  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  e  $c$  é a velocidade da luz. Deve-se notar que a conservação da energia e momento são obedecidas pois, com a equação (2.30), segue-se de (2.35) que  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$ . Também, pode-se escrever as equações de Einstein como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Adicionalmente, uma forma alternativa pode ser obtida se contraírmos a equação (2.36)

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu},$$

e usarmos que  $T = T^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$  é o traço do tensor energia-momento,  $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = \delta^\mu{}_\mu = \delta^0_0 + \delta^1_1 + \delta^2_2 + \delta^3_3 = 4$ . Então,

$$R - 2R = \frac{8\pi G}{c^4}T$$

$$R = -\frac{8\pi G}{c^4}T. \quad (2.37)$$

Substituindo (2.37) em (2.36) e rearrumando os termos, vem que

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right]. \quad (2.38)$$

Essa é a forma alternativa das equações de Einstein (2.36).

## 2.5 APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

Neste seção, obteremos as equações de campo da Relatividade Geral na aproximação de campo fraco. Em tal campo, a métrica do espaço-tempo é “quase” a do espaço-tempo plano, de modo que podemos escolher um sistema de referência onde

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.39)$$

sendo  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  a métrica de Minkowski e  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ . Desprezando as potências de  $h_{\alpha\beta}$  superiores à de primeira ordem, vamos escrever o tensor de Riemann como (LANDAU, 1996)

$$R_{\gamma\alpha\delta\beta} = \frac{1}{2} (h_{\gamma\beta,\alpha,\delta} + h_{\alpha\delta,\gamma,\beta} - h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} - h_{\gamma\delta,\alpha,\beta}). \quad (2.40)$$

Na mesma aproximação, o tensor de Ricci fica

$$R_{\alpha\beta} = R^{\delta}_{\alpha\delta\beta} = g^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta} = \eta^{\gamma\delta} R_{\gamma\alpha\delta\beta},$$

pois  $g^{\gamma\delta} = \eta^{\gamma\delta} - h^{\gamma\delta}$ . E ainda,

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( -\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + h^{\gamma}_{\alpha,\beta,\gamma} + h^{\gamma}_{\beta,\alpha,\gamma} - h_{,\alpha,\beta} \right), \quad (2.41)$$

onde  $h = h^{\gamma}_{\gamma}$ . Então, na aproximação de campo fraco, as equações de Einstein (2.36) ficam iguais a

$$\left( -\eta^{\gamma\delta} h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + h^{\gamma}_{\alpha,\beta,\gamma} + h^{\gamma}_{\beta,\alpha,\gamma} - h_{,\alpha,\beta} \right) - \eta_{\alpha\beta} R = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (2.42)$$

onde  $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ .

É possível escolher arbitrariamente quatro das dez componentes do tensor métrico  $g_{\alpha\beta}$ , o que significa impor aos  $h_{\alpha\beta}$  quatro condições arbitrárias (LANDAU, 1996). Um conjunto de

condições geralmente utilizado é o das condições harmônicas (também chamado de “gauge” harmônico). As condições harmônicas são dadas pelas equações

$$\left( h^\alpha_\beta - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta h \right)_{,\alpha} = 0, \quad (2.43)$$

ou seja,

$$h^\alpha_{\beta,\alpha} - \frac{1}{2} \delta^\alpha_\beta h_{,\alpha} = 0 = h^\delta_{\beta,\delta} - \frac{1}{2} \delta^\delta_\beta h_{,\delta}.$$

E daí,

$$h^\delta_{\beta,\delta,\alpha} - \frac{1}{2} \delta^\delta_\beta h_{,\delta,\alpha} = 0$$

$$h^\delta_{\beta,\alpha,\delta} - \frac{1}{2} h_{,\alpha,\beta} = 0. \quad (2.44)$$

Ainda, a equação do gauge harmônico também pode ser escrita como

$$h^\delta_{\alpha,\delta} - \frac{1}{2} \delta^\delta_\alpha h_{,\delta} = 0.$$

Portanto,

$$h^\delta_{\alpha,\delta,\beta} - \frac{1}{2} \delta^\delta_\alpha h_{,\delta,\beta} = 0$$

$$h^\delta_{\alpha,\beta,\delta} - \frac{1}{2} h_{,\alpha,\beta} = 0. \quad (2.45)$$

Somando-se (2.44) e (2.45), tem-se

$$h^\delta_{\beta,\alpha,\delta} + h^\delta_{\alpha,\delta,\beta} - h_{,\alpha,\beta} = 0. \quad (2.46)$$

Agora, levando (2.46) em (2.42), encontramos que

$$\eta^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} + \eta_{\alpha\beta}R = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}. \quad (2.47)$$

Por sua vez, o produto  $\eta^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta,\gamma,\delta}$  fica

$$\begin{aligned} \eta^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} &= \eta^{00}h_{\alpha\beta,0,0} + \eta^{11}h_{\alpha\beta,1,1} + \eta^{22}h_{\alpha\beta,2,2} + \eta^{33}h_{\alpha\beta,3,3} \\ \eta^{\gamma\delta}h_{\alpha\beta,\gamma,\delta} &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial t^2} + \nabla^2 h_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

sendo o índice 0 relacionado à coordenada temporal e os índices 1,2 e 3 relacionados às coordenadas espaciais. Logo, (2.47) torna-se

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)h_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}R = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}. \quad (2.48)$$

Usando (2.37), obtemos finalmente as equações de campo fraco da teoria da Relatividade Geral

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)h_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4}\left[T_{\alpha\beta} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2}T\right]. \quad (2.49)$$

Nesta equação, uma vez que o conteúdo material seja conhecido, pode-se determinar  $h_{\alpha\beta}$  e daí a métrica  $g_{\alpha\beta}$  do espaço-tempo.

Retornando para a equação (2.48) e considerando o caso estático, fica-se com

$$\nabla^2 h_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta}R = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\alpha\beta}. \quad (2.50)$$

Porém,

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \eta^{00}R_{00} + \eta^{11}R_{11} + \eta^{22}R_{22} + \eta^{33}R_{33}$$

$$R = -R_{00} + R_{11} + R_{22} + R_{33}$$

$$R = -\frac{1}{2}\nabla^2[-h_{00} + h_{11} + h_{22} + h_{33}],$$

pois

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{\alpha\beta}.$$

Assim,

$$R = -\frac{1}{2}\nabla^2 [h^0_0 + h^1_1 + h^2_2 + h^3_3] = -\frac{1}{2}\nabla^2 h. \quad (2.51)$$

Colocando a equação (2.51) na equação (2.50), e definindo  $\bar{h}_{\alpha\beta} \equiv h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h$ , obtém-se a equação de campo fraco no caso em que a métrica seja independente do tempo

$$\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (2.52)$$

## 2.6 APROXIMAÇÃO NEWTONIANA

Podemos, a partir da equação de campo fraco (2.49), tomar o chamado limite Newtoniano da Relatividade Geral, que corresponde a mostrar que é possível obter a equação (2.32) a partir das equações da Relatividade Geral.

Além da hipótese de campo fraco, deve-se supor que a única componente não nula do tensor energia-momento é  $T^0_0 = -\rho c^2$ , sendo  $\rho$  a densidade de massa da distribuição de matéria. Portanto, o traço do tensor energia-momento é

$$T = T^\beta_\beta = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 = T^0_0 = -\rho c^2. \quad (2.53)$$

E ainda,

$$T^0_0 = \eta^{00} T_{00} = -T_{00}. \quad (2.54)$$

A única equação relevante a partir de (2.49) será aquela em que  $\alpha = \beta = 0$ . Assim, com a hipótese que a métrica não varie apreciavelmente com o tempo, tem-se de (2.49) que

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left( T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T \right). \quad (2.55)$$

Utilizando-se (2.53) e (2.54), segue que

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{8\pi G}{c^2} \rho$$

$$\nabla^2 \left( -\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) = 4\pi G \rho. \quad (2.56)$$

Agora, como (LANDAU, 1996)

$$g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2} = -1 + h_{00},$$

onde  $\Phi$  é o potencial Newtoniano, temos que

$$-\frac{c^2 h_{00}}{2} = \Phi. \quad (2.57)$$

Desta forma, substituindo (2.57) em (2.56), recaímos na equação de campo da teoria gravitacional de Newton

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.58)$$

mostrando que a teoria da Relatividade Geral possui o limite Newtoniano correto, sendo capaz de recuperar os resultados básicos relativos ao movimento planetário.

## 2.7 COMENTÁRIOS

Tendo sido concebida por Einstein em 1915 (LORENTZ, 2001), a teoria da Relatividade Geral vem obtendo sucesso em suas previsões sobre os fenômenos gravitacionais, sendo a teoria padrão de gravitação de que dispomos (WILL, 2005). A teoria também é a base para a Cosmologia, área que está em franca evolução frente às possibilidades de testes experimentais (WEINBERG, 2008). Na sequência, comentaremos alguns dos testes experimentais a que a teoria de Einstein vem sendo submetida ao longo dos anos.

O Princípio da Equivalência, que estabelece a indistinguibilidade entre as forças gravitacionais e inerciais, tem como evidência experimental o fato de que corpos de diferentes composições, caindo em um campo gravitacional externo, devem cair com a mesma aceleração. Uma medida da diferença fracional nas acelerações  $a_1$  e  $a_2$  de dois corpos em queda em um campo gravitacional é definida como

$$\eta = \frac{2|a_1 - a_2|}{|a_1 + a_2|}, \quad (2.59)$$

chamada de razão de Eötvös. O melhor limite sobre  $\eta$  é (BAESSLER, 1999; WILLIAMS, 1996)

$$\eta < 4 \times 10^{-13}. \quad (2.60)$$

O primeiro sucesso da Relatividade Geral foi a explicação do efeito de precessão do periélio da órbita de Mercúrio. Esse efeito, da ordem de 43 segundos de arco por século, não era explicado pela teoria de Newton. Sempre que o planeta Mercúrio chega, em sua órbita, ao ponto de maior aproximação do Sol, esse ponto vai mudando de lugar em relação à órbita anterior e lentamente fazendo um movimento de rotação, o qual é chamado de precessão (ver Figura 2.2). É interessante notar que Einstein desenvolveu a sua teoria de gravitação com considerações de ordem geral. Após ter concluído a teoria, ele pode aplicá-la e conseguiu obter o valor de cerca 43 segundos de arco por século para o avanço do periélio de Mercúrio. A previsão da

Relatividade concorda com a observação com uma discrepância de  $3 \times 10^{-3}$  (WILL, 2005).

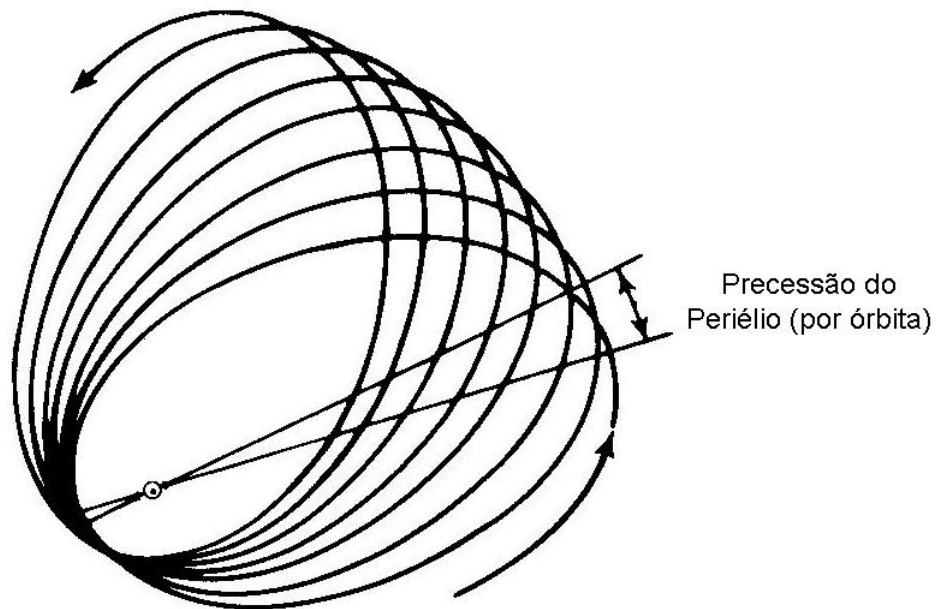


Figura 2.2: Órbita planetária com a precessão do periélio. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).

Como vimos, a luz deve ser defletida ao passar em uma região em que exista um campo gravitacional. Esse efeito foi verificado pela primeira vez em 1919, durante um eclipse solar, por equipes sob o comando do astrônomo inglês Arthur Eddington, uma delas na cidade de Sobral, no Brasil, e outra na África. Eles fotografaram estrelas próximas ao Sol durante o eclipse. Essa mesma região do céu foi fotografada meses depois e a comparação entre as fotos comprovou a deflexão da luz (ver Figura 2.3), em acordo com a previsão de Einstein. A teoria de Newton também prevê uma deflexão da luz, mas com um valor igual a metade do valor da Relatividade Geral. A precisão do experimento foi capaz de verificar essa diferença, e o triunfo da teoria de Einstein o fez tornar-se conhecido mundialmente. Atualmente, a diferença entre a previsão de Einstein e o valor observado em experiências de deflexão da luz é de  $3 \times 10^{-4}$  (SHAPIRO, 2004).



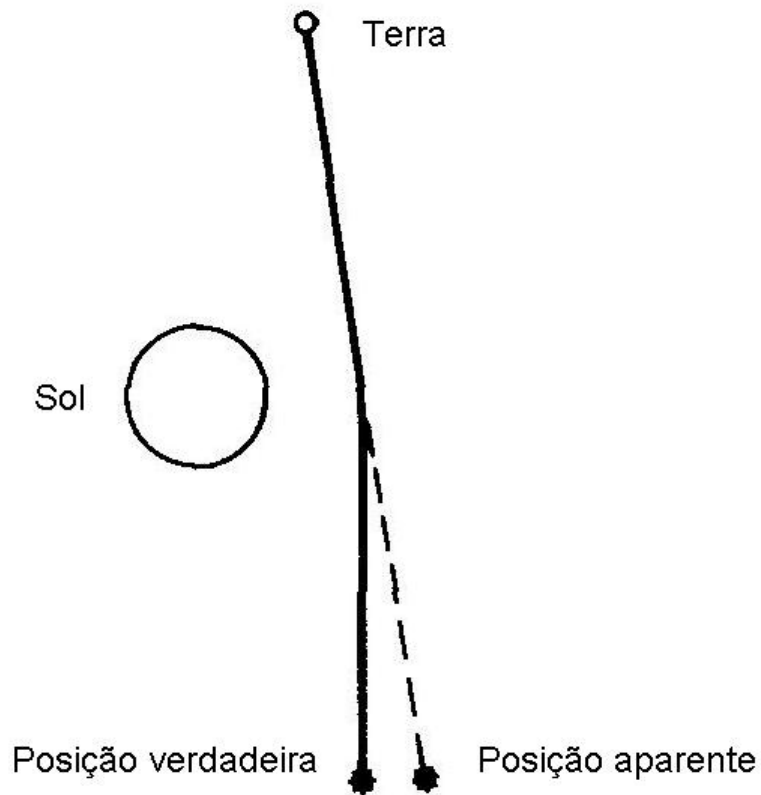


Figura 2.3: Mudança aparente na posição da estrela devido à deflexão da luz. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).

A deflexão da luz é um efeito do campo gravitacional sobre o formato da trajetória do raio. Porém, o desenvolvimento das técnicas eletrônicas e de radares permitiu a medição de efeitos do campo gravitacional sobre o tempo gasto por um raio de luz para percorrer uma trajetória. Nesse sentido, Shapiro (1964) propôs um teste para medir o atraso do tempo que um sinal de radar teria ao ser emitido da Terra até um outro planeta e retornar. As medidas mais recentes do atraso do tempo de Shapiro, feitas pela sonda Cassini, indicam uma discrepância entre o valor teórico da Relatividade Geral e o valor observado de  $2,3 \times 10^{-5}$  (BERTOTTI, 2003). Na figura a seguir, a linha tracejada é a trajetória verdadeira seguida pelo sinal, enquanto que a linha reta indica a trajetória aproximada.

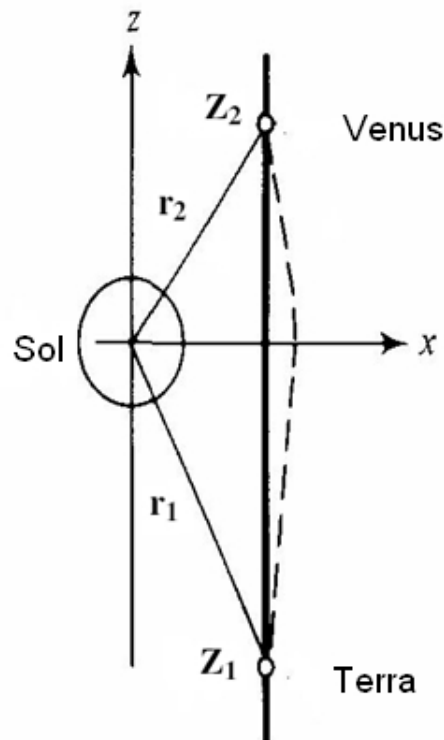


Figura 2.4: Trajetória de um sinal de luz entre a Terra e um planeta. Figura editada, retirada de Ohanian (1976).

Uma outra verificação importante das previsões da Relatividade Geral, que serve de evidência indireta da existência de ondas gravitacionais, ocorre em relação ao pulsar binário PRS 1913+16, descoberto por Taylor e Hulse em 1974 (WILL, 2005). A análise da órbita do pulsar em torno de sua companheira sugere que o sistema está perdendo energia sob a forma de radiação gravitacional, de modo que os cálculos realizados com a Relatividade Geral indicam com grande precisão a variação da órbita observada. A razão entre a taxa de decréscimo do período do pulsar prevista pela teoria de Einstein,  $\dot{P}_b^{RG}$ , e a taxa observada  $\dot{P}_b^{OBS}$  é

$$\dot{P}_b^{RG} / \dot{P}_b^{OBS} = 1,0013 \pm 0,0021, \quad (2.61)$$

que é um excelente valor, tendo em conta que essa foi a primeira verificação para um objeto fora do sistema solar e em uma situação de campo gravitacional forte.

Para finalizar, vamos mencionar o interessante fenômeno das lentes gravitacionais, que é o resultado da deflexão da luz ao passar nas vizinhanças de um corpo de massa  $M$ , colocado entre a fonte  $F$  e o observador  $O$  (ver figura a seguir). Na figura 2.5, temos a formação do Anel de Einstein, detectado pela primeira vez no final da década de 80 do século passado (HEWITT, 1988). Um observador na Terra pode verificar a formação de imagens múltiplas que correspondem a uma mesma estrela. É possível inferir o valor da massa  $M$ , que pode representar uma galáxia ou um aglomerado de galáxias, a partir da análise das imagens múltiplas formadas pela lente gravitacional. A comparação do valor dessa massa com o valor obtido através de outros métodos, que levam em conta a luminosidade, pode levar à conclusão de que existe uma quantidade de matéria não visível na região, a qual tem sido chamada de matéria escura (KNEIB, 1993; SCHNEIDER, 1996).

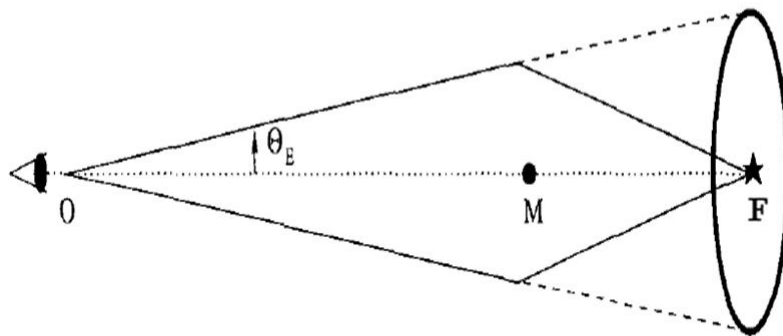


Figura 2.5: Anel de Einstein. Figura editada, retirada de Mollerach (2002).

### 3 A TEORIA DE BRANS-DICKE

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Faremos uma breve apresentação da teoria gravitacional de Brans-Dicke, mencionando alguns aspectos relacionados com a sua origem e algumas de suas características. Exibiremos as equações de campo da teoria, ressaltando a participação do campo escalar  $\phi$ , o qual é diretamente ligado com a variação da "constante"  $G$  de Newton. Na sequência, reduziremos as equações de campo exatas para as equações de campo na aproximação linear, equações estas que serão bastante úteis, tendo em vista as aplicações que serão desenvolvidas nos capítulos que se seguem. Para finalizar, mostraremos como o limite Newtoniano é obtido na teoria de Brans-Dicke.

#### 3.2 A TEORIA DE BRANS-DICKE

Forças de longo alcance podem ser transmitidas, de um modo geral, por um campo tensorial  $g_{\mu\nu}$  e por um campo vetorial do tipo do potencial eletromagnético  $A_\mu$  (WEINBERG, 1972). É natural, então, suspeitar que outras forças de longo alcance possam ser produzidas através de campos escalares. De fato, Jordan (1955) foi o primeiro a desenvolver uma teoria da gravitação na qual  $G$ , a constante gravitacional de Newton, seria variável; mais especificamente, função de um campo escalar. A sua teoria foi, no entanto, criticada entre outras coisas por conter um tensor energia-momento com divergência não nula (FIERZ, 1956).

Anos depois, Brans e Dicke (BRANS, 1961) propuseram uma teoria onde o campo era representado pelo campo métrico e por um campo escalar relacionado com  $G$ , semelhantemente

à teoria de Jordan, mas evitando os problemas desta. Basicamente, eles consideraram que a relação numérica

$$\frac{GM}{c^2 R_V} \sim 1, \quad (3.1)$$

num universo em expansão uniforme, onde  $M$  é uma estimativa da massa do universo visível e  $R_V$  o raio da sua fronteira (ADLER, 1975), sugeriria a variação temporal da “constante gravitacional de Newton”. É interessante observar que o ponto de partida para Brans e Dicke foi o Princípio de Mach, que pode ser enunciado da seguinte forma:

*“O único movimento que tem significado é aquele relativo ao resto da matéria no Universo, e a reação inercial experimentada em um laboratório acelerado relativamente à matéria do Universo pode ser interpretada equivalentemente como uma força gravitacional agindo sobre um laboratório fixo devido à presença da matéria distante acelerada.”*

Segundo Brans e Dicke, esse princípio não é completamente incorporado na teoria da Relatividade Geral, e a forma de incorporá-lo em uma teoria de gravitação seria considerar um campo escalar  $\phi$  em adição à métrica  $g_{\mu\nu}$ . O desenvolvimento dessas idéias permitiu a determinação das equações de campo da teoria de Brans-Dicke (BRANS, 1961) através da generalização do princípio variacional da Relatividade Geral

$$\delta \int [R - 8\pi GL] \sqrt{-g} d^4x = 0, \quad (3.2)$$

onde  $R$  é o escalar de curvatura e  $L$  a densidade Lagrangiana de matéria.

A equação (3.1) sugere a expressão simbólica  $G^{-1} \sim \sum_i (m_i / r_i c^2)$ , onde a soma é sobre toda a matéria que poderia contribuir para a reação inercial, e  $r_i$  a distância da partícula material até o ponto onde o valor de  $G$  estaria sendo calculado. Desta forma, é razoável identificar  $G^{-1}$  com  $\phi$ , sendo  $\phi$  um campo escalar. Dividindo-se (3.2) por  $G$  e colocando a expressão para  $G(\phi)$  como  $\frac{1}{\phi}$ , vem

$$\delta \int \left[ \phi R - 8\pi L - \frac{\omega \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha}}{\phi} \right] \sqrt{-g} d^4x = 0. \quad (3.3)$$

O terceiro termo é a densidade Lagrangiana usual para o campo escalar; o fator  $\phi$  que aparece no denominador é para permitir que a constante de acoplamento  $\omega$  seja adimensional.

Para se encontrar as equações de campo, deve-se fazer a variação de (3.3) em relação às variáveis  $\phi$  e  $g_{\mu\nu}$ . Fazendo-se então esta variação, são obtidas as equações de campo da teoria de Brans-Dicke (ADLER, 1975):

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left( \phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{,\alpha} \phi^{,\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (3.4)$$

$$\square \phi = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3)c^4}, \quad (3.5)$$

onde  $\square \phi = \phi^{,\sigma}_{;\sigma} = g^{\sigma\gamma} \phi_{,\gamma;\sigma}$ ,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento associado ao conteúdo material e  $T$  o seu traço. O campo escalar  $\phi$  não tem influência direta sobre o movimento da matéria, de modo que o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  tem divergência nula. O valor de  $\omega$ , a constante de acoplamento do campo escalar com a geometria, não é determinado pela teoria devendo ser fixado *a posteriori*. A partir de observações experimentais, este valor é atualmente estimado em 40.000 (BERTOTTI, 2003).

Na teoria de Brans-Dicke, as equações de movimento das partículas sob a influência do campo métrico externo são as equações das geodésicas. O papel do campo escalar é contribuir para a determinação da métrica, mas uma vez que  $g_{\mu\nu}$  é determinado, tudo se passa como na teoria da Relatividade Geral em relação ao movimento dos corpos.

### 3.3 FORMA ALTERNATIVA DAS EQUAÇÕES DE CAMPO DE BRANS-DICKE

Vamos obter uma forma alternativa para as equações de campo de Brans-Dicke. Então, lembrando-se que o tensor de Einstein é  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ , pode-se obter de (3.4) que

$$g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi c^4}g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{\phi}(g^{\mu\nu}\phi_{,\mu;\nu} - g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}\square\phi),$$

ou seja,

$$R - \frac{1}{2} \cdot 4R = \frac{8\pi}{\phi c^4}T + \frac{\omega}{\phi^2}(\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} - \frac{1}{2} \cdot 4\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{\phi}(\square\phi - 4\square\phi)$$

$$R = -\frac{8\pi}{\phi c^4}T + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} + \frac{3}{\phi}\square\phi. \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.4), obtém-se após rearranjar os termos

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4}(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T) + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\frac{\square\phi}{\phi} + \frac{1}{\phi}\phi_{,\mu;\nu}. \quad (3.7)$$

Agora, levando-se (3.5) em (3.7), vem que

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left( \frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{\phi}\phi_{,\mu;\nu}. \quad (3.8)$$

O conjunto de equações (3.8) e (3.5) constitui uma forma alternativa das equações de campo da teoria de Brans-Dicke.

### 3.4 AS EQUAÇÕES DE BRANS-DICKE NA APROXIMAÇÃO DE CAMPO FRACO

Como na Relatividade Geral, na aproximação de campo fraco vamos admitir que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (3.9)$$

e, adicionalmente, que

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon = \phi_0 \left( 1 + \frac{\varepsilon}{\phi_0} \right), \quad (3.10)$$

sendo  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ,  $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ ,  $\phi_0$  uma constante, e  $\varepsilon$  um termo de primeira ordem na densidade de energia, de modo que  $|\varepsilon/\phi_0| \ll 1$ . Desse modo, apenas os termos de primeira ordem em  $h_{\mu\nu}$  e  $\varepsilon$  serão mantidos. Colocando-se as condições (3.9) e (3.10) nas equações (3.8) e (3.5), temos

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi}{\phi_0 c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left( \frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) T \right] + \frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0}, \quad (3.11)$$

$$\square \varepsilon = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3) c^4}, \quad (3.12)$$

onde,

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (-\eta^{\beta\gamma} h_{\mu\nu,\beta,\gamma} + h_{\mu,\nu,\beta}^{\beta} + h_{\nu,\mu,\beta}^{\beta} - h_{,\mu,\nu}) \quad (3.13)$$

é o tensor de Ricci em primeira aproximação (MISNER, 1973) e deve-se notar que

$$\square \phi = g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha;\beta} = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\phi_{,\alpha})_{;\beta}$$

$$\square \phi = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\varepsilon_{,\alpha})_{;\beta} = (\eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}) (\varepsilon_{,\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \varepsilon_{,\lambda})$$



$$\square\phi = \eta^{\alpha\beta}(\varepsilon_{,\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda}\varepsilon_{,\lambda}) = \eta^{\alpha\beta}\varepsilon_{,\alpha,\beta} = \square\varepsilon, \quad (3.14)$$

pois os símbolos de Christoffel são dados por,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(-g_{\alpha\beta,\rho} + g_{\rho\alpha,\beta} + g_{\beta\rho,\alpha}) = \frac{1}{2}(\eta^{\lambda\rho} - h^{\lambda\rho})(-h_{\alpha\beta,\rho} + h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\beta\rho,\alpha})$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}(-h_{\alpha\beta,\rho} + h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\beta\rho,\alpha}). \quad (3.15)$$

Adicionalmente, observemos que

$$\square h_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta}h_{\mu\nu,\alpha,\beta}. \quad (3.16)$$

De maneira que o tensor de Ricci também fica

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-\square h_{\mu\nu} + h_{\mu,\nu,\beta}^{\beta} + h_{\nu,\mu,\beta}^{\beta} - h_{,\mu,\nu}). \quad (3.17)$$

Similarmente à Relatividade Geral, podem-se escolher quatro condições arbitrárias a serem satisfeitas por  $h_{\mu\nu}$ , de maneira a simplificar a equação (3.11). Para isso, utilizaremos o gauge de Brans-Dicke (BRANS, 1961)

$$(h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}h)_{,\mu} = \frac{\varepsilon_{,\nu}}{\phi_0}. \quad (3.18)$$

Daí, tem-se

$$h^{\mu}_{\nu,\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\mu}_{\nu}h_{,\mu} = \frac{\varepsilon_{,\nu}}{\phi_0},$$

ou, de forma equivalente,

$$h^\alpha_{\mu,\alpha} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu h_{,\alpha} = \frac{\varepsilon_{,\mu}}{\phi_0}.$$

Derivando em relação a  $v$  vem,

$$h^\alpha_{\mu,\alpha,v} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu h_{,\alpha,v} = \frac{\varepsilon_{,\mu,v}}{\phi_0}$$

$$h^\alpha_{\mu,v,\alpha} - \frac{1}{2}\delta^\alpha_\mu h_{,\alpha,v} = \frac{\varepsilon_{,\mu,v}}{\phi_0}$$

$$h^\alpha_{\mu,v,\alpha} - \frac{1}{2}h_{,\mu,v} = \frac{\varepsilon_{,\mu,v}}{\phi_0}. \quad (3.19)$$

De modo alternativo, também pode-se escrever

$$h^\alpha_{v,\mu,\alpha} - \frac{1}{2}h_{,v,\mu} = \frac{\varepsilon_{,v,\mu}}{\phi_0}. \quad (3.20)$$

Somando-se (3.19) e (3.20), obtemos

$$h^\alpha_{\mu,v,\alpha} + h^\alpha_{v,\mu,\alpha} - h_{,\mu,v} = 2\frac{\varepsilon_{,\mu,v}}{\phi_0}. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.21) em (3.17), o tensor de Ricci torna-se

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left[-\square h_{\mu\nu} + 2\frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0}\right] = -\frac{\square h_{\mu\nu}}{2} + \frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0}. \quad (3.22)$$

Portanto, (3.11) fica

$$-\frac{\square h_{\mu\nu}}{2} + \frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0} = \frac{8\pi}{\phi_0 c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left( \frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right] + \frac{\varepsilon_{,\mu,\nu}}{\phi_0}. \quad (3.23)$$

Logo,

$$\square h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left( \frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) T \right]. \quad (3.24)$$

Pode-se ainda escrever essa equação de uma forma mais explícita, já que

$$\square h_{\mu\nu} = \eta^{\alpha\beta} h_{\mu\nu,\alpha,\beta} = \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) h_{\mu\nu}.$$

Então, (3.24) e (3.12) são dadas por

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left( \frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) T \right], \quad (3.25)$$

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \varepsilon = \frac{8\pi T}{(2\omega + 3)c^4}. \quad (3.26)$$

Essas são as equações da teoria de Brans-Dicke na aproximação de campo fraco. As equações da Relatividade Geral podem ser obtidas se considerarmos o limite  $\omega \rightarrow \infty$ . Nesse caso,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de acordo com (3.26), e (3.25) assume a forma das equações de campo de Einstein, já obtidas no Capítulo 2:

$$\left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} T \right],$$

onde fez-se a identificação  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\phi_0} = G$ . Portanto, considerando a aproximação de campo fraco, quando  $\omega \rightarrow \infty$  as equações de Brans-Dicke tendem para as equações de Einstein, embora isto não aconteça sempre no caso das equações exatas (ROMERO, 1993; BANERJEE, 1997; FARAONI, 1998).

### 3.5 APROXIMAÇÃO NEWTONIANA NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Na sequência, vamos tomar o limite Newtoniano da teoria de Brans-Dicke, com o objetivo de fixarmos o valor da constante  $\phi_0$  utilizada na aproximação de campo fraco. Supondo-se que os campos não variem apreciavelmente com o tempo, segue-se que (3.25) e (3.26) ficam iguais a

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[ T_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \left( \frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right], \quad (3.27)$$

$$\nabla^2 \varepsilon = \frac{8\pi T}{(2\omega+3)c^4}. \quad (3.28)$$

E ainda, considerando-se que o tensor energia-momento  $T_{\mu\nu}$  é determinado quase que exclusivamente pela densidade  $\rho$  de matéria, segue que  $T \approx T^0_0 = -T_{00} = -\rho c^2$ . De fato, a única equação independente do conjunto (3.27)-(3.28) será

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[ T_{00} - \frac{\eta_{00}}{2} \left( \frac{2\omega+2}{2\omega+3} \right) T \right],$$

e logo,

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{16\pi}{\phi_0 c^4} \left[ \rho c^2 - \left( \frac{\omega+1}{2\omega+3} \right) \rho c^2 \right]$$

$$\nabla^2 h_{00} = -\frac{16\pi\rho}{\phi_0 c^2} \left( \frac{\omega+2}{2\omega+3} \right),$$

que pode-se escrever como

$$\nabla^2 \left( -\frac{c^2 h_{00}}{2} \right) = \frac{4\pi\rho}{\phi_0} \left( \frac{2\omega+4}{2\omega+3} \right).$$

Lembrando que  $g_{00} = -1 - \frac{2\Phi}{c^2}$ , sendo  $\Phi$  o potencial Newtoniano (LANDAU, 1962), e como

$g_{00} = -1 + h_{00}$ , temos que  $-\frac{c^2 h_{00}}{2} = \Phi$ . Então, ficamos com

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \left[ \frac{2\omega + 4}{\phi_0(2\omega + 3)} \right] \rho. \quad (3.29)$$

Comparando (3.29) com a equação de campo da gravitação Newtoniana  $\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho$ , concluimos que

$$\phi_0 = \frac{1}{G} \left( \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right). \quad (3.30)$$

### 3.6 COMENTÁRIOS

Após algumas considerações sobre a origem da teoria de Brans-Dicke, as equações de campo foram apresentadas, tomando-se em seguida o limite de campo fraco da teoria. Na descrição, foi adotado o gauge de Brans-Dicke com o objetivo de fixar os valores arbitrários de  $h_{\mu\nu}$ . Observamos que no limite em que  $\omega \rightarrow \infty$ , as equações de campo fraco da teoria da Relatividade Geral foram recuperadas.

Como aplicação imediata, verificamos o limite Newtoniano da teoria de Brans-Dicke, obtendo a equação de campo da teoria gravitacional de Newton desde que  $\phi_0 = \frac{1}{G} \left( \frac{2\omega + 4}{2\omega + 3} \right)$ . Quando  $\omega \rightarrow \infty$ , vê-se que  $\phi_0 = \frac{1}{G}$ .

Em relação aos testes clássicos de uma teoria gravitacional, a teoria de Brans-Dicke prevê os seguintes resultados, indicados em função dos valores da Relatividade Geral  $V_{RG}$  para cada caso (WILL, 2005)

TESTE	VALOR PREVISTO
Deflexão da Luz	$\left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}\right) \cdot V_{RG}$
Precessão do Periélio de Mercúrio	$\left(\frac{3\omega + 4}{3\omega + 6}\right) \cdot V_{RG}$
Desvio Gravitacional para o Vermelho	$V_{RG}$
Atraso do Tempo	$\left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}\right) \cdot V_{RG}$

**Tabela 1** - Testes clássicos da teoria de Brans-Dicke.

Poucos anos após ser concebida, a teoria de Brans-Dicke passou por um momento de grande excitação quando medidas (DICKE, 1967) pareciam indicar que a contribuição dos termos de momento de quadrupolo para o campo gravitacional do Sol seria maior do que se supunha. Se isso fosse verdade, o valor que não era explicado pela teoria de gravitação de Newton para o desvio do periélio de Mercúrio seria de 40 segundos de arco por século. Assim, a teoria da Relatividade Geral estaria com um grande problema, pois ela previa, sem possibilidade de alteração, que esse desvio era de 43 segundos de arco por século. Inclusive, esse foi o primeiro sucesso da teoria de Einstein. Na teoria de Brans-Dicke, porém, o valor de  $\omega$ , a constante de acoplamento do campo escalar com a geometria, poderia ser ajustado para obter os 40 segundos de arco. Medidas posteriores, no entanto, não confirmaram os resultados obtidos por Dicke e Goldenberg, de modo que a contribuição do momento de quadrupolo gravitacional é muito pequena (WILL, 2005).

Nos últimos anos, as teorias escalares-tensoriais da gravitação (BERGMANN, 1968; WAGONER, 1970; NORDTVEDT, 1970), das quais a teoria de Brans-Dicke é um caso particular, têm experimentado um renovado interesse. Um dos motivos para isso é a possibilidade que, ao menos em escalas suficientemente altas de energia, a gravitação tenha uma natureza escalar-

tensorial (DAMOUR, 1994), de modo que essas teorias podem ser importantes no Universo primordial. Outras motivações incluem os efeitos gravitacionais de campos escalares de longo alcance em modelos de unificação baseados em supercordas (GREEN, 1987) e na cosmologia inflacionária (LA, 1989). Além disso, as teorias escalares-tensoriais têm implicação direta para a cosmologia e para os testes experimentais da interação gravitacional (DAMOUR, 2000).

## 4 ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NO CONTEXTO DA TEORIA DE BRANS-DICKE

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, iremos obter a expressão para o índice de refração tensorial no contexto da teoria de Brans-Dicke, considerando o caso de métricas estáticas. Para isso, introduziremos o formalismo básico na Relatividade Geral, apresentaremos as equações da teoria de Brans-Dicke na aproximação de campo fraco e sua relação com a Relatividade Geral, obtendo, em seguida, uma expressão para o índice de refração na teoria de Brans-Dicke. O efeito das pressões internas da fonte do campo gravitacional também estará incluído no índice de refração.

### 4.2 ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

Vamos considerar o caso de um campo fraco estático, onde  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ ,  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  e  $h_{\alpha\beta}$  é uma perturbação ( $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ ). No que se segue desprezaremos termos de 2ª ordem ou maiores em  $h_{\alpha\beta}$ .

Para um raio de luz se propagando ao longo de alguma curva parametrizada por  $\lambda$  vem que

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha(\lambda) dx^\beta(\lambda) = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha(\lambda) dx^\beta(\lambda) + h_{\alpha\beta} dx^\alpha(\lambda) dx^\beta(\lambda) = 0. \quad (4.1)$$



E ainda,

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = (-1 + h_{00}) \left( \frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} = 0, \quad (4.2)$$

onde estamos fazendo  $c = 1$ . Com  $\lambda = t$ , a equação (4.2) fica

$$g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} = (-1 + h_{00}) + (\delta_{ij} + h_{ij}) \dot{x}^i \dot{x}^j = 0. \quad (4.3)$$

Considerando  $\dot{x}^j = v^j$  uma "coordenada da velocidade da luz" podemos definir (BOONSERM, 2005)

$$\vec{v} = |\vec{v}| \hat{k} \quad ; \quad |\hat{k}| = 1 = \sqrt{\delta_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j},$$

sendo  $\hat{k}$  um vetor tridimensional unitário e  $\hat{k}^j$  as suas componentes. Então, usando que  $\dot{x}^j = v^j = |\vec{v}| \hat{k}^j$ , pode-se escrever a equação (4.3) como

$$(-1 + h_{00}) + (\delta_{ij} + h_{ij}) |\vec{v}|^2 \hat{k}^i \hat{k}^j = 0.$$

Portanto,

$$|\vec{v}|^2 (1 + h_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j) = 1 - h_{00},$$

pois  $\delta_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j = 1$ . Logo,

$$|\vec{v}| = \left( \frac{1 - h_{00}}{1 + h_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mantendo apenas os termos de primeira ordem em  $h_{\alpha\beta}$ , encontra-se que

$$|\vec{v}| = (1 - h_{00})^{\frac{1}{2}} (1 + h_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j)^{-\frac{1}{2}} \approx \left( 1 - \frac{1}{2} h_{00} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} h_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j \right),$$

onde foi utilizada a expansão binomial  $(1+x)^n \approx 1+nx$  se  $|x| \ll 1$ . Tem-se ainda que,

$$|\vec{v}| = 1 - \frac{1}{2}h_{00} - \frac{1}{2}h_{ij}\hat{k}^i\hat{k}^j. \quad (4.4)$$

Este é o módulo do "vetor velocidade da luz". Devemos notar aqui que a velocidade real da luz no espaço de métrica  $g_{\alpha\beta}$ , medida pelas réguas e relógios, é sempre  $c = 1$  nas unidades consideradas. Na analogia adotada para se definir o índice de refração, porém, supomos basicamente a propagação da luz em um espaço plano, preenchido por um "meio", que é simulado pelas componentes  $h_{\alpha\beta}$ . Então, definimos o índice de refração para a luz viajando na direção  $\hat{k}$  como

$$n(\hat{k}) = \frac{1}{|\vec{v}|} = 1 + \frac{1}{2}h_{00} + \frac{1}{2}h_{ij}\hat{k}^i\hat{k}^j. \quad (4.5)$$

Agora, vamos definir o índice de refração tensorial como o tensor  $3 \times 3$

$$n_{ij} \equiv (1 + \frac{1}{2}h_{00})\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}, \quad (4.6)$$

de modo que  $n(\hat{k}) = n_{ij}\hat{k}^i\hat{k}^j$ . Com a definição

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}n_{\alpha\beta}h, \quad (4.7)$$

sendo  $h = h^\alpha{}_\alpha$ , também obtemos que

$$n_{ij} = (1 + \frac{1}{2}\bar{h}_{00})\delta_{ij} + \frac{1}{2}\bar{h}_{ij}. \quad (4.8)$$

Como vimos no Capítulo 2, as equações de campo da Relatividade Geral na aproximação de campo fraco, utilizando-se o gauge harmônico  $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$  e considerando-se o caso estático, ficam

$$\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (4.9)$$

Então, como o espaço-tempo é estático, o tensor energia-momento é

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & T_{ij} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

onde  $\rho$  é a densidade de energia e  $T_{ij}$  as pressões internas da fonte. Dessa forma, obtêm-se de (4.9) e (4.10)

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -16\pi G \rho, \quad (4.11)$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{ij} = -16\pi G T_{ij}. \quad (4.12)$$

Com as definições

$$\nabla^2 \Phi \equiv 4\pi G \rho, \quad (4.13)$$

$$\nabla^2 \Psi_{ij} \equiv 4\pi G T_{ij}, \quad (4.14)$$

onde  $\Phi$  é o potencial Newtoniano ordinário e  $\Psi_{ij}$  são os novos potenciais originados das pressões internas. Assim, segue de imediato que

$$\bar{h}_{00} = -4\Phi, \quad (4.15)$$

$$\bar{h}_{ij} = -4\Psi_{ij}. \quad (4.16)$$

Pode-se verificar ainda, que as expressões a seguir para  $h_{00}$  e  $h_{ij}$ :

$$h_{00} = -2(\Phi + \delta^{kl}\Psi_{kl}), \quad (4.17)$$

$$h_{ij} = -2[2\Psi_{ij} + \delta_{ij}(\Phi - \delta^{kl}\Psi_{kl})], \quad (4.18)$$

são consistentes com as equações (4.7), (4.15) e (4.16). Então, o índice de refração tensorial definido em (4.6) e (4.8) fica igual a

$$n_{ij} = (1 - 2\Phi)\delta_{ij} - 2\Psi_{ij}. \quad (4.19)$$

Dessa forma, os efeitos das pressões internas influenciam o valor do índice de refração tensorial por meio dos potenciais  $\Psi_{ij}$ , trazendo uma novidade em relação à análise Newtoniana.

Agora, façamos uma aplicação, considerando que as pressões internas sejam isotrópicas, isto é,  $T_{ij} = p\delta_{ij}$  e  $\Psi_{ij} = \Psi_0\delta_{ij}$ . Nesse caso, obtemos as expressões formais

$$h_{00} = -2(\Phi + 3\Psi_0), \quad (4.20)$$

$$h_{ij} = -2\delta_{ij}(\Phi - \Psi_0), \quad (4.21)$$

$$n_{ij} = (1 - 2\Phi - 2\Psi_0)\delta_{ij}, \quad (4.22)$$

com as funções  $\Phi$  e  $\Psi_0$  sendo calculadas a partir das equações

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (4.23)$$

$$\nabla^2 \Psi_0 = 4\pi G p. \quad (4.24)$$

Portanto, as componentes não-nulas do índice de refração são  $n_{11} = n_{22} = n_{33}$  e ele pode ser visto como um "escalar". Essa é uma situação comum para a maioria das estrelas, onde o material estelar se comporta como um fluido perfeito, para o qual a pressão é isotrópica. Por outro lado, se as pressões internas forem desprezíveis, pode-se tomar  $\Psi_{ij} \rightarrow 0$  e recuperar os resultados conhecidos do limite Newtoniano (SCHNEIDER, 1993; MOLLERACH, 2002):

$$h_{00} = -2\Phi; \quad h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij}; \quad n_{ij} = (1 - 2\Phi)\delta_{ij}. \quad (4.25)$$

#### 4.3 RELAÇÃO ENTRE AS TEORIAS DA RELATIVIDADE GERAL E DE BRANS-DICKE

Como foi mencionado no Capítulo 3, as equações de campo da teoria de Brans-Dicke são dadas por

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\alpha\beta} + \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\alpha;\beta} - g_{\alpha\beta}\square\phi), \quad (4.26)$$

$$\square\phi = \frac{8\pi T}{2\omega + 3}, \quad (4.27)$$

onde fizemos  $c = 1$ . Na aproximação de campo fraco, considera-se de modo análogo ao caso da Relatividade Geral que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (4.28)$$

sendo que  $\eta_{\alpha\beta}$  denota o tensor métrico de Minkowski e  $h_{\alpha\beta}$  é um pequeno termo de perturbação. Além disso, toma-se também que

$$\phi = \phi_0 + \varepsilon, \quad (4.29)$$

onde  $\phi_0$  é uma constante,  $\varepsilon = \varepsilon(x)$  um termo de perturbação e  $|\varepsilon/\phi_0| \ll 1$ . Desse modo, desprezaremos termos de ordem superior a 1 em  $\varepsilon$ .

É possível obter a solução de um problema na teoria de Brans-Dicke, para um dado  $T_{\alpha\beta}$ , a partir de uma solução já conhecida na Relatividade Geral com o mesmo  $T_{\alpha\beta}$ . De fato, se  $g_{\alpha\beta}(G, x)$  é uma solução conhecida das equações de Einstein na aproximação de campo fraco para um dado  $T_{\alpha\beta}$ , então a solução correspondente na teoria de Brans-Dicke para o mesmo  $T_{\alpha\beta}$  será dada por (BARROS, 1998):

$$g_{\alpha\beta}^{BD}(x) = [1 - G_0\varepsilon(x)]g_{\alpha\beta}(G_0, x), \quad (4.30)$$

onde  $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right)G = \frac{1}{\phi_0}$ . Equivalentemente, pode-se também escrever

$$h_{\mu\nu}^{BD}(x) = h_{\mu\nu}(G_0, x) - G_0\varepsilon(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (4.31)$$

De acordo com (4.27) e (4.29), temos que

$$\square\varepsilon = \frac{8\pi T}{2\omega+3}, \quad (4.32)$$

sendo que  $\square\varepsilon = \eta^{\gamma\delta}\varepsilon_{,\gamma;\delta} = -\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} + \nabla^2\varepsilon$ . Portanto, uma vez que a solução do problema seja conhecida na Relatividade Geral, tudo que é necessário para obtenção da solução (4.31) na teoria de Brans-Dicke é resolver a equação (4.32) para  $\varepsilon(x)$ .

#### 4.4 ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Considerando a propagação da luz em um espaço-tempo estático, podemos definir, de modo análogo ao da seção 4.2, o índice de refração tensorial na teoria de Brans-Dicke como:

$$n_{ij}^{BD} \equiv \left(1 + \frac{1}{2}h_{00}^{BD}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}h_{ij}^{BD}. \quad (4.33)$$

Então, para o tensor energia-momento  $T_{\alpha\beta}$  dado por (4.10), a solução formal na teoria de Brans-Dicke deve ser, de acordo com (4.31):

$$h_{00}^{BD} = h_{00}(G_0) + G_0\varepsilon, \quad (4.34)$$

$$h_{ij}^{BD} = h_{ij}(G_0) - G_0\varepsilon\delta_{ij}, \quad (4.35)$$

onde,

$$\nabla^2\varepsilon = \frac{8\pi T}{2\omega + 3}, \quad (4.36)$$

e, conforme (4.17) e (4.18),

$$h_{00}(G_0) = -2 \left[ \Phi(G_0) + \delta^{kl}\Psi_{kl}(G_0) \right], \quad (4.37)$$

$$h_{ij}(G_0) = -2[2\Psi_{ij}(G_0) + \delta_{ij}(\Phi(G_0) - \delta^{kl}\Psi_{kl}(G_0))]. \quad (4.38)$$

Substituindo (4.34) e (4.35) em (4.33), obtém-se o índice de refração

$$n_{ij}^{BD} = (1 - 2\Phi(G_0))\delta_{ij} - 2\Psi_{ij}(G_0). \quad (4.39)$$

Observa-se que é a mesma expressão formal da Relatividade Geral, porém com a substituição da constante gravitacional de Newton  $G$  por  $G_0 = \frac{2\omega+3}{2\omega+4}G$ , sendo  $G_0 < G$ , fator que será responsável pela discrepância entre as previsões das duas teorias. Se as pressões internas são isotrópicas, sendo a fonte representada por um fluido perfeito, pode-se tomar  $\Psi_{ij}(G_0) = \Psi_0(G_0)\delta_{ij}$  e  $T_{ij} = p\delta_{ij}$ . Logo,

$$h_{00}^{BD} = -2(\Phi(G_0) + 3\Psi_0(G_0)) + G_0\varepsilon, \quad (4.40)$$

$$h_{ij}^{BD} = -2\delta_{ij}(\Phi(G_0) - \Psi_0(G_0)) - G_0\varepsilon\delta_{ij}, \quad (4.41)$$

$$n_{ij}^{BD} = (1 - 2\Phi(G_0) - 2\Psi_0(G_0))\delta_{ij}, \quad (4.42)$$

onde,

$$\nabla^2\varepsilon = \frac{8\pi(-\rho + 3p)}{2\omega + 3}. \quad (4.43)$$

Verifica-se que o índice de refração dado por (4.42) é um "escalar" nesse caso. Se as pressões internas são desprezadas e fizermos  $\Psi_{ij}(G_0) \rightarrow 0$ , encontra-se que

$$h_{00}^{BD} = -2\Phi(G_0) + G_0\varepsilon, \quad (4.44)$$

$$h_{ij}^{BD} = -(2\Phi(G_0) + G_0\varepsilon)\delta_{ij} \quad (4.45)$$

$$n_{ij}^{BD} = (1 - 2\Phi(G_0))\delta_{ij}, \quad (4.46)$$

com



$$\nabla^2 \varepsilon = -\frac{8\pi\rho}{2\omega+3}. \quad (4.47)$$

Na aproximação de campo fraco, quando  $\omega \rightarrow \infty$  as equações da teoria de Brans-Dicke devem se reduzir para as equações da Relatividade Geral (BARROS, 1998). Realmente, neste limite,

$$G_0 \rightarrow G \quad \text{e} \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

de modo que as equações (4.34), (4.35) e (4.39) se reduzem para os resultados da Relatividade Geral, equações (4.17)-(4.19).

#### 4.5 COMENTÁRIOS

Consideramos um espaço-tempo estático no contexto da teoria gravitacional de Brans-Dicke, obtendo-se uma expressão para o índice de refração tensorial. Verificou-se que esse índice tem uma expressão formalmente idêntica ao caso da Relatividade Geral, não obstante a substituição da constante gravitacional de Newton pelo fator  $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) G$ . Este fator representa a contribuição do campo escalar de Brans-Dicke  $\varepsilon$  no índice de refração.

Os potenciais  $\Psi_{ij}$  também contribuem para o valor do índice de refração tensorial, representando o efeito das pressões internas da fonte. No caso particular em que as pressões são isotrópicas o índice de refração comporta-se basicamente como um escalar. É interessante notar que Sereno (2003), adotando uma outra abordagem, definiu um índice de refração na teoria de Brans-Dicke, porém sem considerar o efeito das pressões internas da fonte.

No limite  $\omega \rightarrow \infty$ , verifica-se que as expressões obtidas na teoria de Brans-Dicke se reduzem, como esperado, para as expressões já conhecidas na literatura (BOONSERM, 2005) para a Relatividade Geral.

## 5 ÍNDICE DE REFRAÇÃO TENSORIAL NA TEORIA DE BRANS-DICKE: MÉTRICAS COM SIMETRIA ESFÉRICAS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, consideraremos um caso particular do formalismo desenvolvido no capítulo anterior para as métricas estáticas. Agora, obteremos a solução estática com simetria esférica para a teoria da Relatividade Geral, considerando a aproximação linear. Utilizando essa solução, faremos o cálculo do índice de refração. Na sequência, a solução para métricas estáticas com simetria esférica será exibida no contexto da teoria de Brans-Dicke e o índice de refração correspondente calculado. Finalmente, discutiremos os resultados, comparando as duas teorias e fazendo algumas aplicações.

### 5.2 SOLUÇÃO DE CAMPO FRACO COM SIMETRIA ESFÉRICA NA TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL

As considerações gerais do capítulo anterior, válidas para métricas estáticas do espaço-tempo, podem ser aplicadas para uma situação mais específica como a de métricas com simetria esférica. Para isso, considera-se um campo fraco esfericamente simétrico para o qual o tensor energia-momento tem a forma (BOONSERM)

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_t(r)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_t(r)r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

onde  $p_r$  e  $p_t$  são as pressões radial e transversal, respectivamente. Na origem, temos  $p_r(0) =$

$p_t(0)$ . A conservação do tensor energia-momento  $T^{\alpha\beta}$  é expressa em termos da derivada covariante

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0, \quad (5.2)$$

uma vez que usaremos coordenadas esféricas e a métrica de Minkowski escrita em termos de coordenadas polares é  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta)$ . Da equação (5.2), tem-se que

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} T^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\beta} T^{\alpha\gamma} = 0, \quad (5.3)$$

com os símbolos de Christoffel, na aproximação considerada, dados por  $\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\sigma}(-\eta_{\gamma\beta,\sigma} + \eta_{\sigma\gamma,\beta} + \eta_{\beta\sigma,\gamma})$ . Verifica-se que  $T^{0\beta}{}_{;\beta}$ ,  $T^{2\beta}{}_{;\beta}$  e  $T^{3\beta}{}_{;\beta}$  são quantidades identicamente nulas (ver Apêndice A). Porém,

$$T^{1\beta}{}_{;\beta} = T^{11}{}_{,1} + \Gamma_{22}^1 T^{22} + \Gamma_{33}^1 T^{33} + \Gamma_{12}^2 T^{11} + \Gamma_{13}^3 T^{11}, \quad (5.4)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} T^{1\beta}{}_{;\beta} = & \partial_r p_r(r) + \frac{1}{2}\eta^{11}(-\eta_{22,1})T^{22} + \frac{1}{2}\eta^{11}(-\eta_{33,1})T^{33} \\ & + \frac{1}{2}\eta^{22}(\eta_{22,1})T^{11} + \frac{1}{2}\eta^{33}(\eta_{33,1})T^{11}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

E ainda, com as devidas substituições,

$$T^{1\beta}{}_{;\beta} = \partial_r p_r(r) + \frac{2[p_r(r) - p_t(r)]}{r}. \quad (5.6)$$

Então, de acordo com (5.3),

$$\partial_r p_r(r) + \frac{2[p_r(r) - p_t(r)]}{r} = 0,$$

o que permite estabelecer a relação

$$p_t(r) = p_r(r) + \frac{1}{2}r\partial_r p_r(r). \quad (5.7)$$

Pode-se escrever, em concordância com as equações de campo de Einstein  $\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi GT_{\alpha\beta}$  e (5.1), que

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} H_0(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_t(r)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_t(r)r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

onde na origem deve-se ter  $H_r(0) = H_t(0)$ . Agora, a condição do gauge harmônico será expressa em termos de uma derivada covariante como  $\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ . Por analogia com as equações (5.1), (5.2) e (5.7), obtém-se imediatamente

$$H_t(r) = H_r(r) + \frac{1}{2}r\partial_r H_r(r). \quad (5.9)$$

Para resolver as equações de campo deve-se calcular  $\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} \equiv \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}{}^{;\gamma} = \eta^{\gamma\delta} \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma;\delta}$ . Assim, admitindo-se que

$$\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} Z_0(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_t(r)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_t(r)r^2 \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

pode-se obter (ver Apêndice B)

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = Z_0(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_0), \quad (5.11)$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{11} = Z_r(r) = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_r) - 4 \left( \frac{H_r - H_t}{r^2} \right), \quad (5.12)$$

a qual ainda pode ser escrita, com a ajuda de (5.9), como

$$\nabla^2 \bar{h}_{11} = Z_r(r) = \frac{1}{r^4} \partial_r (r^4 \partial_r H_r), \quad (5.13)$$

e

$$\nabla^2 \bar{h}_{22} = \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_t) + 2 \left( \frac{H_r - H_t}{r^2} \right) \right] r^2 = Z_t(r) r^2. \quad (5.14)$$

As funções  $Z_t(r)$  e  $Z_r(r)$  não são independentes. De fato, utilizando-se (5.12) e (5.9), mostra-se que

$$Z_r(r) + \frac{1}{2} r \partial_r Z_r(r) = Z_t(r). \quad (5.15)$$

As equações de Einstein ficam então,

$$\nabla^2 \bar{h}_{00} = -16\pi G \rho, \quad (5.16)$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{11} = -16\pi G p_r, \quad (5.17)$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{22} = -16\pi G p_t r^2. \quad (5.18)$$

Combinando essas equações com (5.11), (5.12) e (5.14), tem-se que

$$Z_0 = -16\pi G \rho, \quad (5.19)$$

$$Z_r = -16\pi G p_r, \quad (5.20)$$

e a equação redundante

$$Z_t = -16\pi G p_t. \quad (5.21)$$

Pode-se obter a solução formal para a métrica  $\bar{h}_{\alpha\beta}$ , considerando-se (5.19) na forma

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_0) = -16\pi G \rho,$$

cuja solução é

$$H_0 = -16\pi G \int \left[ \int \rho r^2 dr \right] r^{-2} dr. \quad (5.22)$$

Deve-se notar que  $H_0 = -4\Phi$ , conforme a equação (3.15), com  $\Phi$  representando o potencial Newtoniano ordinário. Por sua vez, a equação (5.20) fica

$$\frac{1}{r^4} \partial_r (r^4 \partial_r H_r) = -16\pi G p_r.$$

Logo,

$$H_r = -16\pi G \int \left[ \int p_r r^4 dr \right] r^{-4} dr. \quad (5.23)$$

A função  $H_t$  pode, então, ser calculada a partir da equação (5.9). Desse modo, obtemos a solução das equações de Einstein para uma métrica estática com simetria esférica, considerando que a fonte de campo gravitacional possui, além da densidade de energia  $\rho$ , pressões internas radiais e transversais, que originam novos potenciais gravitacionais.

### 5.3 CÁLCULO DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO

No Capítulo 4, definimos o índice de refração em um espaço-tempo estático como

$$n = n_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j, \quad (5.24)$$

onde  $n_{ij} = (1 + \frac{1}{2} \bar{h}_{00}) \delta_{ij} + \frac{1}{2} \bar{h}_{ij}$  e  $\hat{k}^i$  são as componentes do vetor unitário tridimensional  $\hat{k}$ , o qual indica a direção em que a luz se propaga. Em coordenadas esféricas, as quantidades  $\delta_{ij}$  têm os seguintes valores não-nulos:  $\delta_{11} = 1$ ,  $\delta_{22} = r^2$  e  $\delta_{33} = r^2 \text{sen}^2 \theta$ . Assim, a condição  $\delta_{ij} \hat{k}^i \hat{k}^j = 1$  fica

$$\hat{k}^1 \hat{k}^1 + r^2 \hat{k}^2 \hat{k}^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \hat{k}^3 \hat{k}^3 = 1, \quad (5.25)$$

com o vetor  $\hat{k} = \hat{k}^1 \hat{r} + r \hat{k}^2 \hat{\theta} + r \text{sen} \theta \hat{k}^3 \hat{\phi}$ . Agora, considerando a equação (5.8), o cálculo de  $n_{ij}$  nos conduz aos valores não-nulos

$$n_{11} = 1 + \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H_r, \quad (5.26)$$

$$n_{22} = \left( 1 + \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H_t \right) r^2, \quad (5.27)$$

$$n_{33} = \left( 1 + \frac{1}{2} H_0 + \frac{1}{2} H_t \right) r^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (5.28)$$

De posse desses resultados, pode-se obter

$$n = n_{11} \hat{k}^1 \hat{k}^1 + n_{22} \hat{k}^2 \hat{k}^2 + n_{33} \hat{k}^3 \hat{k}^3,$$

ou seja,

$$n = \left(1 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{2}H_r\right) \hat{k}^1 \hat{k}^1 + \left(1 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{2}H_t\right) r^2 \hat{k}^2 \hat{k}^2 + \left(1 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{2}H_t\right) r^2 \text{sen}^2 \theta \hat{k}^3 \hat{k}^3$$

$$n = \left(1 + \frac{1}{2}H_0\right) (\hat{k}^1 \hat{k}^1 + r^2 \hat{k}^2 \hat{k}^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta \hat{k}^3 \hat{k}^3) + \frac{1}{2} (H_r \hat{k}^1 \hat{k}^1 + H_t r^2 \hat{k}^2 \hat{k}^2 + H_t r^2 \text{sen}^2 \theta \hat{k}^3 \hat{k}^3).$$

Utilizando-se (5.25), tem-se a expressão para o índice de refração para uma métrica estática com simetria esférica

$$n = 1 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{2} (H_r \hat{k}^1 \hat{k}^1 + H_t r^2 \hat{k}^2 \hat{k}^2 + H_t r^2 \text{sen}^2 \theta \hat{k}^3 \hat{k}^3). \quad (5.29)$$

Para exemplificar, pode-se considerar um raio de luz se propagando no plano  $\varphi = \varphi_0$ , sendo  $\varphi_0$  constante. Se o raio passa por um ponto de coordenada  $r$ , formando um ângulo  $\chi$  com a direção  $\hat{r}$  naquele ponto (ver Figura 5.1), então as componentes de  $\hat{k}$  nas direções  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  e  $\hat{\varphi}$  são, respectivamente,  $\cos \chi$ ,  $\text{sen} \chi$  e 0.

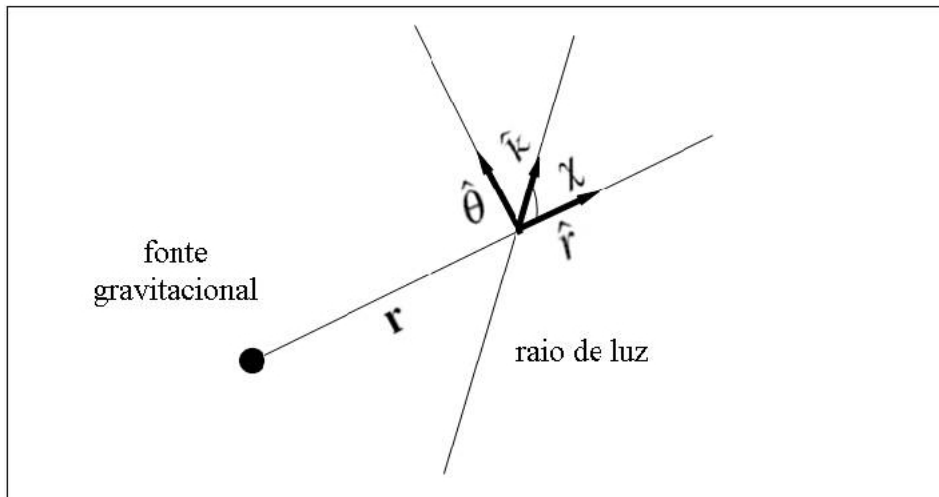


Figura 5.1: Propagação do raio de luz.



Portanto,  $\hat{k}^1 = \cos \chi$ ,  $r\hat{k}^2 = \text{sen}\chi$  e  $r\text{sen}\theta\hat{k}^3 = 0$ . Nesse caso, o índice de refração dado por (5.29) torna-se

$$n(r, \chi) = 1 + \frac{1}{2}H_0 + \frac{1}{2}(H_r \cos^2 \chi + H_t \text{sen}^2 \chi). \quad (5.30)$$

Se as pressões internas da fonte de campo gravitacional são desprezíveis, o índice de refração fica igual a

$$n(r) = 1 + \frac{1}{2}H_0, \quad (5.31)$$

que independe da direção tomada pelo raio ao passar pelo ponto de coordenada  $r$ , ou seja, é isotrópico.

#### 5.4 SOLUÇÃO DE CAMPO FRACO COM SIMETRIA ESFÉRICA NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Para obter a solução das equações de campo da teoria de Brans-Dicke para métricas estáticas com simetria esférica, vamos considerar o seguinte resultado da seção 4.3:

$$h_{\mu\nu}^{BD}(x) = h_{\mu\nu}(G_0, x) - G_0 \varepsilon(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (5.32)$$

com

$$\square \varepsilon = \frac{8\pi T}{2\omega + 3}. \quad (5.33)$$

para construir a solução (5.32) devemos encontrar  $h_{\mu\nu}(G_0, x)$  e  $\varepsilon$ . Inicialmente, sabemos que

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (5.34)$$

com  $\bar{h}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu}(G, x)$  dado por (5.8) e

$$h = h^0_0 + h^1_1 + h^2_2 + h^3_3. \quad (5.35)$$

Usando-se a métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta)$ , tem-se

$$h = -h_{00} + h_{11} + \frac{h_{22}}{r^2} + \frac{h_{33}}{r^2 \text{sen}^2 \theta}. \quad (5.36)$$

Porém, de (5.34), segue que

$$\bar{h}_{22} = h_{22} - \frac{1}{2} \eta_{22} h = h_{22} - \frac{1}{2} r^2 h,$$

isto é,

$$\bar{h}_{22} \text{sen}^2 \theta = h_{22} \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 h \text{sen}^2 \theta,$$

que leva a

$$\bar{h}_{33} = h_{22} \text{sen}^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 h \text{sen}^2 \theta = h_{33} - \frac{1}{2} r^2 h \text{sen}^2 \theta.$$

Logo,

$$h_{33} = h_{22} \text{sen}^2 \theta. \quad (5.37)$$

Substituindo (5.37) em (5.36), temos que

$$h = -h_{00} + h_{11} + \frac{2h_{22}}{r^2}. \quad (5.38)$$

Agora, consideremos a equação (5.34), obtendo

$$\bar{h}_{ij} = h_{ij} = 0, \quad (5.39)$$

$$\bar{h}_{0i} = h_{0i} = 0, \quad (5.40)$$

além de,

$$\bar{h}_{00} = h_{00} + \frac{1}{2}h, \quad (5.41)$$

$$\bar{h}_{11} = h_{11} - \frac{1}{2}h. \quad (5.42)$$

Subtraindo as equações (5.41) e (5.42) e combinando o resultado com (5.38), obtemos

$$h_{22} = (\bar{h}_{00} - \bar{h}_{11}) \frac{r^2}{2}$$

$$h_{22} = \frac{(H_0 - H_r)r^2}{2}, \quad (5.43)$$

e também, conforme (5.37),

$$h_{33} = \frac{(H_0 - H_r)r^2 \sin^2 \theta}{2}. \quad (5.44)$$

Prosseguindo, vamos obter  $h_{00}$  e  $h_{11}$ . Então, somando (5.41) e (5.42), vem

$$\bar{h}_{00} + \bar{h}_{11} = h_{00} + h_{11}. \quad (5.45)$$

Porém, de (5.34), vem que

$$\frac{\bar{h}_{22}}{r^2} = H_t + \frac{1}{2}h.$$

Logo, (5.38) fica

$$h = -h_{00} + h_{11} + 2H_t + h.$$

Daí,

$$h_{00} = h_{11} + 2H_t. \quad (5.46)$$

Finalmente, combinando-se (5.45) e (5.46), teremos

$$h_{00} = \frac{H_0 + H_r}{2} + H_t, \quad (5.47)$$

$$h_{11} = \frac{H_0 + H_r}{2} - H_t. \quad (5.48)$$

Pode-se escrever as componentes não-nulas de  $h_{\mu\nu}(G_0, x) = h_{\mu\nu}(G_0)$  a partir das equações (5.43), (5.44), (5.47) e (5.48) como

$$h_{00}(G_0) = \frac{H_0(G_0) + H_r(G_0)}{2} + H_t(G_0), \quad (5.49)$$

$$h_{11}(G_0) = \frac{H_0(G_0) + H_r(G_0)}{2} - H_t(G_0), \quad (5.50)$$

$$h_{22}(G_0) = \frac{[H_0(G_0) - H_r(G_0)]r^2}{2}, \quad (5.51)$$

$$h_{33}(G_0) = \frac{[H_0(G_0) - H_r(G_0)]r^2 \text{sen}^2 \theta}{2}. \quad (5.52)$$

Na sequência, vamos obter  $\varepsilon$ . Sabemos que (5.33) deve ser satisfeita. Porém, como a solução é estática e com simetria esférica, então  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ . Daí,

$$\square \varepsilon = \nabla^2 \varepsilon = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\varepsilon}{dr} \right]. \quad (5.53)$$

E também, o traço do tensor energia-momento dado em (5.1) é

$$T = T^0_0 + T^1_1 + T^2_2 + T^3_3$$

$$T = -T_{00} + T_{11} + \frac{T_{22}}{r^2} + \frac{T_{33}}{r^2 \text{sen}^2 \theta}$$

$$T = -\rho + p_r + 2p_t. \quad (5.54)$$

Substituindo (5.53) e (5.54) em (5.33), temos

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\varepsilon}{dr} \right] = \frac{8\pi}{2\omega + 3} (-\rho + p_r + 2p_t),$$

cuja solução é

$$\varepsilon = \frac{8\pi}{2\omega + 3} \int \left[ \int (-\rho + p_r + 2p_t) r^2 dr \right] r^{-2} dr. \quad (5.55)$$

De posse das equações (5.49)-(5.52) e de (5.55), encontramos finalmente a solução na teoria de Brans-Dicke, equação (5.32), para métricas estáticas com simetria esférica

$$h_{00}^{BD}(x) = \frac{H_0(G_0) + H_r(G_0)}{2} + H_t(G_0) + G_0 \varepsilon, \quad (5.56)$$

$$h_{11}^{BD}(x) = \frac{H_0(G_0) + H_r(G_0)}{2} - H_t(G_0) - G_0\varepsilon, \quad (5.57)$$

$$h_{22}^{BD}(x) = \frac{[H_0(G_0) - H_r(G_0)]r^2}{2} - r^2G_0\varepsilon, \quad (5.58)$$

$$h_{33}^{BD}(x) = \frac{[H_0(G_0) - H_r(G_0)]r^2\text{sen}^2\theta}{2} - r^2\text{sen}^2\theta G_0\varepsilon. \quad (5.59)$$

De imediato, percebe-se que, para  $\omega \rightarrow \infty$ , a solução de Brans-Dicke se reduz para a solução da Relatividade Geral, pois  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $G_0 \rightarrow G$  no limite considerado.

Vamos verificar a consistência da solução geral, obtendo o campo gravitacional estático e esfericamente simétrico produzido por um ponto de massa  $M$ , para o qual

$$\rho = M\delta(\vec{r}), \quad p_r = p_t = 0. \quad (5.60)$$

Nesse caso, de acordo com (5.22), tem-se que

$$H_0(G_0) = -16\pi G_0 \int \left[ \int \rho r^2 dr \right] r^{-2} dr$$

$$H_0(G_0) = -16\pi G_0 M \int \left[ \int r^2 \delta(\vec{r}) dr \right] r^{-2} dr.$$

Sendo  $\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$ , obtemos ainda

$$H_0(G_0) = \frac{4G_0M}{r}. \quad (5.61)$$

E também, com a ajuda de (5.9), (5.23) e (5.55), vem

$$H_r(G_0) = -16\pi G_0 \int \left[ \int p_r r^4 dr \right] r^{-4} dr = 0, \quad H_t(G_0) = 0, \quad (5.62)$$

$$\varepsilon = -\frac{8\pi M}{2\omega+3} \int \left[ \int \delta(\vec{r}) r^2 dr \right] r^{-2} dr = \frac{2M}{(2\omega+3)r}. \quad (5.63)$$

Com as equações (5.61)-(5.63), lembrando que  $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) G$ , pode-se encontrar a solução  $h_{\mu\nu}^{BD}$  em (5.56)-(5.59):

$$h_{00}^{BD} = \frac{2GM}{r}, \quad (5.64)$$

$$h_{11}^{BD} = \frac{2GM}{r} \left( \frac{\omega+1}{\omega+2} \right), \quad (5.65)$$

$$h_{22}^{BD} = \frac{2GM}{r} \left( \frac{\omega+1}{\omega+2} \right) r^2, \quad (5.66)$$

$$h_{33}^{BD} = \frac{2GM}{r} \left( \frac{\omega+1}{\omega+2} \right) r^2 \sin^2 \theta, \quad (5.67)$$

que é exatamente a solução de Schwarzschild na teoria de Brans-Dicke (BRANS, 1961).

## 5.5 ÍNDICE DE REFRAÇÃO NA TEORIA DE BRANS-DICKE

Vamos obter o índice de refração na teoria de Brans-Dicke. Para isso, é necessário calcular  $\bar{h}_{\mu\nu}^{BD}$ . Então, com a definição  $\bar{h}_{\mu\nu}^{BD} = h_{\mu\nu}^{BD} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{BD} - \eta_{\mu\nu}G_0\varepsilon$  (Brans, 1961), teremos

$$\bar{h}_{ij}^{BD} = h_{ij}^{BD} - \frac{1}{2}\eta_{ij}h^{BD} - \eta_{ij}G_0\varepsilon, \quad (5.68)$$

$$\bar{h}_{0i}^{BD} = h_{0i}^{BD} - \frac{1}{2}\eta_{0i}h^{BD} - \eta_{0i}G_0\varepsilon = 0, \quad (5.69)$$

$$\bar{h}_{00}^{BD} = h_{00}^{BD} - \frac{1}{2}\eta_{00}h^{BD} - \eta_{00}G_0\varepsilon = h_{00}^{BD} + \frac{h^{BD}}{2} + G_0\varepsilon. \quad (5.70)$$

Porém,

$$h^{BD} = -h_{00}^{BD} + h_{11}^{BD} + \frac{h_{22}^{BD}}{r^2} + \frac{h_{33}^{BD}}{r^2 \sin^2\theta}. \quad (5.71)$$

Assim,

$$\bar{h}_{00}^{BD} = \frac{h_{00}^{BD}}{2} + \frac{h_{11}^{BD}}{2} + \frac{h_{22}^{BD}}{2r^2} + \frac{h_{33}^{BD}}{2r^2 \sin^2\theta} + G_0\varepsilon \quad (5.72)$$

$$\bar{h}_{00}^{BD} = H_0(G_0). \quad (5.73)$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11}^{BD} &= h_{11}^{BD} - \frac{1}{2}\eta_{11}h^{BD} - \eta_{11}G_0\varepsilon = h_{11}^{BD} - \frac{h^{BD}}{2} - G_0\varepsilon \\ \bar{h}_{11}^{BD} &= \frac{h_{00}^{BD}}{2} + \frac{h_{11}^{BD}}{2} - \frac{h_{22}^{BD}}{2r^2} - \frac{h_{33}^{BD}}{2r^2 \sin^2\theta} - G_0\varepsilon \end{aligned}$$



$$\bar{h}_{11}^{BD} = H_r(G_0). \quad (5.74)$$

E ainda,

$$\begin{aligned} \bar{h}_{22}^{BD} &= h_{22}^{BD} - \frac{1}{2}\eta_{22}h^{BD} - \eta_{22}G_0\varepsilon = h_{22}^{BD} - \frac{1}{2}r^2h^{BD} - r^2G_0\varepsilon \\ \bar{h}_{22}^{BD} &= \left(\frac{h_{00}^{BD}}{2} - \frac{h_{11}^{BD}}{2} + \frac{h_{22}^{BD}}{2r^2} - \frac{h_{33}^{BD}}{2r^2\text{sen}^2\theta}\right)r^2 - G_0\varepsilon r^2 \end{aligned}$$

$$\bar{h}_{22}^{BD} = [H_t(G_0)]r^2, \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_{33}^{BD} &= h_{33}^{BD} - \frac{1}{2}\eta_{33}h^{BD} - \eta_{33}G_0\varepsilon = h_{33}^{BD} - \frac{1}{2}r^2h^{BD}\text{sen}^2\theta - G_0\varepsilon r^2\text{sen}^2\theta \\ \bar{h}_{33}^{BD} &= \left(\frac{h_{00}^{BD}}{2} - \frac{h_{11}^{BD}}{2} - \frac{h_{22}^{BD}}{2r^2} + \frac{h_{33}^{BD}}{2r^2\text{sen}^2\theta}\right)r^2\text{sen}^2\theta - G_0\varepsilon r^2\text{sen}^2\theta \end{aligned}$$

$$\bar{h}_{33}^{BD} = [H_t(G_0)]r^2\text{sen}^2\theta. \quad (5.76)$$

O índice de refração é dado por

$$n^{BD} = \eta_{ij}^{BD}\hat{k}^i\hat{k}^j = \eta_{11}^{BD}\hat{k}^1\hat{k}^1 + \eta_{22}^{BD}\hat{k}^2\hat{k}^2 + \eta_{33}^{BD}\hat{k}^3\hat{k}^3, \quad (5.77)$$

pois,

$$n_{ij}^{BD} = \left(1 + \frac{1}{2}\bar{h}_{00}^{BD}\right)\delta_{ij} + \frac{1}{2}\bar{h}_{ij}^{BD}. \quad (5.78)$$

Como na Relatividade Geral, as componentes do vetor unitário  $\hat{k}$  satisfazem a

$$\hat{k}^1\hat{k}^1 + r^2\hat{k}^2\hat{k}^2 + r^2\text{sen}^2\theta\hat{k}^3\hat{k}^3 = 1.$$

Com a utilização das equações (5.68), (5.69) e (5.73)-(5.76) em (5.77), vamos obter

$$\begin{aligned} n^{BD} &= \left(1 + \frac{1}{2}H_0(G_0)\right) (\hat{k}^1\hat{k}^1 + r^2\hat{k}^2\hat{k}^2 + r^2\text{sen}^2\theta\hat{k}^3\hat{k}^3) \\ &\quad + \frac{1}{2} (H_r(G_0)\hat{k}^1\hat{k}^1 + H_t(G_0)r^2\hat{k}^2\hat{k}^2 + H_t(G_0)r^2\text{sen}^2\theta\hat{k}^3\hat{k}^3), \end{aligned}$$

ou seja,

$$n^{BD} = 1 + \frac{1}{2}H_0(G_0) + \frac{1}{2} [H_r(G_0)\hat{k}^1\hat{k}^1 + H_t(G_0)r^2(\hat{k}^2\hat{k}^2 + \text{sen}^2\theta\hat{k}^3\hat{k}^3)]. \quad (5.79)$$

Essa expressão é formalmente idêntica à equação (5.29) do caso da Relatividade Geral, evidenciando-se, no entanto, a diferença entre as duas teorias por meio do fator  $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) G$ , que representa a contribuição do campo escalar de Brans-Dicke. Se considerarmos a mesma situação da Figura 5.1, ainda temos que (5.79) fica igual a

$$n^{BD}(r, \chi) = 1 + \frac{1}{2}H_0(G_0) + \frac{1}{2}[H_r(G_0)\cos^2\chi + H_t(G_0)\text{sen}^2\chi]. \quad (5.80)$$

Como,

$$H_t(G_0) = H_r(G_0) + \frac{1}{2}r\partial_r H_r(G_0),$$

pode-se escrever a forma alternativa para o índice de refração,

$$n^{BD}(r, \chi) = 1 + \frac{H_0(G_0)}{2} + \frac{1}{2}[H_r(G_0)\cos^2\chi + (H_r(G_0) + \frac{1}{2}r\partial_r H_r(G_0))\text{sen}^2\chi]$$

$$n^{BD}(r, \chi) = 1 + \frac{1}{2}[H_0(G_0) + H_r(G_0)] + \frac{1}{4}r\partial_r H_r(G_0)\text{sen}^2\chi. \quad (5.81)$$

## 5.6 COMENTÁRIOS

Obtivemos a solução para métricas estáticas com simetria esférica no contexto da teoria de Brans-Dicke, considerando o efeito das pressões internas da fonte. A partir desse resultado, construiu-se uma expressão para o índice de refração, a qual incorporou também o efeito do campo escalar de Brans-Dicke.

Uma aplicação que pode ser feita para a equação (5.81) é o cálculo de  $n^{BD}(r, \chi)$  para o Monopolo de Barriola-Vilenkin (BARRIOLA, 1989), também conhecido como monopolo global. Os monopolos podem ser formados como resultado tanto de uma quebra de simetria local como de uma quebra de simetria global. No primeiro caso, temos o chamado monopolo magnético, cuja existência foi sugerida por Dirac (1931). Ao contrário dos monopolos magnéticos, para os quais a energia está concentrada principalmente no núcleo, os monopolos globais apresentam campos de Goldstone cuja densidade de energia decresce com  $r^{-2}$ , de tal forma que a energia do monopolo varia linearmente com  $r$ . Este fato sugere que os monopolos globais possam produzir efeitos gravitacionais apreciáveis. Uma característica marcante desses monopolos é que o espaço-tempo curvo que eles geram, tanto na Relatividade Geral como na teoria de Brans-Dicke (BARROS, 1997), apresenta um déficit de ângulo sólido nas hipersuperfícies  $t = constante$ , isto é, a área de uma esfera de raio  $r$  neste espaço é diferente de  $4\pi r^2$ .

O tensor energia-momento para a configuração esféricamente simétrica do monopolo global é:

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag} \left( -\frac{\eta^2}{r^2}, -\frac{\eta^2}{r^2}, 0, 0 \right) = \text{diag}(-\rho, p_r, p_t, p_t), \quad (5.82)$$

sendo  $\eta$  a escala de energia da quebra de simetria. Daí, pode-se calcular as quantidades  $H_0(G_0)$  e  $H_r(G_0)$

$$H_0(G_0) = -16\pi G_0 \int \left[ \int \rho r^2 dr \right] r^{-2} dr = -16\pi G_0 \eta^2 \ln \frac{r}{r_0}, \quad (5.83)$$

$$H_r(G_0) = -16\pi G_0 \int \left[ \int p_r r^4 dr \right] r^{-4} dr = \frac{16\pi G_0 \eta^2}{3} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (5.84)$$

onde  $r_0$  é uma constante. Portanto, levando-se (5.83) e (5.84) em (5.81), obtém-se

$$n^{BD}(r, \chi) = 1 + \frac{16\pi G_0 \eta^2}{3} \left[ \frac{\text{sen}^2 \chi}{4} - \ln \frac{r}{r_0} \right]. \quad (5.85)$$

Se os monopolos globais existirem, eles poderiam ser detectados por meio de efeitos como o de lentes gravitacionais (PERLICK, 2004), de modo que o índice de refração associado ao "meio" onde o campo gravitacional do monopolo atua seria dado por (5.85) no contexto da teoria de Brans-Dicke.

## 6 CONCLUSÃO

Consideramos métricas estáticas no contexto da teoria escalar-tensorial de Brans-Dicke, desenvolvendo uma analogia ótica para o campo gravitacional e seus efeitos através da definição de um índice de refração tensorial.

Utilizando-se o formalismo de Boonserm (2005) para a Relatividade Geral, definimos o índice de refração a partir de uma métrica estática de campo fraco. Verificamos que esse índice, na teoria de Brans-Dicke, tem uma expressão formalmente idêntica ao caso da Relatividade Geral, não obstante a substituição da constante gravitacional de Newton pelo fator  $G_0 = \left(\frac{2\omega+3}{2\omega+4}\right) G$ . Este fator representa a contribuição do campo escalar de Brans-Dicke  $\varepsilon$  no índice de refração.

Observamos que os potenciais  $\Psi_{ij}$  também contribuem para o valor do índice de refração tensorial, representando o efeito das pressões internas da fonte. No caso particular em que as pressões são isotrópicas, o índice de refração comporta-se basicamente como um escalar. Adotando uma outra abordagem, Sereno (2003) definiu um índice de refração na teoria de Brans-Dicke, porém sem considerar o efeito das pressões internas da fonte.

No limite  $\omega \rightarrow \infty$ , verifica-se que as expressões obtidas na teoria de Brans-Dicke se reduzem, como esperado, para as expressões já conhecidas na literatura (BOONSERM, 2005) para a Relatividade Geral.

Para se obter as soluções na teoria de Brans-Dicke, fizemos uso de um teorema (BARROS, 1998), o qual relaciona as teorias da Relatividade Geral e de Brans-Dicke para campos gravitacionais fracos.

Consideramos um caso particular do formalismo desenvolvido para as métricas estáticas. Assim, foi obtida a solução estática com simetria esférica para a métrica de Brans-Dicke, considerando a aproximação linear. Utilizando essa solução, fizemos o cálculo do índice de refração tensorial.

Verificamos, na expressão do índice de refração para a métrica com simetria esférica, a participação dos termos relacionados com as pressões internas da fonte e com o campo escalar de Brans-Dicke.

Uma aplicação feita foi o cálculo do índice de refração  $n^{BD}(r, \chi)$  para o Monopolo de Barriola-Vilenkin (BARRIOLA, 1989), também conhecido como monopolo global. Se esses monopolos globais existirem, eles poderiam ser detectados por meio de efeitos como o de lentes gravitacionais (PERLICK, 2004), de modo que o índice de refração associado ao "meio" onde o campo gravitacional do monopolo atua seria dado por (5.85).

Como perspectivas futuras deste trabalho podemos citar: (a) o cálculo do índice de refração tensorial para métricas estacionárias no contexto da teoria de Brans-Dicke, o que corresponde fisicamente a considerar o efeito da rotação da fonte sobre a propagação da luz, (b) o cálculo do índice de refração tensorial para métricas estáticas/estacionárias considerando teorias escalares-tensoriais gerais, em que  $\omega(\phi)$  e (c) o cálculo do índice de refração tensorial "efetivo" para métricas estáticas/estacionárias em uma teoria de Brans-Dicke, o que corresponde a considerar efeitos de segunda ordem em  $h_{\mu\nu}$  por meio da inclusão do próprio campo gravitacional como fonte no tensor energia-momento.

## REFERÊNCIAS

- ADLER, R.; BAZIN, M.; SCHIFFER, M. **Introduction to General Relativity**. Nova York: McGraw-Hill, 1975.
- ASHTEKAR, A.; LEE, J. Weak Field Limit of General Relativity in Terms of New Variables: a Hamiltonian Framework. **Int. J. Mod. Phys. D**, v. 3, p. 675-694, 1994.
- BAESSLER, S.; HECKEL, B. R.; ADELBERGER, E. G.; GUNDLACH, J. H.; SCHMIDT, U.; SWANSON, H. E. Improved Test of the Equivalence Principle for Gravitational Self-Energy. **Phys. Rev. Lett.**, v. 83, p. 3585-3588, 1999.
- BANERJEE, N.; SEN, S. Does Brans-Dicke Theory Always Yield General Relativity in the Infinite  $\omega$  Limit?. **Phys. Rev. D**, v. 56, p. 1334-1337, 1997.
- BARRIOLA, M.; VILENKIN, A. Gravitational Field of a Global Monopole. **Phys. Rev. Lett.**, v. 63, p. 341-343, 1989.
- BARROS, A.; ROMERO, C. On the Weak Field Approximation of Brans-Dicke Theory of Gravity. **Phys. Lett. A**, v. 245, p. 31-34, 1998.
- BARROS, A. e ROMERO, C. Global Monopoles in Brans-Dicke Theory of Gravity. **Phys. Rev. D**, v. 56, p. 6688-6691, 1997.
- BERGMANN, P. G. Comments on the Scalar Tensor Theory. **Int. J. Theor. Phys.** v. 1, p. 25-36, 1968.
- BERTOTTI, B.; IESS, L.; TORTORA, P. A Test of General Relativity Using Radio Links with the Cassini Spacecraft. **Nature**, v. 425, p. 374-376, 2003.
- BOONSERM, P.; CATTOEN, C.; FABER, T.; VISSER, M.; WEINFURTNER, S. Effective Refractive Index Tensor for Weak-Field Gravity. **Class. Quant. Grav.**, v. 22, p. 1905-1915, 2005.
- BRANS, C.; DICKE, R. H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. **Phys. Rev.**, v. 124, p. 925-935, 1961.
- DAMOUR, T.; POLYAKOV, A. The String Dilaton and a Least Coupling Principle. **Nucl. Phys. B**, v. 423, 532-558, 1994.
- DAMOUR, T. Experimental Tests of Relativistic Gravity. **Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) B**, v. 80, p. 41-50, 2000.
- DE FELICE, F. On the Gravitational Field Acting as an Optical Medium. **Gen. Rel. Grav.**, v. 2, p. 347-357, 1971.
- DICKE, R. H.; GOLDENBERG, H. M. Solar Oblateness and General Relativity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 18, p. 313-316, 1967.

- DIRAC, P. A. M. Quantized Singularities in the Electromagnetic Field. **Proc. R. Soc. A**, v. 133, p. 60-72, 1931.
- EDDINGTON, A. S. **Space, Time and Gravitation**. Cambridge: Cambridge University Press, 1920.
- EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation (The Field Equations of Gravitation), **Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften**, p. 844–847, 1915.
- EINSTEIN, A. **O Significado da Relatividade**. Coimbra: Armênio Amado, 1984.
- EINSTEIN, A. **A Teoria da Relatividade Especial e Geral**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999.
- FARAONI, V. Scalar Field Mass in Generalized Gravity. **Class. Quantum Grav.**, v. 26, p. 145014-1 a 145014-11, 2009.
- FARAONI, V. The  $\omega \rightarrow \infty$  Limit of Brans-Dicke Theory. **Phys. Lett. A**, v. 245, p. 26-30, 1998.
- FIERZ, M. Über die Physikalische Deutung der Erweiterten Gravitationstheorie P. Jordans. **Helv. Phys. Acta**, v. 29, p. 128-134, 1956.
- GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. **Superstring Theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- HEWITT, J. N.; TURNER, E. L.; SCHNEIDER, D. P.; BURKE, B. F.; LANGSTON, G. I.; LAWRENCE, C. R. Unusual Radio Source MG1131+0456: A Possible Einstein Ring. **Nature**, v. 333, p. 537-540, 1988.
- HITZER, E.; DEHNEN, H. Integration of Einstein's Equations in the Weak Field Domain using the 'Einstein' Gauge. **Int. J. Theor. Phys.**, v. 36, p. 559-567, 1997.
- JORDAN, P. **Schwerkraft und Weltall**. Braunschweig: Vieweg, 1955.
- KNEIB, J. P.; MELLIER, Y.; FORT, B.; MATHEZ, G. The Dark Matter Distribution in Distant Cluster-Lenses: Modelling A370. **Astron. Astrophys.**, v. 273, p. 367-376, 1993.
- LA, D.; STEINHARDT, P.J. Extended Inflationary Cosmology. **Phys. Rev. Lett.**, v. 62, p. 376-378, 1989.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The Classical Theory of Fields**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 1996.
- LORENTZ, H. A.; EINSTEIN, A; MINKOWSKI, H. **O Princípio da Relatividade**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.
- MISNER, C. W.; THORNE, K.S.; WHEELER, J.A. **Gravitation**. São Francisco: Freeman, 1973.



- MOLLERACH, S.; ROULET, E. **Gravitational Lensing and Microlensing**. Cingapura: World Scientific, 2002.
- NANDI, K. K.; ISLAM, A. On the Optical-Mechanical Analogy in General Relativity. *Am. J. Phys.*, v. 63, p. 251-256, 1995.
- NORDTVEDT, K. Post-Newtonian Metric for a General Class of Scalar-Tensor Gravitational Theories and Observational Consequences. **Astrophys. J.**, v. 161, p. 1059-1067, 1970.
- OHANIAN, H. C. **Gravitation and Spacetime**. Nova York: Norton, 1976.
- PAPAPETROU, A. **Lectures on General Relativity**. Dordrecht: Reidel, 1974
- PERLICK, V. On the Exact Gravitational Lens Equation in Spherically Symmetric and Static Spacetimes. **Phys. Rev. D**, v. 69, p. 064017-1 a 064017-10, 2004.
- PLEBANSKI, J. Electromagnetic Waves in Gravitational Fields. **Phys. Rev.**, v. 118, p. 1396-1408, 1960.
- ROMERO, C.; BARROS, A. Does the Brans-Dicke Theory of Gravity go over to General Relativity when  $\omega \rightarrow \infty$  ?. **Phys. Lett. A**, v. 173, p. 243-246, 1993.
- SCHNEIDER, P. Detection of (Dark) Matter Concentrations via Weak Gravitational Lensing. **Mon. Not. R. Astron. Soc.**, v. 283, p. 837-853, 1996.
- SCHNEIDER, P.; EHLERS, J.; FALCO E. E. **Gravitational Lenses**. Berlin: Springer, 1993.
- SERENO, M. Gravitational Lensing in Metric Theories of Gravity. **Phys. Rev. D**, v. 67, p. 064007-1 a 064007-7, 2003.
- SHAPIRO, S. S.; DAVIS, J. L., LEBACH, D. E.; GREGORY, J. S. Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979–1999. **Phys. Rev. Lett.**, v. 92, p. 121101-1 a 121101-4, 2004.
- SHAPIRO, I. I. Fourth Test of General Relativity. **Phys. Rev. Lett.**, v. 13, p. 789 - 791, 1964.
- WAGONER, R. V. Scalar tensor theory and gravitational waves. **Phys. Rev. D**, v. 1, 3209-3216, 1970.
- WEINBERG, S. **Cosmology**. Nova York: Oxford University Press, 2008.
- WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**. Nova York: Wiley, 1972.
- WILL, C. M. Was Einstein Right? Testing Relativity at the Centenary. **Annalen Phys.**, v. 15, p. 19-33, 2005.
- WILL, C. M. **Theory and Experiment in Gravitational Physics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- WILLIAMS, J. G.; NEWHALL, X. X.; DICKEY, J. O. Relativity parameters determined from lunar laser ranging. **Phys. Rev. D**, v. 53, 6730-6739, 1996.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A - Cálculo das quantidades $T^{0\beta}{}_{;\beta}$ , $T^{2\beta}{}_{;\beta}$ e $T^{3\beta}{}_{;\beta}$

Temos que

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} T^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\beta} T^{\alpha\gamma}.$$

Assim, obtemos

$$\begin{aligned} T^{0\beta}{}_{;\beta} &= T^{0\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^0{}_{\gamma\beta} T^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\beta} T^{0\gamma} \\ T^{0\beta}{}_{;\beta} &= \Gamma^0{}_{00} T^{00} + \Gamma^0{}_{11} T^{11} + \Gamma^0{}_{22} T^{22} + \Gamma^0{}_{33} T^{33} + \Gamma^{\beta}{}_{0\beta} T^{00} \\ T^{0\beta}{}_{;\beta} &= \Gamma^1{}_{01} T^{00} + \Gamma^2{}_{02} T^{00} + \Gamma^3{}_{03} T^{00} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

E também,

$$\begin{aligned} T^{2\beta}{}_{;\beta} &= T^{2\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^2{}_{\gamma\beta} T^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}{}_{\gamma\beta} T^{2\gamma} \\ T^{2\beta}{}_{;\beta} &= T^{22}{}_{,2} + \Gamma^2{}_{00} T^{00} + \Gamma^2{}_{11} T^{11} + \Gamma^2{}_{33} T^{33} + \Gamma^2{}_{22} T^{22} + \Gamma^{\beta}{}_{2\beta} T^{22} \\ T^{2\beta}{}_{;\beta} &= \Gamma^2{}_{33} T^{33} + \Gamma^3{}_{23} T^{22}. \end{aligned} \quad (2)$$

Calculando  $\Gamma^2{}_{33}$  e  $\Gamma^3{}_{23}$ , vem

$$\Gamma^2{}_{33} = \frac{1}{2} \eta^{2\rho} (-\eta_{33,\rho} + \eta_{\rho 3,3} + \eta_{3\rho,3}) = \frac{1}{2} \eta^{22} (-\eta_{33,2}),$$

$$\Gamma^3{}_{23} = \frac{1}{2} \eta^{3\rho} (-\eta_{23,\rho} + \eta_{\rho 2,3} + \eta_{3\rho,2}) = \frac{1}{2} \eta^{33} (\eta_{33,2}).$$

Sabendo ainda que  $T_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} T^{\gamma\delta}$ , pode-se escrever

$$T_{22} = (\eta_{22})^2 T^{22} = r^4 T^{22},$$

$$T_{33} = (\eta_{33})^2 T^{33} = r^4 \text{sen}^4 \theta T^{33}.$$

Substituindo-se esses resultados em (6), encontra-se que

$$T^{2\beta}{}_{;\beta} = \frac{1}{2}\eta^{22}(-\eta_{33,2})\frac{T_{33}}{r^4\text{sen}^4\theta} + \frac{1}{2}\eta^{33}(\eta_{33,2})\frac{T_{22}}{r^4}$$

$$T^{2\beta}{}_{;\beta} = 0. \quad (3)$$

Finalmente,

$$T^{3\beta}{}_{;\beta} = T^{3\beta}{}_{,\beta} + \Gamma^3_{\gamma\beta}T^{\gamma\beta} + \Gamma^{\beta}_{\gamma\beta}T^{3\gamma}$$

$$T^{3\beta}{}_{;\beta} = T^{33}{}_{,3} + \Gamma^3_{00}T^{00} + \Gamma^3_{11}T^{11} + \Gamma^3_{22}T^{22} + \Gamma^3_{33}T^{33} + \Gamma^{\beta}_{3\beta}T^{33}$$

$$T^{3\beta}{}_{;\beta} = \Gamma^0_{30}T^{33} + \Gamma^1_{31}T^{33} + \Gamma^2_{32}T^{33} = 0. \quad (4)$$

APÊNDICE B - Cálculo de  $\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta}$

Sabemos que  $\nabla^2 \bar{h}_{\alpha\beta} \equiv \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma}{}^{;\gamma} = \eta^{\gamma\delta} \bar{h}_{\alpha\beta;\gamma;\delta}$ . Daí, tem-se que

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{h}_{00} &= \eta^{\gamma\delta} \bar{h}_{00;\gamma;\delta} = \eta^{00} \bar{h}_{00;0;0} + \eta^{11} \bar{h}_{00;1;1} + \eta^{22} \bar{h}_{00;2;2} + \eta^{33} \bar{h}_{00;3;3} \\
\nabla^2 \bar{h}_{00} &= -(\bar{h}_{00,0} - 2\Gamma_{00}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0});_0 + (\bar{h}_{00,1} - 2\Gamma_{01}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0});_1 + \frac{1}{r^2} (\bar{h}_{00,2} - 2\Gamma_{02}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0});_2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} (\bar{h}_{00,3} - 2\Gamma_{03}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0});_3 \\
\nabla^2 \bar{h}_{00} &= -(\bar{h}_{00,0} - 2\Gamma_{00}^0 \bar{h}_{00});_0 + (\bar{h}_{00,1} - 2\Gamma_{01}^0 \bar{h}_{00});_1 + \frac{1}{r^2} (\bar{h}_{00,2} - 2\Gamma_{02}^0 \bar{h}_{00});_2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} (\bar{h}_{00,3} - 2\Gamma_{03}^0 \bar{h}_{00});_3 \\
\nabla^2 \bar{h}_{00} &= -(-2\Gamma_{00}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0,0} - \Gamma_{00}^\alpha \bar{h}_{00,\alpha}) + 2(-2\Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^0 \bar{h}_{00} - \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{00}^0 \bar{h}_{\alpha 0}) + \bar{h}_{00,1,1} \\
&\quad - 2\Gamma_{01}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0,1} - \Gamma_{11}^\alpha \bar{h}_{00,\alpha} - 2((\Gamma_{01}^0 \bar{h}_{00})_{,1} - \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{\alpha 1}^0 \bar{h}_{00} - \Gamma_{11}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^0 \bar{h}_{00} \\
&\quad - \Gamma_{01}^\alpha \Gamma_{01}^0 \bar{h}_{\alpha 0}) + \frac{1}{r^2} (-2\Gamma_{02}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0,2} - \Gamma_{22}^\alpha \bar{h}_{00,\alpha}) - \frac{2}{r^2} (-\Gamma_{02}^\alpha \Gamma_{\alpha 2}^0 \bar{h}_{00} \\
&\quad - \Gamma_{22}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^0 \bar{h}_{00} - \Gamma_{02}^\alpha \Gamma_{02}^0 \bar{h}_{\alpha 0}) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} (-2\Gamma_{03}^\alpha \bar{h}_{\alpha 0,3} - \Gamma_{33}^\alpha \bar{h}_{00,\alpha}) \\
&\quad - \frac{2}{r^2 \text{sen}^2 \theta} (-\Gamma_{03}^\alpha \Gamma_{\alpha 3}^0 \bar{h}_{00} - \Gamma_{33}^\alpha \Gamma_{0\alpha}^0 \bar{h}_{00} - \Gamma_{03}^\alpha \Gamma_{03}^0 \bar{h}_{\alpha 0}) \\
\nabla^2 \bar{h}_{00} &= \frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \Gamma_{22}^1 \bar{h}_{00,1} - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \Gamma_{33}^1 \bar{h}_{00,1} \\
\nabla^2 \bar{h}_{00} &= \frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2} - \frac{1}{2r^2} \eta^{11} (-\eta_{22,1}) \bar{h}_{00,1} - \frac{1}{2r^2 \text{sen}^2 \theta} \eta^{11} (-\eta_{33,1}) \bar{h}_{00,1} \\
\nabla^2 \bar{h}_{00} &= \frac{\partial^2 H_0}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_0}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_0). \tag{5}
\end{aligned}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{h}_{11} &= \eta^{00} \bar{h}_{11;0;0} + \eta^{11} \bar{h}_{11;1;1} + \eta^{22} \bar{h}_{11;2;2} + \eta^{33} \bar{h}_{11;3;3} \\
\nabla^2 \bar{h}_{11} &= -(\bar{h}_{11,0} - 2\Gamma_{10}^\alpha \bar{h}_{\alpha 1});_0 + (\bar{h}_{11,1} - 2\Gamma_{11}^\alpha \bar{h}_{1\alpha});_1 + \frac{1}{r^2} (\bar{h}_{11,2} - 2\Gamma_{12}^\alpha \bar{h}_{1\alpha});_2 \\
&\quad + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} (\bar{h}_{11,3} - 2\Gamma_{13}^\alpha \bar{h}_{\alpha 1});_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{h}_{11} &= \bar{h}_{11,1,1} - \frac{1}{r^2} \Gamma_{22}^1 \bar{h}_{11,1} + \frac{2}{r^2} \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 \bar{h}_{11} - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \Gamma_{33}^1 \bar{h}_{11,1} \\ &\quad + \frac{2}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 \bar{h}_{11} + \frac{2}{r^2} \Gamma_{12}^\alpha \Gamma_{12}^2 \bar{h}_{\alpha 2} + \frac{2}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \Gamma_{13}^\alpha \Gamma_{13}^3 \bar{h}_{3\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{h}_{11} &= \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} - \frac{1}{2r^2} \eta^{11} (-\eta_{22,1}) \bar{h}_{11,1} - \frac{1}{2r^2 \text{sen}^2 \theta} \eta^{11} (-\eta_{33,1}) \bar{h}_{11,1} \\ &\quad + \eta^{22} \eta_{22,1} \frac{1}{2r^2} \eta^{11} (-\eta_{22,1}) \bar{h}_{11,1} + \eta^{33} \eta_{33,1} \frac{1}{2r^2 \text{sen}^2 \theta} \eta^{11} (-\eta_{33,1}) \bar{h}_{11} \\ &\quad + \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \eta^{22} \eta_{22,1} \right)^2 \bar{h}_{22} + \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \eta^{33} \eta_{33,1} \right)^2 \bar{h}_{22}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{11} = \frac{\partial^2 H_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_r}{\partial r} - \frac{4}{r^2} H_r + \frac{4}{r^2} H_t = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_r) - 4 \left( \frac{H_r - H_t}{r^2} \right). \quad (6)$$

E ainda,

$$\nabla^2 \bar{h}_{22} = \eta^{00} \bar{h}_{22;0;0} + \eta^{11} \bar{h}_{22;1;1} + \eta^{22} \bar{h}_{22;2;2} + \eta^{33} \bar{h}_{22;3;3}$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{22} = (\bar{h}_{22,1} - 2\Gamma_{21}^\alpha \bar{h}_{\alpha 2});_1 + \frac{1}{r^2} (\bar{h}_{22,2} - 2\Gamma_{22}^\alpha \bar{h}_{\alpha 2});_2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} (\bar{h}_{22,3} - 2\Gamma_{23}^\alpha \bar{h}_{\alpha 2});_3$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{h}_{22} &= (\bar{h}_{22,1} - 2\Gamma_{21}^0 \bar{h}_{02} - 2\Gamma_{21}^1 \bar{h}_{12} - 2\Gamma_{21}^2 \bar{h}_{22} - 2\Gamma_{21}^3 \bar{h}_{32});_1 + \frac{1}{r^2} (\bar{h}_{22,2} \\ &\quad - 2\Gamma_{22}^0 \bar{h}_{02} - 2\Gamma_{22}^1 \bar{h}_{12} - 2\Gamma_{22}^2 \bar{h}_{22} - 2\Gamma_{22}^3 \bar{h}_{32});_2 + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} (\bar{h}_{22,3} \\ &\quad - 2\Gamma_{23}^0 \bar{h}_{02} - 2\Gamma_{23}^1 \bar{h}_{12} - 2\Gamma_{23}^2 \bar{h}_{22} - 2\Gamma_{23}^3 \bar{h}_{32});_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{h}_{22} &= \bar{h}_{22,1,1} - 2\Gamma_{21}^2 \bar{h}_{22,1} - 2(\Gamma_{21}^2 \bar{h}_{22})_{,1} + 2(\Gamma_{21}^2)^2 \bar{h}_{22} + 2(\Gamma_{21}^2)^2 \bar{h}_{22} \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \Gamma_{22}^1 \bar{h}_{22,1} + \frac{2}{r^2} (\Gamma_{22}^1)^2 \bar{h}_{11} + \frac{4}{r^2} \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 \bar{h}_{22} - \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \Gamma_{33}^1 \bar{h}_{22,1} \\ &\quad + \frac{2\Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2 \bar{h}_{22}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} + \frac{2\Gamma_{33}^1 \Gamma_{21}^2 \bar{h}_{22}}{r^2 \text{sen}^2 \theta} + \frac{2(\Gamma_{23}^3)^2 \bar{h}_{33}}{r^2 \text{sen}^2 \theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{h}_{22} &= \frac{\partial^2 (H_t r^2)}{\partial r^2} - \eta^{22} \eta_{22,1} \bar{h}_{22,1} - (\eta^{22} \eta_{22,1} \bar{h}_{22})_{,1} + 4(\Gamma_{21}^2)^2 \bar{h}_{22} \\ &\quad - \frac{1}{2r^2} \eta^{11} (-\eta_{22,1}) \bar{h}_{22,1} + \frac{2}{r^2} \left( \frac{1}{2} \eta^{11} (-\eta_{22,1}) \right)^2 \bar{h}_{11} \\ &\quad + 2\eta^{11} (-\eta_{22,1}) \Gamma_{12}^2 \frac{\bar{h}_{22}}{r^2} - \frac{1}{2r^2 \text{sen}^2 \theta} \eta^{11} (-\eta_{33,1}) \bar{h}_{22,1} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \eta^{33} \eta_{33,2} \Gamma_{33}^2 \bar{h}_{22} + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \eta^{11} (-\eta_{33,1}) \Gamma_{21}^2 \bar{h}_{22} \\ &\quad + \frac{2}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \left( \frac{1}{2} \eta^{33} \eta_{33,2} \right)^2 \bar{h}_{33}\end{aligned}$$

$$\nabla^2 \bar{h}_{22} = \frac{\partial^2 H_t}{\partial r^2} r^2 + 4r \frac{\partial H_t}{\partial r} + 2H_t - \frac{2\bar{h}_{22,1}}{r} + 2\bar{h}_{11}$$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{h}_{22} &= \left( \frac{\partial^2 H_t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial H_t}{\partial r} + \frac{2H_r}{r^2} \right) r^2 + \frac{2r^2}{r} \frac{\partial H_t}{\partial r} + \frac{2H_t r^2}{r^2} - \frac{2}{r} [(H_t r^2)_{,1}] \\
\nabla^2 \bar{h}_{22} &= \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_t) + \frac{2H_r}{r^2} \right] r^2 + \left( \frac{2H_t}{r^2} \right) r^2 - 4H_t \\
\nabla^2 \bar{h}_{22} &= \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_t) + \frac{2H_r}{r^2} \right] r^2 - \frac{2H_t}{r^2} r^2 \\
\nabla^2 \bar{h}_{22} &= \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_t) + 2 \left( \frac{H_r - H_t}{r^2} \right) \right] r^2. \tag{7}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \bar{h}_{33} &= (\nabla^2 \bar{h}_{22}) \text{sen}^2 \theta \\
\nabla^2 \bar{h}_{33} &= \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r H_t) + 2 \left( \frac{H_r - H_t}{r^2} \right) \right] r^2 \text{sen}^2 \theta. \tag{8}
\end{aligned}$$