



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

BRISA MARGARITA TEREZÓN SEGURA

**COLAPSO GRAVITACIONAL EM KANTOWSKI-SACHS**

Boa Vista, RR

2017

BRISA MARGARITA TEREZÓN SEGURA

**COLAPSO GRAVITACIONAL EM KANTOWSKI-SACHS**

Texto dissertativo apresentado como pré-requisito para obtenção de título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima. Área de Concentração: Cosmologia e Gravitação.

Orientador: Prof. Dr. Miguel Gustavo de Campos Batista

Boa Vista, RR

2017

BRISA MARGARITA TEREZÓN SEGURA

**COLAPSO GRAVITACIONAL EM KANTOWSKI-SACHS**

Texto dissertativo apresentado como pré-requisito para obtenção de título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima. Área de Concentração: Cosmologia e Gravitação. Apresentado em 22 de Junho de 2017 e avaliado pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. Miguel Gustavo de Campos Batista  
(Presidente) Universidade Federal de Roraima -  
UFRR

---

Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira  
(Membro) Universidade Federal de Roraima -  
UFRR

---

Prof. Dr. Júlio César Fabris  
(Membro externo) Universidade Federal do  
Espírito Santo - UFES

Boa Vista, RR

2017

## **AGRADECIMENTOS**

Para minha família pelo apoio incondicional no meu projeto de vida.

Ao professor Dr. Miguel Gustavo de Campos Batista, pelos consertos, ensino acadêmico, e dicas de vida ao longo da pesquisa.

Aos colegas do mestrado pela ajuda no uso de ferramentas computacionais usadas no Programa de Pós-Graduação.

À Universidad Don Bosco pelo apoio financeiro para poder aceitar a oportunidade de estudar o mestrado no Brasil.

Ao "Programa de Alianzas para la Educación y la Capacitación (PAEC)" da Organização dos Estados Americanos (OEA) e o Grupo Coimbra de Universidades Brasileiras, pela oferta de estudos no Brasil.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro através da bolsa concedida.

## RESUMO

Penso que podemos dizer que a grande maioria dos pesquisadores em física, particularmente os que trabalham com a interação gravitacional, são além de pesquisadores, também professores. De tal modo que lidar com o estudo do universo, bem como o tratamento com pessoas diversas, pelo professor, são tarefas equivalentemente complicadas. Uma característica que envolve um grande número de pessoas é o fato de que constitui em suas melhores qualidades, podem também enredar os seus defeitos.

Assim, acontece com o modelo de FRW (Friedmann-Robertson-Walker), o que em princípio é uma qualidade, por outro lado, também pode ser um defeito, a isotropia.

O objetivo final deste trabalho considera um modelo que é anisotrópico, o de Kantowski-Sachs. Os modelos anisotrópicos podem ser úteis no estudo de campos magnéticos globais, incluir rotação, e ainda representar modos anisotrópicos.

Veremos, em nosso estudo, que a formação de singularidade, adquire características peculiares em se tratando de um modelo anisotrópico.

Podemos ver, na literatura especializada, que modelos anisotrópicos não são levados em conta para caracterizar o universo atual, todavia, como estamos abordando o processo de colapso gravitacional a estória é outra.

Resumindo, trataremos do processo de integração das equações de campo da teoria da relatividade geral considerando o espaço-métrico de Kantowski-Sachs, abordando o processo de colapso gravitacional.

**Palavras-Chaves:** Modelo de Kantowski-Sachs, colapso gravitacional, solução de Schwarzschild, métrica FLRW.

## ABSTRACT

I think we can say that the vast majority of researchers in physics, particularly those working with gravitational interaction, are beyond researchers as well as teachers. In such a way that to deal with the study of the universe as well as the treatment with diverse people by the professor are equivalently tasks complicated.

A feature that involves a large number of people is the fact of what constitutes their best qualities, they can also entangle their defects. This is the case with the FRW (Friedmann-Robertson-Walker) model, which in principle is a quality, on the other hand it is also defect, isotropy.

Anisotropic models can be useful in the study of global magnetic fields, include rotation, and still represent anisotropic modes.

We will see in our study that the formation of singularities acquires peculiar characteristics in the case of an anisotropic model.

We can see in the specialized literature that anisotropic models are not taken into account to characterize the current universe, however as we are approaching the process of gravitational collapse the story is different.

In short, we will deal with the process of integrating the field equations of general relativity theory by considering Kantowski-Sachs metric space, approaching the process of gravitational collapse.

**KeyWords:** Kantowski-Sachs model, gravitational collapse, Schwarzschild solution, FLRW metric.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução do fator de escala $R(t)$ das equações de Friedmann, para $k = -1$ , $k = 0$ e $k = +1$ . . . . .	30
Figura 2 – Evolução do fator de escala $B(\eta)$ do modelo KS, para $K = 0$ . . . . .	41
Figura 3 – Evolução do fator de escala $A(\eta)$ , para o caso $K = 0$ . . . . .	41
Figura 4 – Evolução do fator de escala $B(\eta)$ , para o caso $K = 1$ . . . . .	42
Figura 5 – Evolução do fator de escala $A(\eta)$ , do modelo KS para $K = 1$ . . . . .	43
Figura 6 – Evolução dos fatores de escala $B(\eta)$ , $A(\eta)$ e $A'(\eta)$ do modelo KS para $K = 1$ . . . . .	44
Figura 7 – Evolução do fator de escala $B(\eta)$ , do modelo KS para o caso $K = -1$ . . . . .	45
Figura 8 – Evolução do fator de escala $A(\eta)$ , do modelo KS para o caso $K = -1$ . . . . .	45
Figura 9 – Evolução do escalar de Weyl do modelo KS, para o caso $K = 0$ . . . . .	46
Figura 10 – Evolução do escalar de Kretschmann do modelo KS, para o caso $K = 0$ . . . . .	47
Figura 11 – Evolução do escalar de Weyl do modelo KS para $K = 1$ . . . . .	48
Figura 12 – Evolução do escalar de Kretschmann, do modelo KS para $K = 1$ . . . . .	48
Figura 13 – Evolução do escalar de Weyl, do modelo KS para o caso $K = -1$ . . . . .	49
Figura 14 – Evolução do escalar de Kretschmann, do modelo KS para o caso $K = -1$ . . . . .	49

## LISTA DE SÍMBOLOS

$G^{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$R(t)$	Fator de escala para o modelo FRW
$\Lambda$	Constante cosmológica
$g^{\mu\nu}$	Tensor métrico
$T^{\mu\nu}$	Tensor momento-energia
$R_{\sigma\rho}$	Tensor de Ricci
$R_{\lambda\rho\sigma\nu}$	Tensor de Riemann
$R$	Escalar de Ricci
$\xi_\nu$	Vetor de Killing
$\rho$	Densidade de matéria-energia do fluido
$p$	Pressão do fluido
$u$	Quadri-velocidade do fluido
$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$	Símbolos de Christoffel
$\omega$	Parâmetro da equação de estado
$R_*$	Fator de escala para um tempo específico
$\rho_*$	Densidade de momento-energia de um tempo específico
$q(t)$	Parâmetro de desaceleração
$q_*$	Parâmetro de desaceleração para um tempo específico
$H(t)$	Função de Hubble
$B(\eta)$	Fator de escala no modelo Kantowski-Sachs para o tempo conforme
$A(\eta)$	Fator de escala no modelo Kantowski-Sachs para o tempo conforme

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>ESPAÇOS SIMÉTRICOS</b> . . . . .	<b>11</b>
2.1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2.2	ESPAÇOS MAXIMAMENTE SIMÉTRICOS . . . . .	11
2.3	SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD . . . . .	15
2.4	OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS . . . . .	18
<b>2.4.1</b>	<b>Coordenadas Eddington-Finkelstein</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>2.4.2</b>	<b>Coordenadas Kruskal</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.4.3</b>	<b>Coordenadas Painlevé-Gullstrand</b> . . . . .	<b>20</b>
2.5	MODELO COSMOLÓGICO DE FRIEDMANN . . . . .	22
<b>2.5.1</b>	<b>A métrica de Friedmann-Robertson-Walker e a máxima simetria</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2.5.2</b>	<b>Equações de campo cosmológicas</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.5.3</b>	<b>Modelo de Friedmann Unificado</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>2.5.4</b>	<b>Solução unificada para o tempo conforme</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>MODELO ANISOTRÓPICO KANTOWSKI-SACHS</b> . . . . .	<b>36</b>
3.1	INTRODUÇÃO . . . . .	36
3.2	EQUAÇÕES DE CAMPO . . . . .	37
3.3	COLAPSO GRAVITACIONAL NO MODELO KANTOWSKI-SACHS . . . . .	38
3.4	ESCALARES PARA O MODELO KANTOWSKI-SACHS . . . . .	45
<b>4</b>	<b>CONCLUSÕES</b> . . . . .	<b>50</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>51</b>
	<b>APÊNDICE A – COMPONENTES TENSORIAIS USANDO GR-TENSOR</b> . . . . .	<b>54</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Presentemente, a teoria da relatividade geral (TRG) e a interação gravitacional nos dá a nítida impressão de uma teoria feita sob medida para tratar a gravidade. Assim, podemos dizer que a aplicação da TRG à cosmologia, e a dinâmica estelar, constituem as duas áreas que sofreram transformações profundas depois de adotados pela TGR.

Quando citamos a dinâmica estelar, queremos relatar, mais especificamente, o processo de colapso gravitacional. Todavia, personificando o estado da evolução do universo, e o processo de colapso gravitacional, podemos dizer que estes dois podem ser considerados parentes muito próximos. Longe de nós está a árdua tarefa de traçar este paralelo, onde nos restringimos a tão somente discutir a formulação das soluções de campo de Einstein, considerando o processo de colapso gravitacional, fazendo uso do espaço métrico de Kantowski-Sachs.

O nosso trabalho divide-se nas seguintes etapas:

- Vamos discutir espaços maximamente simétricos, onde colocamos os dois exemplos mais populares: O modelo de Schwarzschild e o modelo de Friedmann. Em particular, para o modelo de integração das equações de campo de um modo unificado e que servirá de subsídio para o caso Kantowski-Sachs.
- Posteriormente, vamos adentrar pelo espaço-tempo de Kantowski-Sachs, descrevendo em linhas gerais o que já existe na literatura. Nesta mesma parte, também colocamos os nossos cálculos e considerações do processo de colapso gravitacional usando Kantowski-Sachs, até o ponto que nos foi possível alcançar durante pouco mais de um ano de trabalho.
- Por fim, colocaremos de modo simplificado: as perspectivas futuras e uma ou outra observações necessárias.

## 2 ESPAÇOS SIMÉTRICOS

### 2.1 INTRODUÇÃO

Os problemas que envolvam a interação gravitacional, de um modo geral, sofrem pela falta de simetrias envolvidas, o que torna a solução das equações de Einstein uma tarefa árdua. Todavia, o estudo de simetrias é importante para, pelo menos, nos guiar no procedimento de integração das equações de campo. Naturalmente, uma descrição covariante das simetrias nos tira do limite da escolha de um sistema de coordenadas em particular.

Neste capítulo, vamos falar de um processo de espaços maximamente simétricos, seguindo de perto o livro de Steven Weinberg (WEINBERG, 1972), e colocar os exemplos mais populares de espaços maximamente simétricos: Solução de Schwarzschild e a solução de FRW (Friedmann-Robertson-Walter).

### 2.2 ESPAÇOS MAXIMAMENTE SIMÉTRICOS

Vamos considerar um espaço-tempo descrito por um tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$ , e que este passa de um sistema de coordenadas  $x \rightarrow x'$ . Quando isso ocorre, o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  passa a ser  $g'_{\mu\nu}$ . Todavia, quando o argumento permanece inalterado, e temos

$$g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x), \quad (2.1)$$

podemos dizer que o tensor métrico é invariante perante a transformação de coordenadas  $x \rightarrow x'$ .

Embora seja muito parecida, a transformação dada pela Eq. (2.1) não é igual a transformação de um escalar:

$$F'(x') = F(x). \quad (2.2)$$

A lei de transformação do tensor métrico perante a mudança de coordenadas, é dada, por:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x), \quad (2.3)$$

ou similarmente

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x'). \quad (2.4)$$

Quando a condição dada pela Eq. (2.1) é válida, conseqüentemente:

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} g'_{\rho\sigma}(x'), \quad (2.5)$$

e a transformação para a qual a Eq. (2.5) é válida é chamada uma isometria.

A isometria é uma restrição muito severa, mas é simplificada considerando o caso especial de uma transformação infinitesimal de coordenadas, que vamos denotar pela equação:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \varepsilon \xi^{\mu}(x). \quad (2.6)$$

Consideremos as Eq. (2.5) e a Eq. (2.6), e levando em conta apenas os termos em primeira ordem em  $\varepsilon$ , podemos escrever

$$0 = \frac{\partial \xi^{\mu}(x)}{\partial x^{\rho}} g_{\mu\sigma}(x) + \frac{\partial \xi^{\nu}(x)}{\partial x^{\sigma}} g_{\rho\nu}(x) + \xi^{\mu}(x) \frac{\partial g_{\rho\sigma}(x)}{\partial x^{\mu}}, \quad (2.7)$$

a qual pode ser escrita em termos de derivadas covariantes do seguinte modo:

$$\xi_{\sigma;\rho} + \xi_{\rho;\sigma} = 0. \quad (2.8)$$

A Eq. (2.8) é conhecida por equação de Killing, e  $\xi$  é conhecido por vetor de Killing da métrica em questão.

Assim, o problema para encontrar todas as isometrias infinitesimais é correlacionado ao problema de determinar todos os vetores de Killing de um espaço-tempo.

Trabalhando um pouco mais com a equação de Killing, consideremos o comutador de derivadas covariantes

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} = R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda} \xi_{\lambda}, \quad (2.9)$$

e a soma cíclica para o tensor de Riemann

$$R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda} + R_{\mu\sigma\rho}^{\lambda} + R_{\rho\mu\sigma}^{\lambda} = 0. \quad (2.10)$$

Assim, podemos determinar que qualquer vetor de Killing  $\xi_{\mu}$  deve satisfazer

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} + \xi_{\mu;\sigma;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} + \xi_{\rho;\mu;\sigma} - \xi_{\rho;\sigma;\mu} = 0, \quad (2.11)$$

ou equivalentemente,

$$\xi_{\sigma;\rho;\mu} - \xi_{\sigma;\mu;\rho} - \xi_{\mu;\rho;\sigma} = 0. \quad (2.12)$$

Logo, a Eq. (2.11) pode ser reescrita:

$$\xi_{\mu;\rho;\sigma} = -R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda} \xi_{\lambda}. \quad (2.13)$$

Algumas métricas podem possuir o número máximo de vetores de Killing, porém, isso não é o que geralmente ocorre.

Caso tenhamos as condições iniciais, a Eq. (2.13) pode, a princípio, ser integrada, o que naturalmente, depende da métrica.

Considerando a comutatividade de derivadas covariantes, podemos escrever a relação:

$$\xi_{\rho;\mu;\sigma;\nu} - \xi_{\rho;\mu\nu;\sigma} = -R_{\rho\sigma\nu}^{\lambda}\xi_{\lambda;\nu} - R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda}\xi_{\rho;\lambda}. \quad (2.14)$$

A Eq. (2.13) irá satisfazer esta condição, se e somente se

$$R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda}\xi_{\lambda;\nu} - R_{\nu\rho\mu}^{\lambda}\xi_{\lambda;\sigma} + (R_{\sigma\rho\mu;\nu}^{\lambda} - R_{\nu\rho\mu;\sigma}^{\lambda})\xi_{\lambda} = -R_{\rho\sigma\nu}^{\lambda}\xi_{\lambda;\mu} - R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda}\xi_{\rho;\lambda}. \quad (2.15)$$

Fazendo uso da equação de Killing, a Eq. (2.15) assume a forma

$$\{-R_{\rho\sigma\nu}^{\lambda}\delta_{\mu}^{\nu} + R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda}\delta_{\rho}^{\nu} - R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda}\delta_{\nu}^{\nu} + R_{\nu\rho\mu}^{\lambda}\delta_{\sigma}^{\nu}\}\xi_{\lambda;k} = \{R_{\sigma\rho\mu;\nu}^{\lambda} - R_{\nu\rho\mu;\sigma}^{\lambda}\}\xi_{\lambda}. \quad (2.16)$$

Em geral, estas relações impõem relações lineares entre  $\xi_{\lambda;k}$ , em um dado ponto.

Resumindo, se conhecemos algo sobre os vetores de Killing admitidos por uma métrica, então podemos usar a Eq. (2.16) para aprender algo sobre seu tensor de curvatura.

Note que a existência de um determinado número de vetores de Killing não depende, em particular, da escolha do sistema de coordenadas.

Os espaços maximamente simétricos são caracterizados pela curvatura e pelo número de auto-valores da métrica. Usando outras palavras, para dois espaços-tempo maximamente simétricos, que possuem o mesmo número de auto-valores, sempre será possível realizar uma transformação de coordenadas, ligando as duas métricas correspondentes. Esta liberdade nos permite construir espaços métricos em um sistema de coordenadas específico, e que seja conveniente.

Observando os coeficientes da relação na Eq. (2.16) estes devem possuir uma parte antisimétrica nula, ou seja:

$$-R_{\rho\sigma\nu}^{\lambda}\delta_{\mu}^{\nu} + R_{\mu\sigma\nu}^{\lambda}\delta_{\rho}^{\nu} - R_{\sigma\rho\mu}^{\lambda}\delta_{\nu}^{\nu} + R_{\nu\rho\mu}^{\lambda}\delta_{\sigma}^{\nu} = R_{\rho\sigma\nu}^k\delta_{\mu}^{\lambda} + R_{\mu\sigma\nu}^k\delta_{\rho}^{\lambda} - R_{\sigma\rho\mu}^k\delta_{\nu}^{\lambda} + R_{\nu\rho\mu}^k\delta_{\sigma}^{\lambda}. \quad (2.17)$$

Assim, a Eq. (2.17) com a Eq. (2.16) requerem que:

$$R_{\sigma\rho\mu;\nu}^{\lambda} = R_{\nu\rho\mu;\sigma}^{\lambda}, \quad (2.18)$$

para espaços-tempo maximamente simétricos.

Um espaço-tempo que é isotrópico em cada ponto, e portanto satisfaz a Eq. (2.17), deve ser homogêneo e deve também satisfazer a Eq. (2.18).

Para comprovação da Eq. (2.18), fazemos uma contração de  $k$  com  $\mu$  na Eq. (2.17), resultando:

$$-NR_{\rho\sigma\nu}^{\lambda} + R_{\rho\sigma\nu}^{\lambda} - R_{\sigma\rho\nu}^{\lambda} + R_{\nu\rho\sigma}^{\lambda} = -R_{\rho\sigma\nu}^{\lambda} + R_{\sigma\rho}\delta_{\nu}^{\lambda} - R_{\nu\rho}\delta_{\sigma}^{\lambda}. \quad (2.19)$$

Note que

$$R_{k\sigma\nu}^k = 0, \quad (2.20)$$

e que  $R_{\sigma\rho}$  é o tensor de Ricci. Logo,  $N = \delta_k^k$  é o número de dimensões.

Usando a regra da soma cíclica:

$$R_{\lambda\mu\nu k} + R_{\lambda k\mu\nu} + R_{\lambda\nu k\mu} = 0, \quad (2.21)$$

obtemos:

$$(N - 1)R_{\lambda\rho\sigma\nu} = R_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - R_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}. \quad (2.22)$$

Fazendo contração de  $\lambda$  com  $\nu$ , encontramos:

$$R_{\sigma\rho} - NR_{\sigma\rho} = -R_{\lambda}^{\lambda}g_{\sigma\rho} + R_{\rho\sigma}, \quad (2.23)$$

e o tensor de Ricci assume a forma:

$$R_{\sigma\rho} = \frac{1}{N}g_{\sigma\rho}R_{\lambda}^{\lambda}. \quad (2.24)$$

Inserindo esta solução na Eq. (2.22), o tensor de curvatura pode ser escrito assim:

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = \frac{R_{\lambda}^{\lambda}}{N(N-1)}\{g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma} - g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu}\}. \quad (2.25)$$

Em um espaço-tempo que é isotrópico em cada ponto, as Eq. (2.24) e Eq. (2.25) serão válidas em qualquer parte. Usando a Eq. (2.24) em  $(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R)_{;\mu} \equiv 0$  (identidade de Bianchi) temos:

$$\left(R_{\rho}^{\sigma} - \frac{1}{2}\delta_{\rho}^{\sigma}R_{\lambda}^{\lambda}\right)_{;\sigma} = \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right)R_{\lambda;\sigma}^{\lambda} = 0, \quad (2.26)$$

ou:

$$\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}R_{\lambda}^{\lambda} = 0. \quad (2.27)$$

Assim, qualquer espaço de três ou mais dimensões, no qual a Eq. (2.24) é válida em qualquer parte, terá  $R_{\lambda}^{\lambda}$  constante. Logo, é conveniente introduzir uma constante de curvatura  $K$  no lugar de  $R_{\lambda}^{\lambda}$ :

$$R_{\lambda}^{\lambda} \equiv -N(N-1)K. \quad (2.28)$$

Substituindo a Eq. (2.28) na Eq. (2.24), obtemos para o tensor de Ricci e, o tensor de Riemann:

$$R_{\sigma\rho} = -(N-1)Kg_{\sigma\rho}, \quad (2.29)$$

$$R_{\lambda\rho\sigma\nu} = K(g_{\sigma\rho}g_{\lambda\nu} - g_{\nu\rho}g_{\lambda\sigma}), \quad (2.30)$$

ou seja, um espaço com curvatura constante.

Nas próximas duas sessões vamos considerar dois exemplos bastante populares, os modelos de Schwarzschild e de Friedmann e que são maximamente simétricos.

### 2.3 SOLUÇÃO DE SCHWARZSCHILD

O modelo de Schwarzschild, considera um campo gravitacional estático, esfericamente simétrico gerado por um corpo massivo. Porém, a solução é válida para o espaço exterior ao corpo massivo, conseqüentemente, para o vácuo. Trabalharemos a métrica em coordenadas esféricas, e vamos considerar um sistema de unidades com  $c = 1$ . Para um espaço estático, com uma coordenada temporal  $x^0$ , vamos assumir as seguintes propriedades:

- i) Todas as componentes da métrica são independentes da coordenada temporal;
- ii) o elemento de linha  $ds^2$  é invariante sob a transformação  $x^0 \rightarrow -x^0$ .

Cumprir o primeiro critério, não significa cumprir o segundo, logo um espaço-tempo que satisfaz a primeira propriedade, ainda quando não satisfaz a segunda, é chamado estacionário (HOBSON; LASENBY, 2006).

O primeiro passo para obtermos as equações de campo da teoria da relatividade geral é ter o elemento de linha, que governa o espaço-tempo considerado. De uma forma geral, podemos escrever o elemento de linha como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.31)$$

Se temos um sistema de coordenadas, onde  $g_{\mu\nu}$  cumpra com o critério (i), e o elemento de linha  $ds^2$  cumpra com o segundo, então nosso elemento de linha é uma matriz diagonal e pode ser escrita como:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.32)$$

Na Eq. (2.32), apresentamos uma métrica que contém informação para descrever o espaço-tempo sob as condições de simetria esférica e estaticidade; onde  $B$  e  $A$  são funções somente da coordenada radial  $r$ .

Vamos escrever as equações de campo da teoria da relatividade geral como (WEINBERG, 1972):

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

onde o tensor de Einstein é dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R. \quad (2.34)$$

A constante de gravitação universal é escrita como  $G$ , e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia no sistema de unidades que usamos  $c = 1$ .

Para o espaço-tempo de Schwarzschild o conteúdo material inexistente, temos apenas o campo gravitacional, tendo em vista que o modelo de Schwarzschild lida com o campo gravitacional externo ao corpo massivo.

Assim, considerando a métrica dada pela Eq. (2.32), e as equações de campo dadas pela Eq. (2.33), obtemos:

$$-\frac{A'B}{rA^2} - \frac{B}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{B'}{rAB} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{A}\right) = 0. \quad (2.36)$$

O processo de integração resulta:

$$A(r) = \frac{1}{1 - \frac{C}{r}}, \quad (2.37)$$

e

$$B(r) = 1 - \frac{C}{r}. \quad (2.38)$$

Neste ponto, faremos uma pequena análise para determinar o valor da constante  $C$  que aparece na Eq. (2.37) e na Eq. (2.38). Para isso, vamos considerar uma partícula movendo-se livremente sob a influência de uma força gravitacional. Se usamos um sistema de coordenadas  $\xi^\alpha$  para escrever uma equação para o movimento no espaço-tempo (WEINBERG, 1972), poderia ser assim:

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (2.39)$$

onde  $d\tau$  é o tempo próprio que é definido pela expressão  $d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta}d\xi^\alpha d\xi^\beta$ . Escrevendo  $\xi^\alpha$  como uma função de  $\chi^\mu$ , sendo este um sistema de coordenadas cartesianas em repouso, a Eq. (2.39) adquire a forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial\chi^\mu} \frac{d\chi^\mu}{d\tau} \right) = 0. \quad (2.40)$$

Desenvolvendo a derivada, e fazendo rearranjos algébricos, podemos expressar a Eq. (2.40) em termos dos símbolos de Christoffel de segunda espécie (HOBSON; LASENBY, 2006), ou seja:

$$\frac{d^2\chi^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{d\chi^\mu}{d\tau} \frac{d\chi^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.41)$$

A Eq. (2.41) é chamada equação do movimento, conhecida também como equação da geodésica. Aqui vale a pena mencionar que a geodésica é o caminho mais curto entre dois eventos em um sistema de coordenadas generalizadas. Agora, como a partícula move-se num

campo gravitacional fraco, podemos desprezar as componentes da velocidade  $\frac{d\chi}{d\tau}$ , ficando somente  $\frac{dt}{d\tau}$ , e a Eq. (2.41) assume a forma:

$$\frac{d^2\chi^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\lambda \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0, \quad (2.42)$$

sendo que desde o início temos considerado um campo gravitacional estático. Então, todas as derivadas de  $g_{\mu\nu}$  são nulas, e sob estas condições os valores dos símbolos de Christoffel mudam de tal forma que a Eq. (2.42) assume a forma:

$$\frac{d^2\chi^\lambda}{d\tau^2} + \left(-\frac{1}{2}\eta^{\lambda\rho}\frac{\partial g_{00}}{\partial\chi^\rho}\right)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0. \quad (2.43)$$

Fazemos agora uma perturbação na métrica, ou seja

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},$$

onde  $|h_{\mu\nu}|$  é a perturbação considerada. Por conseguinte  $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$ , onde  $h_{00}$  representa a componente da métrica do campo fraco. Substituindo esta condição na Eq. (2.43), ficaríamos somente com as componentes (CARROLL, 2004):

$$\frac{d^2\chi^i}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial\chi^i}. \quad (2.44)$$

A aceleração é definida pelo gradiente do potencial, ou seja  $\vec{a} = -\nabla\phi$ , e deste modo a Eq. (2.44) é escrita como:

$$\frac{d^2\chi^i}{dt^2} = \nabla\left(\frac{h_{00}}{2}\right). \quad (2.45)$$

Comparando com a expressão da aceleração, temos:

$$\frac{d^2\chi^i}{dt^2} = -\nabla\phi. \quad (2.46)$$

Evidentemente  $-\nabla\phi = \nabla\left(\frac{h_{00}}{2}\right)$ , portanto  $h_{00} = -2\phi$  (CARROLL, 2004). Como a métrica perturbada é  $g_{00} = \eta_{00} + h_{00}$ , e sabendo que  $\eta_{00} = -1$ , temos para  $g_{00}$ :

$$g_{00} = (-1 + 2\phi).$$

O potencial  $\phi$  a grandes distâncias do centro de um corpo esférico de massa  $M$  adquire o valor

$$\phi = -\frac{GM}{r}.$$

Sob esta discussão se consideramos a condição de fronteira  $r \rightarrow \infty$ , teríamos uma métrica para um espaço-tempo plano (WEINBERG, 1972).

Resumindo, o campo gravitacional ao lado de fora da distribuição esférica de matéria, é governado pela métrica:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.47)$$

A solução proposta por Karl Schwarzschild em 1916 e a única solução das equações de campo de Einstein que descreve o espaço-tempo no vácuo, fora de um corpo de massa  $M$ , considerado esfericamente simétrico. Ainda que este objeto massivo tenha uma distribuição de massa dependente do tempo, o espaço externo é necessariamente estático, e sua métrica é dada pela Eq. (2.47). Esta afirmação é conhecida como teorema de Birkoff (STEPHANI, 2004).

## 2.4 OUTROS SISTEMAS DE COORDENADAS

A solução de Schwarzschild que escrevemos no final da sessão anterior (Eq. (2.47)), mostra que é singular em  $r = 0$ , e  $r = 2MG$ . Alguns autores consideram que as singularidades atreladas a um sistema de coordenadas são simplesmente o resultado da seleção do sistema de coordenadas com um domínio restrito de validade (HOBSON; LASENBY, 2006) e por sua vez sem sentido físico.

A singularidade na métrica de Schwarzschild poderia ser removida, fazendo apropriadas transformações de coordenadas. Segue-se então, uma breve discussão sobre alguns sistemas de coordenadas que nos permite reescrever a métrica de Schwarzschild, deixando-nos observar qual singularidade ainda persiste.

Para a seguinte discussão, assumimos o valor de  $G = c = 1$  na Eq. (2.47), e desta maneira a métrica é dada por:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.48)$$

### 2.4.1 Coordenadas Eddington-Finkelstein

A ideia por detrás das coordenadas de Eddington-Finkelstein é transformar geodésicas nulas radiais do tipo "ingoing", em linhas retas.

Para isso, consideramos a mudança de coordenadas temporal usando a expressão:

$$t \longrightarrow \bar{t} = t + 2M \ln(r - 2M). \quad (2.49)$$

Diferenciando a Eq. (2.49) obtemos:

$$d\bar{t} = dt + \frac{2M}{r - 2M} dr. \quad (2.50)$$

Substituindo este último resultado no elemento de linha de Schwarzschild, obtemos (D'INVERNO, 1992):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(\frac{4M}{r}\right) dt dr - \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.51)$$

A Eq. (2.51) mostra uma solução regular no intervalo  $0 < r < 2M$ . Poderíamos dizer que a transformação proposta na Eq. (2.49) estende a gama de coordenadas desde  $2M < r < \infty$  até  $0 < r < \infty$ . Resumindo podemos conjecturar que a singularidade em  $r = 2M$  existente na métrica dada pela Eq. (2.48) é fictícia, e assim, gerada pelo sistema de coordenadas.

## 2.4.2 Coordenadas Kruskal

Para esta proposta, começaremos pela introdução da coordenada nula de avanço  $v$  e a coordenada nula de retardo  $w$ , determinadas implicitamente através da relação:

$$\frac{1}{2}(v - w) = r + 2M \ln(r - 2M). \quad (2.52)$$

Agora, temos um novo sistema de coordenadas  $(v, w, \theta, \phi)$ , com o qual a Eq. (2.48), torna-se (D'INVERNO, 1992):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv dw - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.53)$$

onde  $r$  é uma função de  $v$  e  $w$ .

Se consideramos um espaço em duas dimensões, onde  $\theta = \text{constante}$  e  $\phi = \text{constante}$ , temos uma métrica definida assim:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dv dw. \quad (2.54)$$

Consequentemente, para ser conformalmente plano, reescrevemos as coordenadas  $t$  e  $x$  em termos das  $v$  e  $w$ , usando as seguintes definições:

$$t = \frac{1}{2}(v + w),$$

$$x = \frac{1}{2}(v - w),$$

onde  $t$  é a coordenada tipo tempo na solução de Schwarzschild (HOBSON; LASENBY, 2006). Ambas definições permitem que a Eq. (2.54) assume a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (dt^2 - dx^2). \quad (2.55)$$

Podemos dispor de uma transformação adicional para conseguir que o elemento de linha, expressado na Eq. (2.54) seja reescrito em coordenadas nulas, para que torne-se duplamente conformalmente plano. Estas coordenadas são:

$$v \longrightarrow v' = v'(v),$$

e

$$w \longrightarrow w' = w'(w),$$

onde  $v'$  e  $w'$  são arbitrárias, e com o qual o elemento de linha adquire a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{dv'} \frac{dw}{dw'} dv' dw'. \quad (2.56)$$

Usando as seguintes definições:

$$t' = \frac{1}{2}(v' + w'),$$

e

$$x' = \frac{1}{2}(v' - w'),$$

podemos escrever a Eq. (2.54) de uma forma geral:

$$ds^2 = F^2(t', x')(dt'^2 - dx'^2). \quad (2.57)$$

Portanto a escolha de  $v'$  e  $w'$ , determinará a forma precisa de um elemento de linha. Para esta discussão, Kruskal escolheu:

$$v' = \exp\left(\frac{v}{4M}\right), \quad (2.58)$$

e

$$w' = -\exp\left(\frac{w}{4M}\right). \quad (2.59)$$

A coordenada  $r$  é considerada como função de  $t'$  e  $x'$ , determinadas implícitamente pela equação:

$$t'^2 - x'^2 = -(r - 2M)\exp\left(\frac{r}{2M}\right), \quad (2.60)$$

onde  $F$  é dada por:

$$F^2 = \frac{16M^2}{r}\exp\left(\frac{-r}{2M}\right), \quad (2.61)$$

com o qual o elemento de linha, pode ser expresso na forma:

$$ds^2 = \frac{16M^2}{r}\exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dt'^2 - \frac{16M^2}{r}\exp\left(-\frac{r}{2M}\right) dx'^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.62)$$

Vemos que neste sistema de coordenadas, também a singularidade em  $r = 2M$  é suprimida.

### 2.4.3 Coordenadas Painlevé-Gullstrand

Por fim, vamos falar um pouco do sistema de coordenadas de Painlevé-Gullstrand que tem uma utilidade na discussão sobre a formação de horizontes e a eventual massa colapsada. Nosso ponto de partida neste sistema, será considerar um tempo  $T$ , como o tempo próprio de um

observador em repouso no infinito, e que experimenta uma queda livre radial. As componentes quadrivelocidade  $u^a$  do observador em coordenadas de Schwarzschild, podem ser obtidas pela resolução da equação da geodésica.

A normalização  $u^c u_c = 1$ , é dada por (FARAONI, 2015):

$$(u^0)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 = 1 - \frac{2M}{r} + (u^1)^2. \quad (2.63)$$

Vamos escrever o vetor de Killing do tipo tempo  $\xi^a = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a$ , de tal forma que a energia por unidade de massa  $\tilde{E} \equiv \frac{E}{m} = -u^c \xi_c$ , é conservada ao longo da geodésica tipo tempo percorrida pelas partículas de massa  $m$ . Logo, podemos expressar  $\tilde{E}$  como:

$$\tilde{E} = -u^c \xi_c = -u^u \cdot (-) \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \delta_{\mu 0} = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) u^0. \quad (2.64)$$

Combinando as equações Eq.(2.63) com a Eq. (2.64) temos:

$$\tilde{E}^2 = 1 - \frac{2M}{R} + (u')^2, \quad (2.65)$$

e dado que o observador está caindo, significa que  $u' < 0$ . Em  $R \rightarrow +\infty$ , esta relação produz:

$$\tilde{E}^2 = 1 - \left(\frac{v_{(\infty)}}{\sqrt{1 - v_{(\infty)}^2}}\right)^2 = \frac{1}{1 - v_{(\infty)}^2} \equiv \gamma_{\infty}^2, \quad (2.66)$$

onde  $v_{(\infty)}$  é a velocidade tridimensional no infinito e  $\gamma_{(\infty)}$  é o fator de Lorentz. De forma que, para este observador, a energia por unidade de massa, pode ser expressado como:

$$\tilde{E} = u_{(\infty)}^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_{(\infty)}^2}}. \quad (2.67)$$

O tempo  $T$  de Painlevé-Gullstrand é obtido pela fixação de  $v_{(\infty)} = 0$ . Com o qual obtemos  $\tilde{E} = 1$ ,  $u^0 = \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1}$ , e  $u' = -\sqrt{\frac{2M}{R}}$ . Portanto:

$$u^\mu = \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{R}}, -\sqrt{\frac{2M}{R}}, 0, 0\right), \quad (2.68)$$

$$u_\mu = \left(-1, -\frac{\sqrt{\frac{2M}{R}}}{1 - \frac{2M}{R}}, 0, 0\right). \quad (2.69)$$

Isso nos permite escrever  $u_\mu$ :

$$u_\mu = -\nabla_\mu T = -\partial_\mu T. \quad (2.70)$$

Esta propriedade é importante para a introdução do tempo  $T$  de Painlevé-Gullstrand. Integrando esta expressão e combinando com a Eq. (2.69), obtemos  $\partial T = 1$ , e para o valor de  $\mu = 0$ , o seguinte resultado:

$$T = t + f(R). \quad (2.71)$$

Enquanto que, para o valor de  $\mu = 1$ , obtemos  $\partial_R T = \frac{\sqrt{\frac{2M}{R}}}{(1 - \frac{2M}{R})}$  e o resultado para  $T$  é:

$$T = \int \frac{\sqrt{\frac{2M}{R}}}{1 - \frac{2M}{R}} dR + g(t). \quad (2.72)$$

Comparando a Eq. (2.71) com a Eq. (2.72) temos:

$$T = t + \int \frac{\sqrt{\frac{2M}{R}}}{1 - \frac{2M}{R}} dR. \quad (2.73)$$

Integrando o resultado obtemos:

$$T = t + 4M \left( \sqrt{\frac{R}{2M}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{\frac{R}{2M}} - 1}{\sqrt{\frac{R}{2M}} + 1} \right| \right). \quad (2.74)$$

Da Eq. (2.73), temos que:

$$dt = dT - \sqrt{\frac{2M}{R}} \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{-1} dR.$$

Fazendo a substituição na Eq. (2.48), nosso elemento de linha de Schwarzschild, assume a forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dT^2 - 2\sqrt{\frac{2M}{r}} dT dr - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.75)$$

Podemos observar que a métrica da Eq. (2.75) é regular no valor de  $r = 2M$ , o qual é um fato esperado, já que nosso observador não considera esta superfície para que seja especial (MARTEL; POISSON, 2001). Porém, a métrica continua sendo singular em  $r = 0$ .

## 2.5 MODELO COSMOLÓGICO DE FRIEDMANN

Nesta seção, vamos apresentar uma solução para as equações de campo, com uma métrica que permita descrever à grande escala, o universo, baseando-nos em duas grandes suposições: Isotropia e homogeneidade. A isotropia implica que, para qualquer observador, em qualquer posição, perceberia que o universo mostra as mesmas características. Um universo homogêneo quer dizer que os elementos que o compõem, estão distribuídos de tal forma que, a densidade em qualquer direção é a mesma. Estas suposições estabelecem o princípio cosmológico, portanto, o universo não tem um centro preferido. A isotropia também implica homogeneidade (HOBSON; LASENBY, 2006). O princípio cosmológico é uma hipótese de que o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico (WEINBERG, 1972).

### 2.5.1 A métrica de Friedmann-Robertson-Walker e a máxima simetria

Considerando o espaço com 3 dimensões, o tensor de Riemann possui geralmente 6 componentes. Assim, podemos pensar que seriam necessárias 6 funções para especificar as propriedades geométricas intrínsecas de um espaço com 3 dimensões. Podemos pensar também, que quanto menor o número de funções para caracterizar o espaço em questão, maior será o número de simetrias envolvidas.

Assim, como tratamos anteriormente na seção 2.2, um espaço que seja maximamente simétrico é caracterizado por um número apenas: a curvatura, que denotamos por  $K$ .

O tensor de curvatura de um espaço maximamente simétrico deve, então, depender da constante  $K$  e do tensor métrico.

A expressão mais simples que podemos escrever que tenha  $K$ , e as simetrias envolvidas (HOBSON; LASENBY, 2006), é dada por:

$$R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (2.76)$$

O tensor de Ricci é escrito como:

$$\begin{aligned} R_{jk} &= g^{il}R_{ijkl} \\ &= Kg^{il}(g_{ik}g_{il} - g_{il}g_{jk}) \\ &= K(\delta_k^l g_{jl} - \delta_l^j g_{jk}) \\ &= K(g_{jk} - 3g_{jk}) \\ &= -2Kg_{jk}, \end{aligned}$$

e o escalar de curvatura  $R$ , está dado por:

$$R = R_k^k = -2K\delta_k^k = -6K.$$

Não vamos aqui entrar em detalhes em demasia, todavia na derivação de uma métrica isotrópica geral dada por:

$$d\sigma^2 = B(r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.77)$$

os passos envolvidos, para tal derivação, podem ser encontrados na seção 14.5 e 9.1 do livro de Michael Hobson (HOBSON; LASENBY, 2006).

Para que nosso espaço tridimensional seja maximamente simétrico, deve cumprir com a condição:

$$R_{ij} = -2Kg_{ij}.$$

Portanto, usaremos as componentes do tensor de Ricci:

$$R_{rr} = -\frac{1}{rB(r)} \frac{dB(r)}{dr}, \quad (2.78)$$

$$R_{\theta\theta} = \frac{1}{B(r)} - 1 - \frac{r}{2B^2(r)} \frac{dB(r)}{dr}, \quad (2.79)$$

e aplicaremos essa condição, tendo como resultado:

$$\frac{1}{rB(r)} \frac{dB(r)}{dr} = 2KB(r), \quad (2.80)$$

$$1 + \frac{r}{2B^2(r)} \frac{dB(r)}{dr} - \frac{1}{B(r)} = 2Kr^2. \quad (2.81)$$

Se integramos a Eq. (2.80), chegamos á expressão:

$$B(r) = \frac{1}{A - Kr^2}, \quad (2.82)$$

onde  $A$  representa uma constante de integração. Se substituimos a Eq. (2.82) na Eq. (2.81), temos:

$$1 - A + Kr^2 = Kr^2. \quad (2.83)$$

Evidente que  $A = 1$ , de tal forma que o elemento de linha para nosso espaço tridimensional maximamente simétrico, pode ser escrita como:

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.84)$$

Fazendo uso, mais uma vez, das características que fundamentam o princípio cosmológico, ou seja, a homogeneidade e a isotropia, podemos inserir o tempo em nosso espaço métrico tridimensional através de um fator comum para que mantenhamos as distâncias iguais (HOBSON; LASENBY, 2006). Resumidamente, temos então:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - S^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.85)$$

Se assumimos o valor  $K \neq 0$ , podemos definir a variável  $k = \frac{K}{|K|}$ , e podemos ter  $k \pm 1$ , dependendo se  $K$  é positivo ou negativo. Se introduzimos a coordenada re-dimensionada:

$$\bar{r} = |K|^{\frac{1}{2}} r,$$

a Eq.(2.85), assume a forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{S^2(t)}{|K|} \left( \frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.86)$$

Neste ponto, podemos definir o fator de escala re-dimensionado  $R(t)$ , pela seguinte expressão:

$$R(t) = \begin{cases} \frac{S(t)}{|K|^{\frac{1}{2}}} & \text{se } K \neq 0, \\ S(t) & \text{se } K = 0. \end{cases}$$

Omitindo o traço da variável  $\bar{r}$  na Eq. (2.86) e usando a função  $R(t)$ , obtemos o elemento de linha de *Friedmann–Robertson–Walker (FRW)* (HOBSON; LASENBY, 2006) na forma usual:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (2.87)$$

onde  $k$ , adquire os valores de  $-1, 0, +1$ , dependendo, se a seção espacial tem uma curvatura negativa, zero ou positiva, respectivamente.

### 2.5.2 Equações de campo cosmológicas

Começaremos adotando um sistema de coordenadas comóveis  $[\chi]^\mu = (t, r, \theta, \phi)$  de tal forma que podemos reescrever a Eq. (2.87) como:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right). \quad (2.88)$$

Logo, podemos escrever as Eq. (2.33) e Eq. (2.34) na forma (HOBSON; LASENBY, 2006):

$$R_{\mu\nu} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}), \quad (2.89)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia e  $T = T^\mu_\mu$ .

Idealizando, que no universo a matéria apresenta uma forma de *fluido perfeito*, que é caracterizado em cada ponto pela densidade  $\rho$  e a pressão  $p$ , temos então o tensor momento-energia dado por (HOBSON; LASENBY, 2006):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}. \quad (2.90)$$

Dado que procuramos soluções para um universo homogêneo e isotrópico, tanto  $\rho$  como  $p$  devem ser funções só do tempo cósmico. Desse modo, a quadrivelocidade do fluido em nosso sistema de coordenadas comóveis  $(t, r, \theta, \phi)$ , é dada por:

$$[u^\mu] = (1, 0, 0, 0),$$

a qual pode ser escrita como  $u^\mu = \delta_0^\mu$ , de maneira que as componentes da quadrivelocidade são:

$$u^\mu = g_{\mu\nu} \delta_0^\nu = g_{\mu 0} = \delta_\mu^0. \quad (2.91)$$

O tensor momento-energia pode ser escrito como:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 - pg_{\mu\nu}, \quad (2.92)$$

e dado que  $u^{\mu}u_{\mu} = 1$ , a contração do tensor momento-energia assume a forma:

$$T = T^{\mu}_{\mu} = (\rho + p) - p\delta^{\mu}_{\mu} = \rho - 3p. \quad (2.93)$$

Conseqüentemente, os termos  $(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu})$  que aparecem na Eq. (2.89) podem ser reescritos assim:

$$T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} = (\rho + p)\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 - \frac{1}{2}(\rho - p)g_{\mu\nu}. \quad (2.94)$$

Com estes resultados, procedemos a obter as componentes não nulas dadas pela Eq. (2.89):

$$\begin{aligned} -\kappa(T_{tt} - \frac{1}{2}Tg_{tt}) &= -\frac{1}{2}\kappa(\rho + 3p), \\ -\kappa(T_{rr} - \frac{1}{2}Tg_{rr}) &= \frac{-\left[\frac{1}{2}\kappa(\rho - p)\right]R^2}{(1 - kr^2)}, \\ -\kappa(T_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Tg_{\theta\theta}) &= -\left[\frac{1}{2}\kappa(\rho - p)\right]R^2r^2, \\ -\kappa(T_{\phi\phi} - \frac{1}{2}Tg_{\phi\phi}) &= -\left[\frac{1}{2}\kappa(\rho - p)\right]R^2r^2\sin^2\theta. \end{aligned}$$

Usando estes resultados com as componentes do tensor de Ricci, e depois de fazer as substituições necessárias, temos as equações de campo para o modelo de Friedmann:

$$2\ddot{R} = -\frac{\kappa}{3}(\rho + 3p)R, \quad (2.95)$$

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} = \frac{\kappa}{3}\rho. \quad (2.96)$$

Além das equações de Friedmann, temos a equação da conservação da energia:

$$\dot{\rho}R^3 = \frac{d}{dt}[R^3(\rho + p)], \quad (2.97)$$

ou equivalentemente:

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3pR^2. \quad (2.98)$$

Considerando que a densidade de energia do universo é dominada pela matéria não relativística, quer dizer com pressão desprezível, então a Eq. (2.98) resulta:

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = 0. \quad (2.99)$$

Integrando a Eq.(2.99), obtemos:

$$\rho_0 R_0^3 = \rho R^3,$$

onde o sub-índice (o) refere-se ao tempo inicial.

De um modo geral, a pressão pode ser escrita pela equação de estado:

$$p = \omega\rho, \quad (2.100)$$

onde  $\omega$  é uma constante. A Eq. (2.98) adquire a forma:

$$\frac{d(\rho R^3)}{dR} = -3\omega\rho R^2, \quad (2.101)$$

que reescrevendo, apresenta a relação:

$$\frac{d(\rho R^3)}{\rho R^3} = -\frac{3\omega}{R}dR. \quad (2.102)$$

Integrando a Eq. (2.102), e rearranjando algebricamente os termos, chegamos ao resultado:

$$\rho = R^{-3(\omega+1)}. \quad (2.103)$$

Usando a Eq. (2.103), podemos estabelecer, para um determinado tempo  $t = t_*$  do universo,  $\rho_* = R_*^{-3(\omega+1)}$ , de tal maneira que:

$$\left(\frac{R}{R_*}\right)^{-3(1+\omega)} = \frac{\rho}{\rho_*}. \quad (2.104)$$

Para  $\omega = \frac{1}{3}$ , obtemos a relação:

$$\rho \propto R^{-4}, \quad \text{caracterizando radiação.} \quad (2.105)$$

Parece ser bastante razoável, dizer que a maior parte do tempo de vida do universo houve o predomínio de matéria não-relativística, ou seja, governado pela equação

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2, \quad (2.106)$$

e neste caso ( $\omega = 0$ ), a densidade de matéria/energia pode ser escrita como:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right) = \left(\frac{R}{R_*}\right)^{-3}. \quad (2.107)$$

Por outro lado, podemos escrever a curvatura espacial em termos do parâmetro de Hubble e do parâmetro de desaceleração, calculados em um tempo específico  $t_*$ , ou seja:

$$\frac{k}{R_*^2} = (2q_* - 1)H_*^2. \quad (2.108)$$

Naturalmente, temos:

$$\rho_* = \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{k}{R_*^2} + H_*^2 \right). \quad (2.109)$$

Considerando a definição da densidade crítica

$$\rho_c \equiv \frac{3H_*^2}{8\pi G}, \quad (2.110)$$

Isso nos permite escrever:

$$\frac{\rho_*}{\rho_c} = 2q_*. \quad (2.111)$$

Com o auxílio das Eq. (2.109) e a Eq. (2.111), obtemos as seguintes relações (WEINBERG, 1972):

$$\frac{k}{R_*^2} = (2q_* - 1)H_*^2, \quad (2.112)$$

$$\frac{8\pi G\rho_*}{3} = 2q_*H_*^2. \quad (2.113)$$

Consequentemente, as Eq. (2.106) e Eq. (2.107) assumem a forma:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_*}\right)^2 = H_*^2 \left[1 - 2q_* + 2q_* \left(\frac{R_*}{R}\right)\right]. \quad (2.114)$$

Reescrevendo a Eq. (2.114), obtemos:

$$\frac{dR}{R_*} = dtH_* \left[1 - 2q_* + 2q_* \left(\frac{R_*}{R}\right)\right]. \quad (2.115)$$

Fazendo a mudança  $x = \frac{R}{R_*}$ , a Eq. (2.115) assume a forma:

$$dt = \frac{1}{H_*} \left[1 - 2q_* + \frac{2q_*}{x}\right]^{-\frac{1}{2}} dx. \quad (2.116)$$

Integrando, temos:

$$t = \frac{1}{H_*} \int_0^{\frac{R}{R_*}} \left[1 - 2q_* + \frac{2q_*}{x}\right]^{-\frac{1}{2}} dx, \quad (2.117)$$

onde  $t = 0$ , é definido como o tempo quando  $R \ll R_*$ .

Seguindo de perto o livro de S. Weinberg (WEINBERG, 1972), vamos considerar três casos distintos sob certos aspectos:

CASO A       $(q_* > \frac{1}{2}, k = +1)$

Primeiro definimos a variável  $\theta$  na forma:

$$1 - \cos \theta = \left(\frac{2q_* - 1}{q_*}\right) \frac{R(t)}{R_*}, \quad (2.118)$$

de maneira que, resolvendo a Eq. (2.117), obtemos:

$$H_* t = q_* [2q_* - 1]^{-\frac{3}{2}} [\theta - \sin \theta]. \quad (2.119)$$

Observando a Eq. (2.118), podemos notar onde acontece os valores máximos para  $R(t)$ , respectivamente em  $\theta = \pi$  e  $\theta = 0$ . Neste caso, o tempo "máximo"  $t_m$  obtido com Eq. (2.119) assume a forma:

$$\begin{aligned} H_* t_m &= q_* (2q_* - 1)^{-\frac{3}{2}} (\pi - \sin \pi), \\ H_* t_m &= \pi q_* (2q_* - 1)^{-\frac{3}{2}}, \\ t_m &= \frac{\pi q_*}{H_* (2q_* - 1)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.120)$$

e na Eq. (2.118) fazemos a substituição para o valor de  $\theta = \pi$ :

$$\begin{aligned} 1 - \cos \theta &= \left( \frac{2q_* - 1}{q_*} \right) \frac{R(t)}{R_*}, \\ 1 - \cos \pi &= \left( \frac{2q_* - 1}{q_*} \right) \frac{R(t)}{R_*}, \\ R(t_m) &= \frac{2q_* R_*}{2q_* - 1}. \end{aligned} \quad (2.121)$$

Este é o caso comumente chamado de fechado.

### CASO B $(q_* = \frac{1}{2}, k = 0)$

Para este caso, resolvemos a Eq. (2.117), usando o valor de  $q_* = \frac{1}{2}$ , obtendo:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{H_*} \int_0^{\frac{R}{R_*}} \left[ 1 - 2q_* + \frac{2q_*}{x} \right]^{-\frac{1}{2}} dx, \\ t &= \frac{1}{H_*} \int_0^{\frac{R}{R_*}} \left[ 1 - 2 \left( \frac{1}{2} \right) + \frac{2 \left( \frac{1}{2} \right)}{x} \right]^{-\frac{1}{2}} dx, \\ t &= \frac{1}{H_*} \int_0^{\frac{R}{R_*}} x^{\frac{1}{2}} dx, \\ t &= \frac{1}{H_*} \left( \frac{2}{3} \left( \frac{R(t)}{R_*} \right)^{\frac{3}{2}} \right), \end{aligned} \quad (2.122)$$

ou

$$\left( \frac{R(t)}{R_*} \right) = \left( \frac{3H_* t}{2} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (2.123)$$

Este resultado é conhecido como o modelo de *Einstein-de Sitter*.

### CASO C $(0 < q_* < \frac{1}{2}, k = -1)$

Agora, definiremos a variável  $\theta = i\Psi$ , que substituído na Eq. (2.118), junto a identidade  $\cos(i\Psi) = \cosh \Psi$ , resulta:

$$\begin{aligned} 1 - \cosh(i\Psi) &= \left( \frac{2q_* - 1}{q_*} \right) \frac{R(t)}{R_*}, \\ \cosh \Psi - 1 &= \left( \frac{1 - 2q_*}{q_*} \right) \frac{R(t)}{R_*}. \end{aligned} \quad (2.124)$$

Com este resultado e lembrando que  $\sin(i\Psi) = -i \sinh \Psi$ , a Eq. (2.119) modificada algebricamente, adquire a forma:

$$H_* t = q_* (1 - 2q_*)^{-\frac{3}{2}} (\sinh \Psi - \Psi). \quad (2.125)$$

Podemos observar que o fator de escala  $R(t)$  incrementa-se sem limite; de maneira que para  $t \rightarrow \infty$ , o resultado é:

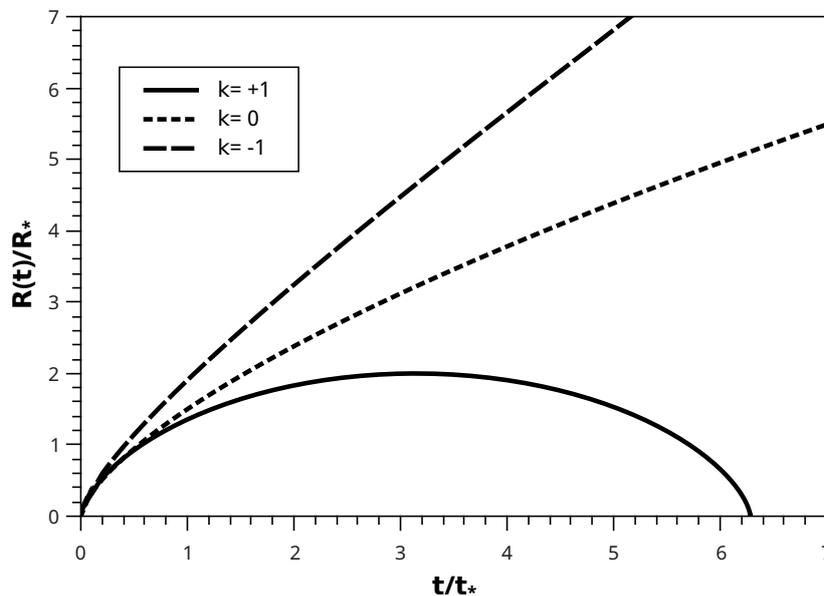
$$\frac{R(t)}{R_*} \rightarrow \frac{q_*}{2} \exp^{\Psi} (1 - 2q_*)^{-1}. \quad (2.126)$$

Estes três casos que acabamos de descrever são geralmente discriminados em termos da curvatura, que pode ser positiva, nula ou positiva.

Na Figura (1) plotamos a evolução do fator de escala para estes três casos.

Na próxima seção faremos uma abordagem, digamos mais "geral", destes três casos, e que será um caminho importante nas soluções que obtemos para o espaço-tempo de Kantowski-Sachs.

Figura 1 – Evolução do fator de escala  $R(t)$  das equações de Friedmann, para  $k = -1$ ,  $k = 0$  e  $k = +1$ .



Fonte: O Autor

### 2.5.3 Modelo de Friedmann Unificado

Até o momento o que temos visto é que o processo de integração das equações de campo de Einstein, além delas próprias, necessitam de mais alguns subsídios para serem integradas. Especificamente, o tensor energia-momento e a curvatura. Atrrelado ao tensor energia-momento temos que ter adicionalmente, a equação de estado.

Nesta seção seguiremos bem de perto o trabalho dos professores Mario Assad e Ademir Lima (ASSAD; LIMA, 1988) para determinarmos uma relação geral ou unificada, para a métrica de Friedmann, dada pela Eq. (2.88).

Adicionalmente, vamos considerar um termo cosmológico, o que generaliza o trabalho de Assad e Lima, seguindo de perto agora o trabalho de Perico, Lima e Campos (PERICO; LIMA; CAMPOS, 2016).

Fazendo uso da métrica dada pela Eq. (2.88), as equações de campo de Einstein assumem a forma

$$\kappa(\rho + \rho_v) = \frac{3\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3k}{R^2}, \quad (2.127)$$

$$\kappa p_T = -\frac{2\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{k}{R^2}, \quad (2.128)$$

onde  $\rho_v$  é a densidade de energia de vácuo dada por  $8\pi G\rho_v = \Lambda_t$ , e  $p_T$  é pressão total que inclui a matéria usual mais a pressão correspondente a energia de vácuo.

Naturalmente, em se tratando de um termo cosmológico com dependência temporal, faz-se necessário admitir uma certa dinâmica para a energia de vácuo. Vamos considerar o termo cosmológico dado por:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{3\beta}{R^2}(\dot{R}^2 + k), \quad (2.129)$$

onde o parâmetro fenomenológico  $\beta$  é adimensional, e  $\Lambda_0$  é a constante cosmológica.

Fazendo uso da equação de estado:

$$p = \omega\rho, \quad (2.130)$$

com  $\omega$  constante, podemos acoplar as equações de campo, resultando em uma única equação diferencial. Naturalmente, aqui a  $p$  é a pressão termodinâmica usual.

$$R\ddot{R} + \Delta\dot{R}^2 + \Delta k - \frac{\Lambda_0(1+\omega)R^2}{2} = 0, \quad (2.131)$$

onde  $\Delta = -1 + \frac{3(1+\omega)(1-\beta)}{2}$ .

A Eq. (2.131) para ser integrada completamente não é tão simples, embora a primeira integral seja imediata, resultando:

$$\dot{R}^2 = b \left(\frac{R_i}{R}\right)^{2\Delta} - k + \frac{\Lambda_0 R^2}{3}. \quad (2.132)$$

onde  $b = (\dot{R}_i^2 + k) - \frac{\Lambda_0 R_i^2}{3}$  é uma constante,  $R_i$  e  $\dot{R}_i$  são os valores iniciais para a função  $R$  e sua derivada.

Como já dissemos anteriormente, o processo de colapso gravitacional e a expansão do universo são lados diferentes de uma mesma moeda. Assim, até mesmo pela razão que isso

envolve nossos objetivos futuros, vamos tratar as equações de campo para o processo de colapso gravitacional.

Com isso podemos desprezar a parte da densidade de energia do vácuo associada a  $\Lambda_0$  (PERICO; LIMA; CAMPOS, 2016).

Vamos introduzir a variável  $u$ , dada por:

$$u = \frac{k}{b} \left( \frac{R}{R_i} \right)^{2\Delta}. \quad (2.133)$$

Note que para  $k = 0$  esta nova variável é inútil.

Pois então, em termos deste nova variável  $u$ , a Eq. (2.132) assume a forma:

$$\dot{u} = \frac{2b^{\frac{1}{2}}(k/b)^A}{(2A-1)R_i} u^{1-A} (1-u)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.134)$$

onde a constante  $A = \frac{1+\Delta}{2\Delta}$ .

Nosso próximo passo é inverter a Eq. (2.134), onde obtemos:

$$\frac{dt}{du} = \frac{(2A-1)}{2} R_i b^{A-\frac{1}{2}} k^{-A} u^{A-1} (1-u)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.135)$$

de maneira que calculando a derivada segunda, podemos escrever:

$$u(1-u) \frac{d^2t}{du^2} + \left[ (1-A) - \left( \frac{3}{2} - A \right) u \right] \frac{dt}{du} = 0, \quad (2.136)$$

que é a equação diferencial hipergeométrica com parâmetros  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2} - A$  e  $\alpha_3 = 1 - A$ . Cujas soluções são dadas por:

$$t(u) = c_1 + c_2 (1-u)^{\frac{1}{2}} F \left( 1-A, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1-u \right), \quad (2.137)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração e  $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, u)$  é a função gaussiana hipergeométrica (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1964).

Considerando as condições iniciais  $R_{(t=0)} = R_i$  e  $R_{(t=t_c)} = 0$ , denotamos que o tempo de colapso por  $t_c$ , na Eq. (2.137) assume a forma:

$$\left( 1 - \frac{t}{t_c} \right) = \left( \frac{R}{R_i} \right)^{1+\Delta} \frac{F \left( \frac{1}{2}, A; 1+A; \frac{k}{b} \left( \frac{R}{R_i} \right)^{2\Delta} \right)}{F \left( \frac{1}{2}, A; 1+A; \frac{k}{b} \right)}, \quad (2.138)$$

onde o tempo de colapso é dado por (PERICO; LIMA; CAMPOS, 2016):

$$t_c = R_i \frac{F(1/2, A; 1+A; \frac{k}{b})}{(1+\Delta) \sqrt{\dot{R}_i^2 + k}}. \quad (2.139)$$

Se consideramos que  $k \rightarrow 0$ , a Eq. (2.138), assume a forma:

$$\frac{R}{R_i} = \left(1 - \frac{t}{t_c}\right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}, \quad (2.140)$$

e o tempo de colapso

$$t_c = \left| \frac{R_i}{\dot{R}_i} \right| \frac{2}{3(1+\omega)} = \frac{2H_i^{-1}}{3(1+\omega)}, \quad (2.141)$$

onde  $H_i^{-1} = \left| \frac{R_i}{\dot{R}_i} \right|$ , representa o módulo da função de Hubble no início do colapso. Podemos observar que as soluções são as mesmas que obteram (CAMPOS; LIMA, 2012) para o caso plano.

#### 2.5.4 Solução unificada para o tempo conforme

Consideremos de novo nosso espaço-tempo descrito por uma geometria homogênea e isotrópica, cuja métrica é dada por a Eq. (2.88), para a qual submetemos a transformação conforme:

$$dt = R(\eta)d\eta, \quad (2.142)$$

de maneira que a Eq. (2.88), assume a forma:

$$ds^2 = R^2(\eta) \left( d\eta^2 - \frac{dr^2}{1 - kr^2} - r^2 d^2\theta - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right). \quad (2.143)$$

Neste sistema de coordenadas, a equação diferencial, derivadas das equações de campo, e correspondente a Eq. (2.131), é dada por:

$$RR'' + (\Delta - 1)R'^2 + k\Delta R^2 = 0, \quad (2.144)$$

onde  $R' = \frac{\partial R}{\partial \eta}$ , denota diferenciação em relação ao tempo conforme.

Introduzindo a transformação  $z = R^\Delta$ , a Eq. (2.131), pode ser reescrita como:

$$z'' + k\Delta^2 z = 0, \quad (2.145)$$

que representa a equação diferencial de uma partícula sujeita a uma força linear independentemente do valor do parâmetro  $\omega$  da equação de estado.

Para o caso  $k = 0$  a Eq. (2.145) mimetiza a equação de uma partícula livre. Enquanto que, para  $k = 1$ , é similar ao oscilador harmônico simples.

Integrando a Eq. (2.145) obtemos:

$$R(\eta) = \left[ c_1 \sin(\eta\Delta\sqrt{k} + c_2) \cos(\eta\Delta\sqrt{k} + c_2) \right]^{\frac{1}{\Delta}}, \quad (2.146)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração.

Assumindo condições iniciais convenientes para caracterizar o proceso de colapso, a Eq. (2.146), adquire a forma:

$$R(\eta) = R_i \left( \sqrt{\frac{b}{k}} \sin \left[ \sqrt{k} \Delta (\eta_c - \eta) \right] \right)^{1/\Delta}, \quad (2.147)$$

onde

$$\eta_c - \eta_i = \frac{1}{\Delta \sqrt{k}} \sin^{-1} \left[ \sqrt{\frac{k}{b}} \right]. \quad (2.148)$$

representa o tempo de colapso na coordenada conforme.

Vejamos agora o decaimento das equações de casos particulares encontrados na literatura científica.

Considerando a Eq. (2.147) e Eq. (2.148),  $\omega = 0$  e  $\beta = 0$ , temos que  $\Delta = 1/2$ , e consequentemente

$$R(\eta) = R_i b \left\{ \sqrt{\frac{1}{k}} \sin \left[ \sqrt{k} \frac{\eta_c - \eta}{2} \right] \right\}^2, \quad (2.149)$$

$$t_c - t = \frac{R_i b}{2k} \left\{ \eta_c - \eta - \frac{\sin \left[ \sqrt{k} (\eta_c - \eta) \right]}{\sqrt{k}} \right\}. \quad (2.150)$$

Vejamos então cada caso separadamente:

i) Solução plana,  $k = 0$ .

Para este caso as Eq. (2.149) e Eq. (2.150) assumem a forma:

$$1 - \frac{t}{t_c} = \left( \frac{\eta_c - \eta}{2} \right)^3, \quad (2.151)$$

$$R(\eta) = R_i \left( \frac{\eta_c - \eta}{2} \right)^2. \quad (2.152)$$

A combinação entre estas resulta:

$$\left( \frac{R}{R_i} \right) = \left( 1 - \frac{t}{t_c} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.153)$$

ii) Solução fechada  $k = +1$ .

Percorrendo os mesmos passos que no caso plano, obtemos:

$$R(\eta) = \frac{R_i}{2} (1 + \cos \eta), \quad (2.154)$$

$$t_c - t = \frac{R_i}{2} (\pi - \eta - \sin \eta), \quad (2.155)$$

E por fim, a solução hiperbólica.

iii) Solução hiperbólica,  $k = -1$ .

Neste caso obtemos:

$$R(\eta) = \frac{R_i}{2} [\cosh(\eta_c - \eta) - 1], \quad (2.156)$$

$$t_c - t = \frac{R_i}{2} [\sinh(\eta_c - \eta) - (\eta_c - \eta)]. \quad (2.157)$$

Resumindo, partindo da solução generalizada dada pela Eq. (2.149) e Eq. (2.150) decaímos nas expressões usuais para  $k = 0, +1, -1$ , que aparecem, por exemplo, no livro de L. Landau (LANDAU; LIFSHITZ, 1975).

### 3 MODELO ANISOTRÓPICO KANTOWSKI-SACHS

#### 3.1 INTRODUÇÃO

No início desta monografia começamos estudando os exemplos mais populares para as equações de campo da teoria da relatividade geral: Modelos de Schwarzschild e o de Friedmann.

O primeiro de um modo geral é usado para representar corpos massivos, como por exemplo estrelas; já o segundo geralmente dedica-se a decifrar a dinâmica do universo à grande escala. Todavia, em comum, estes dois são caracterizados pela homogeneidade e isotropia do espaço-tempo.

Por outro lado, se desejamos incluir um campo magnético global em nosso tensor momento-energia, de certo teríamos que abandonar o espaço-tempo de Friedmann em termos de um com característica anisotrópica, apenas para citar um exemplo.

Os trabalhos mais antigos que envolvem o espaço-tempo de Kantowski-Sachs (daqui em diante KS) adotam abordagens diferentes. O ponto de vista pode ser voltado para uma abordagem matemática, como por exemplo (KOMPANEETS; CHERNOV, 1965) e (CONRADI, 1995); ou usando aspectos físicos, com um conexão não muito clara.

Presentemente, o modelo KS tem voltado ao interesse científico e tem sido usado em diversos estudos. No trabalho de Mendez e Henriquez (MENDES; HENRIQUES, 1991) os autores tratam de um modelo inflacionário, usando o espaço métrico KS; em 2008, Chakraborty e Roy tratam de um modelo cosmológico anisotrópico com  $G(t)$  e  $\Lambda(t)$  (SUBENOY; ANUSUA, 2008). Um pouco mais tarde, em 2011, Adhav e demais autores (ADHAV et al., 2011) também consideraram um modelo anisotrópico, agora para incluir na discussão da dinâmica universal a energia escura.

Um estudo envolvendo universos de KS considerando a fonte sendo um "Skyrme fluid", aparece em 2015 (PARISI; VILASI, 2015), e neste trabalho existem diversas citações interessantes de trabalhos feitos dentro da geometria de KS. Ainda sob o ponto de vista cosmológico temos o trabalho de Katore e Hatkar (KATORE; HATKAR, 2016) que lida com um modelo KS na teoria  $f(R, T)$ .

Passando agora para o outro lado da moeda, temos o trabalho de Abbas (ABBAS, 2014) considerando o processo de colapso gravitacional na presença de um campo magnético, e o de Maurya e demais autores, que envolve o estudo de modelos anisotrópicos para estrelas compactas (MAURYA et al., 2015).

Um pouco à parte destas duas linhas podemos também citar o trabalho de Bradley e demais autores (BRADLEY et al., 2012) envolvendo perturbações escalares.

Ainda que, distanciando-se um pouco de KS, não poderíamos deixar de citar o artigo de Doroshkevich, de 1965, sobre modelo do universo com um campo magnético uniforme (DOROSHKEVICH, 1965).

Portanto, em nosso caso, pretendemos fazer um estudo envolvendo o processo de integração das equações de campo de Einstein, considerando o espaço-tempo de KS, e tratemos as soluções do ponto de vista do processo de colapso gravitacional. Para a solução que encontramos, fazemos uma introdução do proceso de colapso gravitacional.

### 3.2 EQUAÇÕES DE CAMPO

Para começar, vamos escrever a métrica de KS no mesmo formato que no livro do Prof. G. Ellis (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM, 2012), dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + A^2(t)dx^2 + B^2(t)dy^2 + B^2(t)f^2(y)dz^2, \quad (3.1)$$

onde  $A$  e  $B$  são funções apenas do tempo, e  $f$  uma função apenas do  $y$ .

A função  $f$  pode assumir as formas:

$$f(y) = \begin{cases} \sin y \\ y \\ \sinh y, \end{cases} \quad (3.2)$$

conforme tenhamos  $K = +1, 0, -1$  respectivamente.

Vamos assumir que o fluido cósmico seja perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

onde  $\rho$  e  $p$  são as quantidades usuais para este fluido.

Usando diretamente a métrica dada pela Eq. (3.1), as equações de campo, são dadas por:

$$\frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} + \left(-\frac{f''}{f}\right) \frac{1}{B^2} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} = \kappa\rho, \quad (3.4)$$

$$-\frac{2\ddot{B}}{B} + \left(-\frac{f''}{f}\right) \frac{1}{B^2} - \frac{\dot{B}^2}{B^2} = \kappa p, \quad (3.5)$$

$$-\frac{\ddot{B}}{B} - \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} - \frac{\ddot{A}}{A} = \kappa p, \quad (3.6)$$

onde usamos o GrTensor para o cálculo das componentes do tensor de Einstein, e  $f' = \frac{\partial f}{\partial y}$ .

Todavia, usando a definição da função  $f(y)$ , estas equações transformam-se, literalmente, nas equações de campo que estão no livro do Prof. G. Ellis (ELLIS; MAARTENS; MACCALLUM,

2012):

$$\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{K}{B^2} = -\kappa p; \quad (3.7)$$

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = -\kappa p; \quad (3.8)$$

$$\frac{2\dot{A}\dot{B}}{AB} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{K}{B^2} = \kappa \rho. \quad (3.9)$$

Na próxima seção, lidaremos com as soluções que determinamos, levando em conta o processo de colapso gravitacional.

### 3.3 COLAPSO GRAVITACIONAL NO MODELO KANTOWSKI-SACHS

Neste estudo vamos considerar o caso de poeira, levando em conta os três valores possíveis para  $K$ , ou seja  $+1, 0, -1$ .

Conseqüentemente, a Eq. (3.7) assume a forma:

$$\frac{2\ddot{B}}{B} + \frac{\dot{B}^2}{B^2} + \frac{K}{B^2} = 0. \quad (3.10)$$

Esta equação pode ser integrada diretamente, porém a solução não é explícita

$$t = c_2 \pm \frac{\sqrt{c_1 B - KB^2}}{K} \mp \frac{c_1 \tan^{-1} \left\{ \frac{K^{1/2} [B - c_1/2K]}{\sqrt{c_1 B - KB^2}} \right\}}{2K^{3/2}}, \quad (3.11)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são as constantes de integração. Entretanto, em nosso caso uma solução explícita seria muito bem vinda, tendo em vista que temos um fator de escala adicional a ser determinado na geometria KS.

Vamos, então fazer uma abordagem diferente do problema. Partindo da Eq. (3.10), vamos aplicar a transformada  $dt = Bd\eta$ , ou seja, uma espécie de tempo conforme para KS. Nesta nova coordenada temporal a Eq. (3.10) é escrita como:

$$\frac{2B''}{B} - \frac{B'^2}{B^2} + K = 0, \quad (3.12)$$

onde  $B' = \frac{\partial B}{\partial \eta}$ .

Introduzindo a variável  $z = \sqrt{B}$ , a Eq. (3.12) assume a forma:

$$z'' + \frac{zK}{4} = 0. \quad (3.13)$$

É interessante notar que para  $K = 0$  temos uma similaridade com a equação que governa o movimento de uma partícula sem aceleração; para  $K = +1$  uma similaridade distinta, agora

como uma partícula realizando um movimento harmônico simples. Já tínhamos feito esta observação quando tratamos o modelo de Friedmann, mas pensamos ser oportuna a repetição.

Continuando o processo de integração da Eq. (3.12), sendo auxiliado pela Eq. (3.13), obtemos:

$$B(\eta) = \left\{ c_1 \sin \left( \frac{\sqrt{K}}{2} \eta \right) + c_2 \cos \left( \frac{\sqrt{K}}{2} \eta \right) \right\}^2, \quad (3.14)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes de integração.

Vamos seguir, de perto, a discussão que fizemos em Friedmann para nos orientar nos passos seguintes. Assim, a solução dada pela Eq. (3.14) pode ser escrita como:

$$B(\eta) = B_i \left\{ \sqrt{b/K} \sin \left[ \frac{\sqrt{K}}{2} (\eta_c - \eta) \right] \right\}^2, \quad (3.15)$$

onde, fizemos uso de condições iniciais adequadas ao processo de colapso, e  $B = 0$  em  $\eta = \eta_c$ .

Escrever a expressão para o tempo de colapso neste caso é relativamente simples, pois  $\eta = \eta_i \implies B = B_i$  e

$$\eta_c - \eta_i = \frac{2}{\sqrt{K}} \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{K}{b}} \right), \quad (3.16)$$

onde a constante  $b = B_i^2 H_{B_i}^2 + K$ , e  $H_{B_i}$  é uma função de Hubble referente ao fator de escala  $B(\eta)$ .

Voltando para as equações de campo, vamos agora na busca da função  $A(\eta)$ , integrando a equação:

$$\frac{\ddot{B}}{B} + \frac{\ddot{A}}{A} + \frac{\dot{A}\dot{B}}{AB} = 0, \quad (3.17)$$

onde, naturalmente temos que substituir a Eq. (3.15).

Escrevendo a Eq. (3.17) em termos de  $\eta$  obtemos:

$$\frac{B''}{B} + \frac{A''}{A} - \left( \frac{B'}{B} \right)^2 = 0. \quad (3.18)$$

Podemos obter uma solução geral para o fator de escala  $A(\eta)$ , substituindo a Eq. (3.15) na equação diferencial dada pela Eq. (3.18), resultando:

$$A(\eta) = c_1 \left( \frac{1+F}{F-1} \right)^{1/2} + c_2 \left\{ \left( \frac{1+F}{F-1} \right)^{1/2} \ln[F + (F^2 - 1)^{1/2}] - 2 \right\}, \quad (3.19)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são novas constantes de integração, e

$$F = \cos \sqrt{K} \eta. \quad (3.20)$$

Note que a Eq. (3.19) é válida para  $K \neq 0$ .

Neste ponto já podemos adiantar, o que já dissemos anteriormente, que tanto o que parece ser uma característica interamente, pode ser também um certo problema. Nos referimos a mezcla das condições iniciais entre os fatores de escala  $A(\eta)$  e  $B(\eta)$ . Nesse ínterim pareceu-no ser o momento propício para considerarmos cada caso individualmente.

#### CASO A: $K = 0$

Vamos, então, começar discutindo o caso plano. Neste caso a Eq. (3.15) assume a forma:

$$B(\eta) = B_i b \frac{(\eta_c - \eta)^2}{4}, \quad (3.21)$$

onde  $b = B_i^2 H_{Bi}^2$ .

Por outro lado, substituímos Eq. (3.21) na Eq. (3.18) obtemos o fator de escala para  $A(\eta)$ :

$$A(\eta) = c_1(\eta)^2 + \frac{c_2}{\eta}. \quad (3.22)$$

Para que tenhamos quantidades adimensionais vamos considerar  $c_1 = e_1 b$  e  $c_2 = e_2/b^{1/2}$ . Além disso  $e_1 = e_2 = 1$ , de tal modo que a Eq. (3.22), pode ser escrita como:

$$A(\eta) = b\eta^2 + \frac{1}{\sqrt{b}\eta}. \quad (3.23)$$

Note que para  $c_2 = 0$ , os dois fatores de escala são proporcionais a  $\eta^2$  e obtemos a solução do modelo de Friedmann, portanto temos o proceso de colapso tanto para  $A(\eta)$  bem como para  $B(\eta)$ .

Em relação ao tempo de colapso, usando Eq. (3.15) com  $K \rightarrow 0$ , temos:

$$\eta_c - \eta_i = \frac{\sqrt{2}}{B_i H_{Bi}}. \quad (3.24)$$

Nas Figuras (2) e (3) plotamos a evolução dos fatores de  $B(\eta)$  e  $A(\eta)$ , respectivamente.

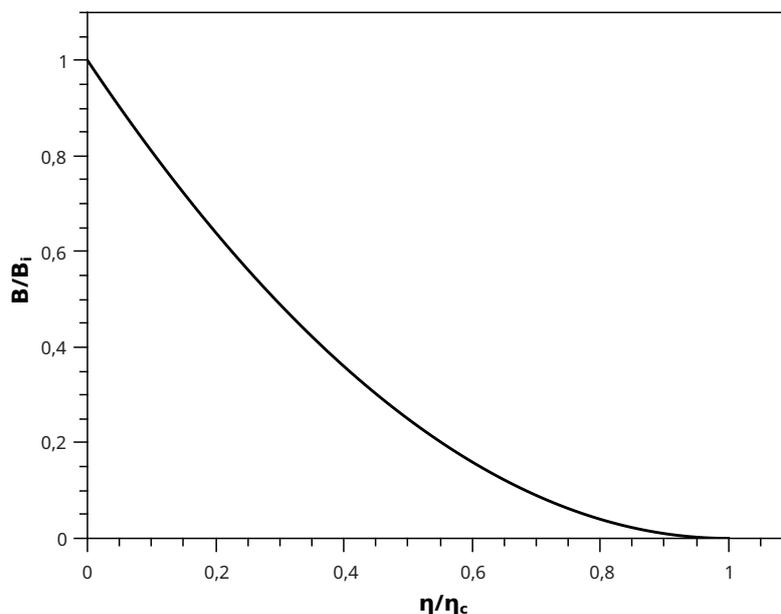
Antes de passarmos ao caso  $K = +1$ , gostaríamos de discutir algumas particularidades do caso  $K = 0$ . Primeiramente, notamos que o fator de escala  $B(\eta)$  colapsa de forma usual e esperada, para um fator de escala similar ao de Friedmann. No entanto, o fator de escala  $A(\eta)$  apresenta o que é denominado na literatura de "bouncing", que em outras palavras significa que não colapsa. Temos, então um ponto de mínimo para o fator de escala  $A(\eta)$ , que ocorre em:

$$\eta_{virada} = \frac{1}{\sqrt[3]{2} H_{Bi}}, \quad (3.25)$$

onde  $H_{Bi}$  é o valor inicial da função de Hubble para o fator de escala  $B(\eta)$ .

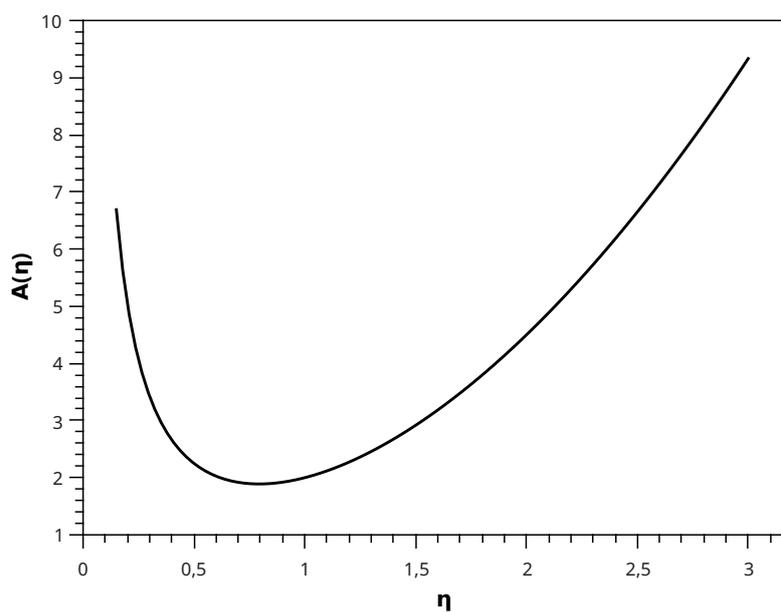
É interessante notar que se  $H_{Bi}$  for relativamente grande, o tempo de virada aproxima-se de zero. Ou seja, o colapso de  $B(\eta)$  é rápido, e praticamente não temos o "bouncing".

Figura 2 – Evolução do fator de escala  $B(\eta)$  do modelo KS, para  $K = 0$ .



Fonte: O Autor

Figura 3 – Evolução do fator de escala  $A(\eta)$ , para o caso  $K = 0$ .



Fonte: O Autor

Por outro lado, se  $H_{Bi}$  for relativamente pequeno, o colapso de  $B_\eta$  levaria um tempo muito grande, bem como seria o tempo para que ocorra o "bouncing".

Com um certo cuidado, podemos dizer que o "bouncing" em  $A(\eta)$  só aparece depois que  $B(\eta)$  colapsa. Todavia, este é um ponto que desejamos estudar posteriormente.

CASO B:  $K = 1$ 

Para o caso denominado usualmente de fechado, no que se refere ao modelo de Friedmann, a Eq. (3.15) pode ser escrita na forma:

$$B(\eta) = \frac{B_i}{2}(1 + \cos(\eta - \pi)), \quad (3.26)$$

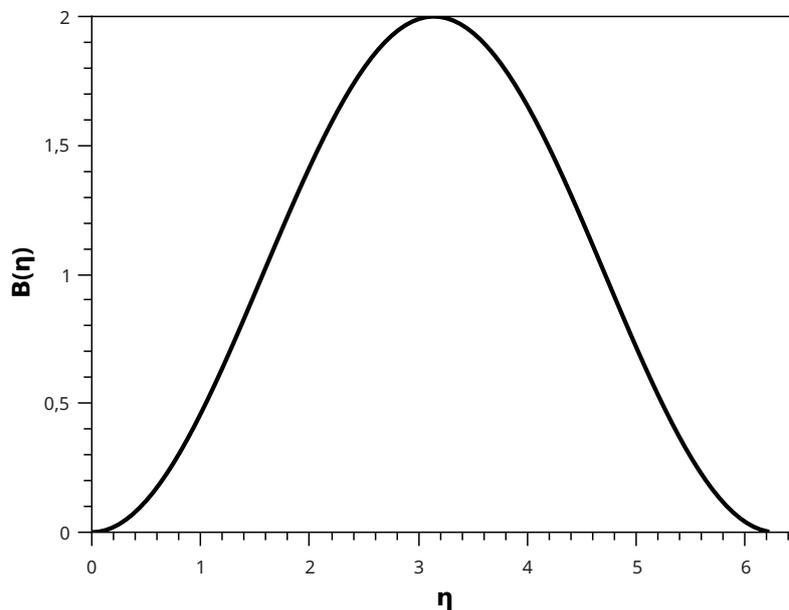
onde adicionamos, convenientemente, uma fase para que o nosso "Big Bang" fique bem caracterizado.

Por sua vez, a Eq. (3.19) assume a forma:

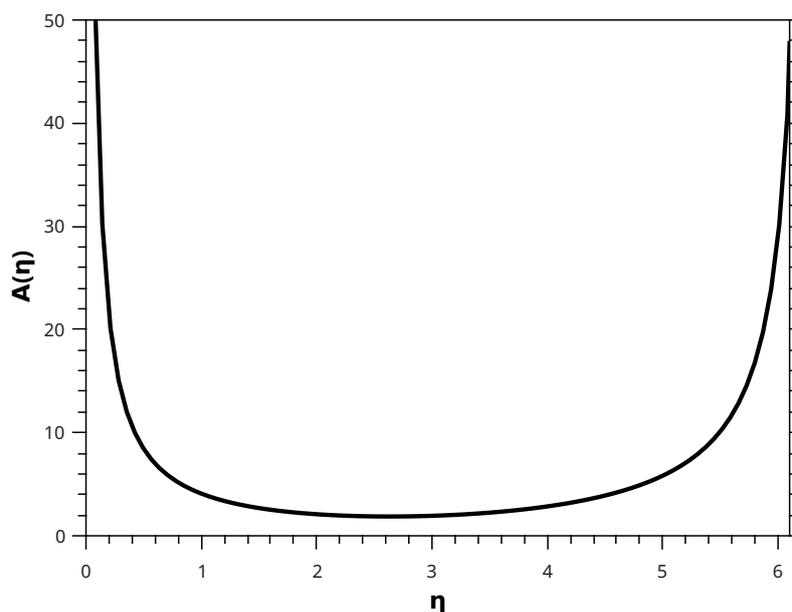
$$A(\eta) = c_1 \left( \frac{\sin(\eta - \pi)}{1 + \cos(\eta - \pi)} \right) + c_2 \left( \frac{(\eta - \pi)(1 - \cos(\eta - \pi)) + 2 \sin(\eta - \pi)}{\sin(\eta - \pi)} \right). \quad (3.27)$$

Na Figura (4) e na Figura (5) mostramos os gráficos referentes a estes dois fatores de escala, e de certa forma podemos ver um comportamento similar em  $K = 0$ . Ou seja,  $B(\eta)$  colapsa e  $A(\eta)$  forma um "bouncing". Naturalmente, desconsiderando suas peculiaridades.

Figura 4 – Evolução do fator de escala  $B(\eta)$ , para o caso  $K = 1$ .



Fonte: O Autor

Figura 5 – Evolução do fator de escala  $A(\eta)$ , do modelo KS para  $K = 1$ .

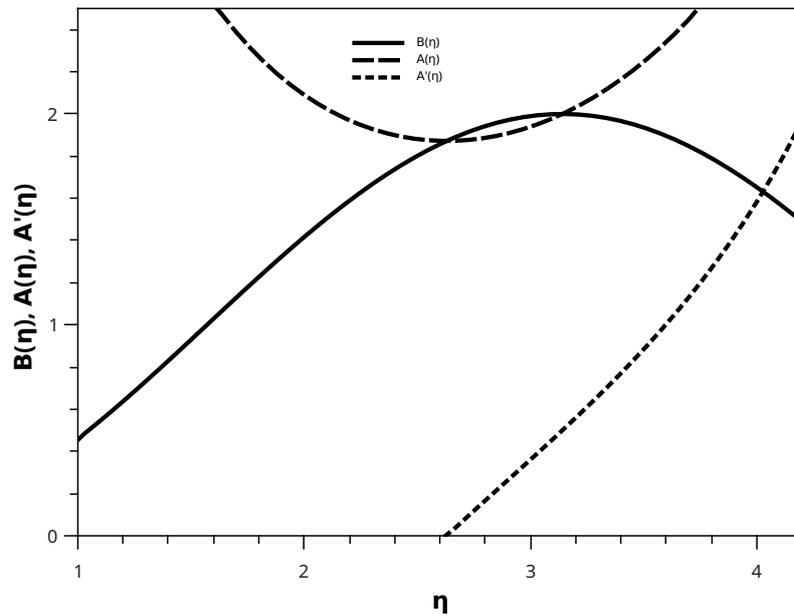
Fonte: O Autor

Aqui vamos considerar um gráfico adicional na Figura (6) que envolve:

- fator de escala  $B(\eta)$  para  $K = +1$ ;
- fator de escala  $A(\eta)$  para  $K = +1$ ;
- $A'(\eta)$  para caracterizar o mínimo que aparece durante o bouncing, ou  $A'(\eta) = \frac{\partial A}{\partial \eta}$ .

Este é um ponto que devemos observar com mais cuidado futuramente, ou seja, a ligação entre o tempo de colapso, e o tempo que denominamos de virada, caracterizando o mínimo do "bouncing".

Figura 6 – Evolução dos fatores de escala  $B(\eta)$ ,  $A(\eta)$  e  $A'(\eta)$  do modelo KS para  $K = 1$ .



Fonte: O Autor

### CASO C: $K = -1$

Finalmente, para o caso aberto, ou seja, onde  $K = -1$ , a Eq. (3.15) assume a forma:

$$B(\eta) = \frac{B_i}{2} \{ \cosh(\eta_c - \eta) - 1 \}, \quad (3.28)$$

onde  $\eta_c$  é o tempo de colapso.

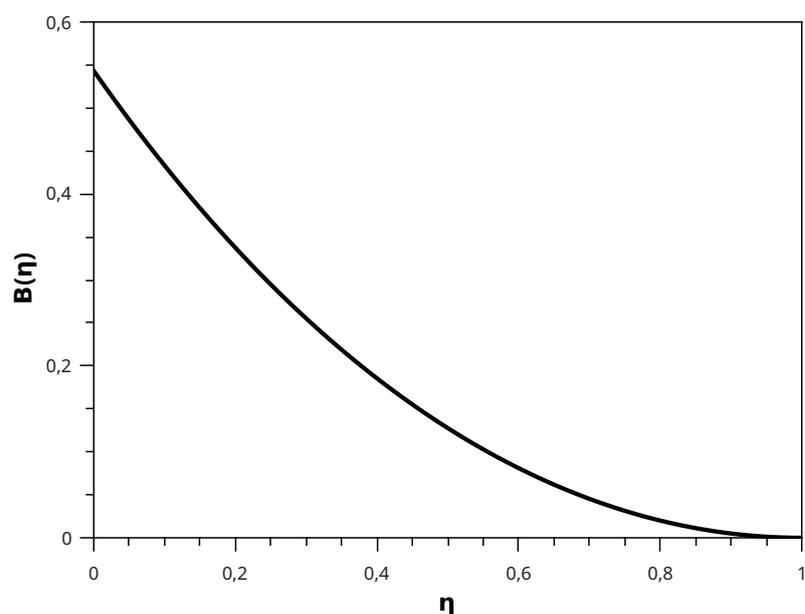
Considerando a Eq. (3.19), para este caso temos:

$$A(\eta) = c_1 \left( \frac{\sinh(\eta)}{\cosh(\eta) - 1} \right) + c_2 \left( \frac{\eta(\cosh(\eta) + 1) - 2 \sinh(\eta)}{\sinh(\eta)} \right), \quad (3.29)$$

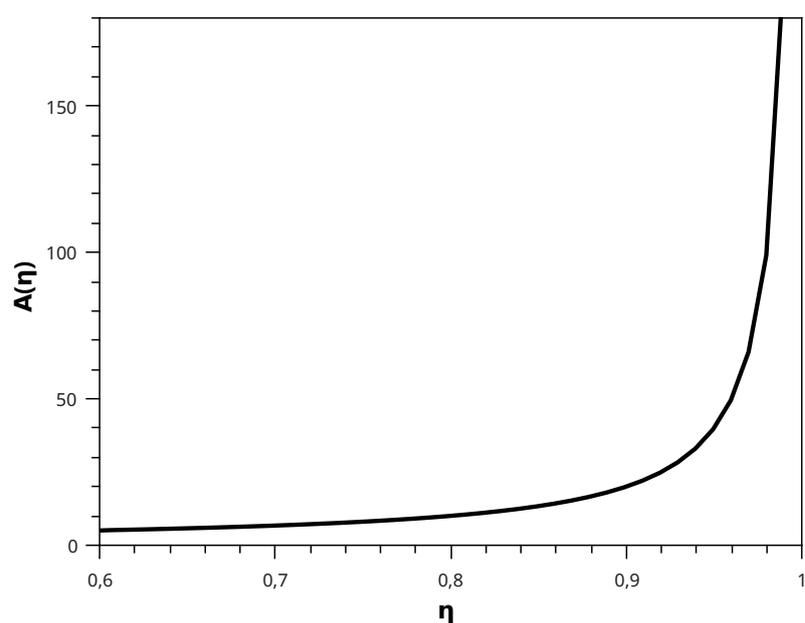
onde

$$F = \cosh \eta. \quad (3.30)$$

Nas Figura (7) e Figura (8) colocamos, respectivamente, os fatores de escala  $B(\eta)$  e  $A(\eta)$  para o caso  $K = -1$ . Notamos a ausência do "bouncing" no fator de escala  $A(\eta)$ , e  $B(\eta)$  colapsa.

Figura 7 – Evolução do fator de escala  $B(\eta)$ , do modelo KS para o caso  $K = -1$ .

Fonte: O Autor

Figura 8 – Evolução do fator de escala  $A(\eta)$ , do modelo KS para o caso  $K = -1$ .

Fonte: O Autor

### 3.4 ESCALARES PARA O MODELO KANTOWSKI-SACHS

Neste estudo, nos restringimos ao processo de colapso gravitacional para o modelo de KS, não entrando na discussão ,o destino final do processo de colapso, ou seja, na discussão da conjectura de censura cósmica e formação de horizontes.

No entanto, como este será um objeto de continuidade deste estudo, vamos adiantar um pouco a questão, calculando os escalares que são importantes para a discussão futura do tipo de singularidade que estamos lidando:

- Escalar de Ricci,
- Escalar de Weyl,
- Escalar de Kretschmann.

Para o espaço-tempo KS os escalares de Weyl e Kretschmann assumem expressões demasiadamente longas, assim nos restringimos a colocar para cada caso os gráficos correspondentes. Sendo assim, vejamos cada caso:

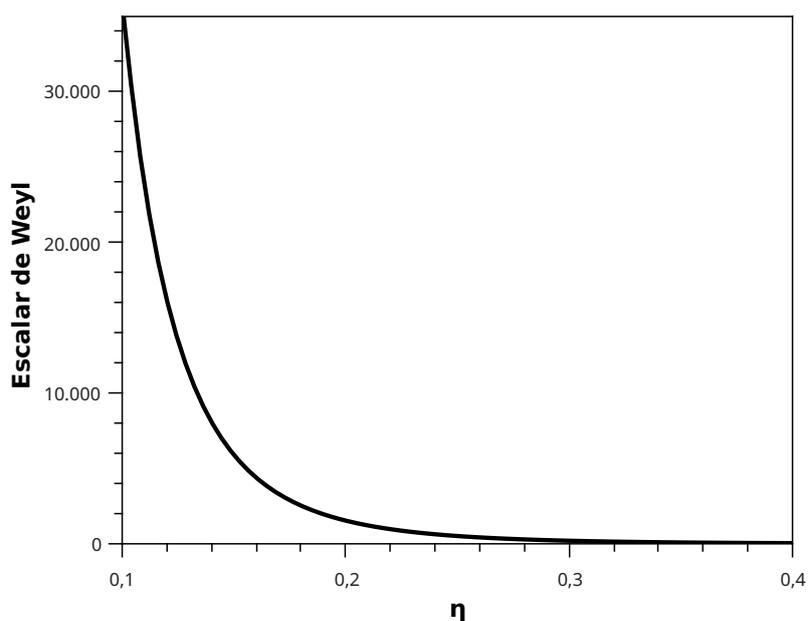
#### CASO $K = 0$

O escalar de Ricci para esta caso é dado por:

$$R = \frac{4(3\eta^4 + \eta^3 + 1)}{(\eta^3 + 1)(1 + \eta)^5 \eta^2}. \quad (3.31)$$

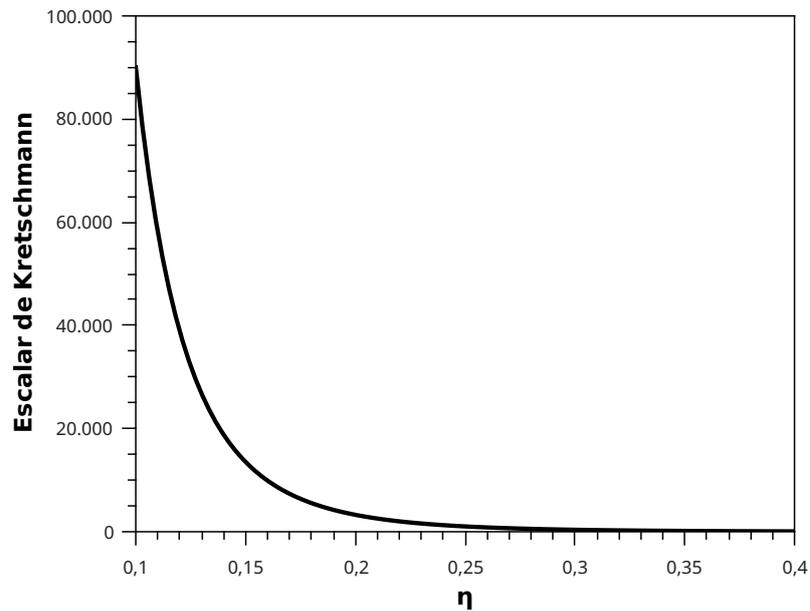
Enquanto, na Figura (9) e Figura (10) aparecem, respectivamente, os perfis para os escalares de Weyl e Kretschmann.

Figura 9 – Evolução do escalar de Weyl do modelo KS, para o caso  $K = 0$ .



Fonte: O Autor

Figura 10 – Evolução do escalar de Kretschmann do modelo KS, para o caso  $K = 0$ .



Fonte: O Autor

### CASO $K = +1$

Neste caso escalar de Ricci é dado por:

$$R = \frac{8}{\cos \eta(2 \cos \eta + \eta \sin \eta + \sin \eta + 4) + \sin \eta(1 + \eta) + 2}. \quad (3.32)$$

Nas Figuras (11) e (12) aparecem, respectivamente, os escalares de Weyl e Kretschmann.

### CASO $K = -1$

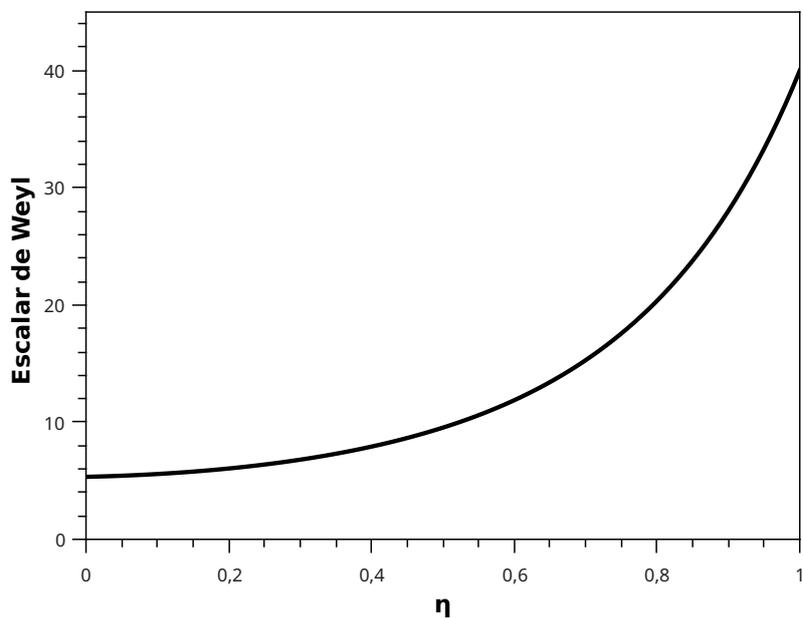
Para este caso o escalar de Ricci assume a forma:

$$R = \frac{8}{\cosh \eta(-2 \cosh \eta + \eta \sinh \eta + \sinh \eta + 4) - \sinh \eta(1 + \eta) - 2}. \quad (3.33)$$

Enquanto, na Figura (13) e Figura (14) aparecem, respectivamente, os escalares de Weyl e Kretschmann para o caso  $K = -1$ .

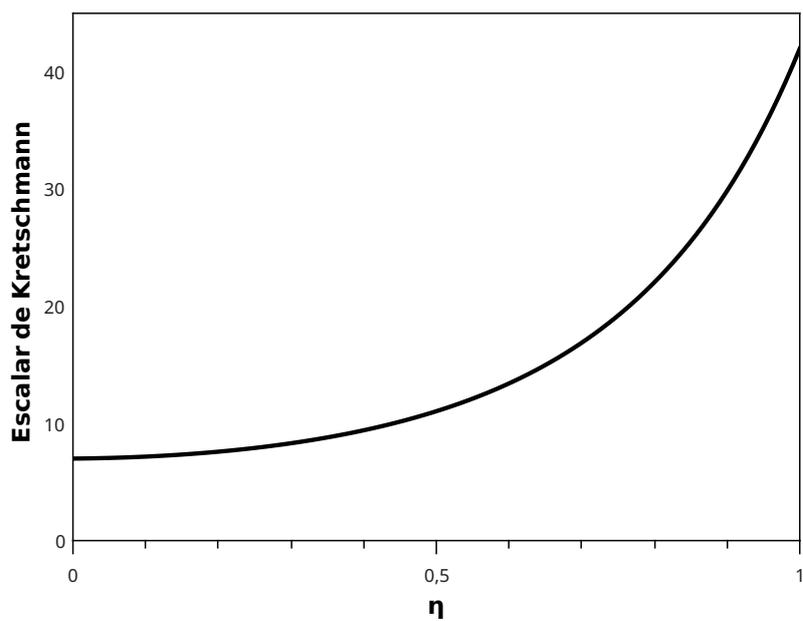
É interessante notar que, embora o fator de escala  $B$  colapsa, o escalar de Kretschmann não aponta a existência de singularidade, todavia esta correlação tem que ser examinada com mais cuidado.

Figura 11 – Evolução do escalar de Weyl do modelo KS para  $K = 1$ .



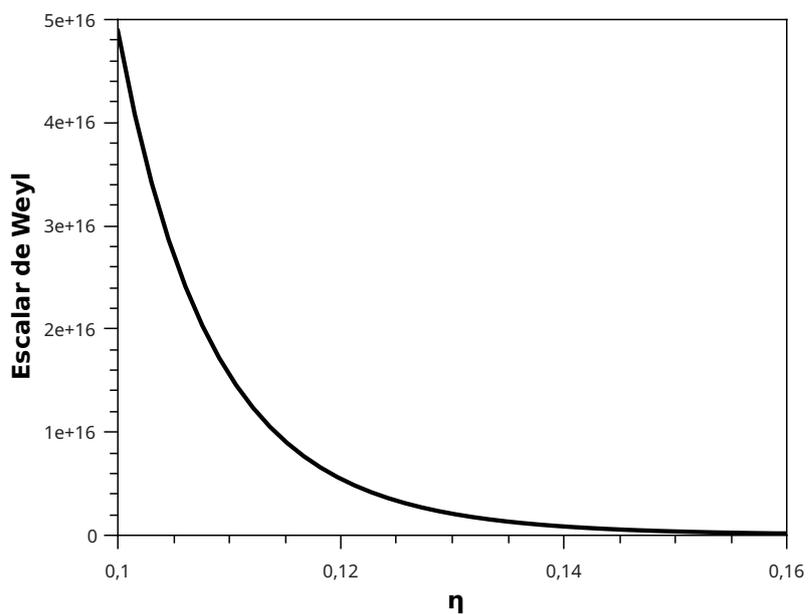
Fonte: O Autor

Figura 12 – Evolução do escalar de Kretschmann, do modelo KS para  $K = 1$ .



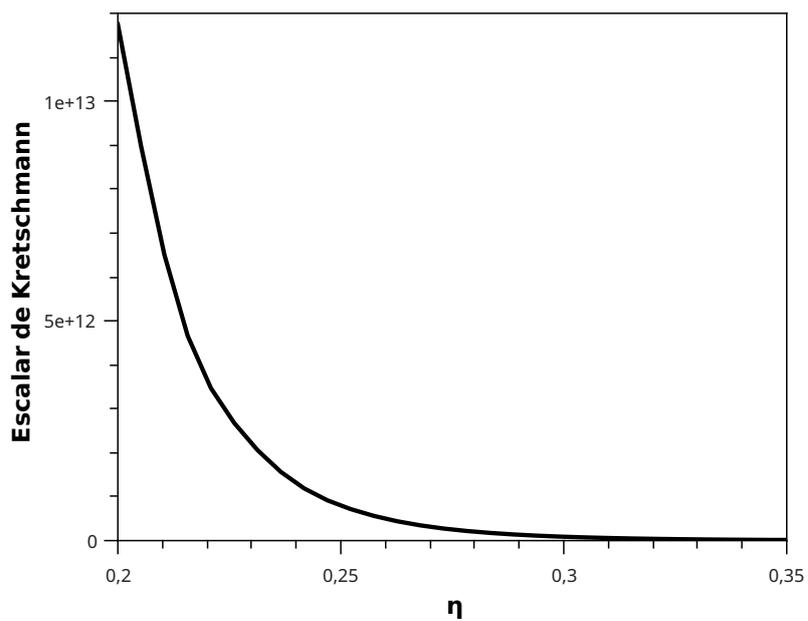
Fonte: O Autor

Figura 13 – Evolução do escalar de Weyl, do modelo KS para o caso  $K = -1$ .



Fonte: O Autor

Figura 14 – Evolução do escalar de Kretschmann, do modelo KS para o caso  $K = -1$ .



Fonte: O Autor

## 4 CONCLUSÕES

Fizemos, uma abordagem breve de espaços maximamente simétricos, e dois exemplos que podem ser considerados as mais populares soluções das equações de campo da teoria da relatividade geral: O modelo de Schwarzschild e o de Friedman. De certo, a máxima simetria das seções espaciais, parece-nos indiscutível, mas pensamos que o envolvimento do tempo ainda merece uma análise mais detalhada.

Posteriormente, tratamos do modelo de Friedmann com curvatura arbitrária, e um termo cosmológico. Esta parte do trabalho já foi preparando o terreno para o procedimento que adotamos na integração das equações de campo para o modelo KS, bem como o envolvimento de uma pressão não nula.

Originalmente, o modelo KS é o de geometria com  $K = +1$ , ou seja, fechado, todavia adotamos a nomenclatura de modelo KS os que são governados pela métrica dada pela Eq. (3.1), ou seja, com curvatura podendo ser 0, +1 e  $-1$ .

Passamos então a cuidar do processo de colapso gravitacional, admitindo condições iniciais a tal problema. Tratamos separadamente os casos com  $K = +1, 0, -1$ . Nos restringimos a escrever nossas soluções indicando onde o processo de colapso estaria se efetuando, e onde ocorreria um "bouncing", que poderíamos interpretar em uma tendência ao processo de colapso que repentinamente é abortado.

Terminamos escrevendo diversos escalares de Ricci, Weyl e Kretschmann. O cálculo desses escalares é que subsidiarão as nossas pretensões para a continuidade deste trabalho, ou seja:

- Determinar o destino final do processo de colapso.
- Analisar a evolução da densidade de fluido durante o processo de colapso.
- Usar a Equação de Raychaudhuri e o escalar de Kretschmann para caracterizar as eventuais singularidades deste modelo.
- Incluir no tensor momento-energia um campo magnético, para qualificar mais realisticamente o processo de colapso gravitacional.
- Refazer o processo de integração com pressão não nula.
- Por fim, adicionar um termo cosmológico responsável pela energia de vácuo de todos os campos que permeiam o fluido considerado.

Todos estes procedimentos citados, pensamos que tornarão mais evidentes algumas peculiaridades que ainda temos que avançar em termos de clareza das suas origens.

## REFERÊNCIAS

- ABBAS, G. **Effects of Electromagnetic Field on The Collapse and Expansion of Anisotropic Gravitating Source** . *Astrophys. Space Sci.*, v. 252, p. 955, 2014. Citado na página 36.
- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. 1. ed. United States: Dover Publications, 1964. Citado na página 32.
- ADHAV, K. S. et al. **Kantowski-Sachs cosmological models with anisotropic dark energy** . *Cent. Eur. J. Phys.*, v. 9, n. 4, p. 919, 2011. Citado na página 36.
- ASSAD, M. J. D.; LIMA, J. A. S. **General and Unified Solution for Perfect Fluid Homogeneous and Isotropic Cosmological Models** . *Gen. Rev. D*, v. 20, n. 6, p. 527, 1988. Citado na página 31.
- BRADLEY, M. et al. **Density growth in Kantowski–Sachs cosmologies with a cosmological constant** . *Classical and Quantum Gravity*, v. 29, n. 9, p. 095023, 2012. Citado na página 36.
- CAMPOS, M.; LIMA, J. A. S. **Black hole formation with an interacting vacuum energy density** . *Phys. Rev. D*, v. 86, n. 4, p. 043012, 2012. Citado na página 33.
- CARROLL, S. *Spacetime and Geometry An Introduction to General Relativity*. 1. ed. United States: Addison wesley, 2004. Citado na página 17.
- CONRADI, H.-D. **Quantum Cosmology of Kantowski-Sachs like Models** . *Class. Quantum Grav.*, v. 12, n. 10, p. 2423, 1995. Citado na página 36.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. 1. ed. United States: Oxford University Press, 1992. Citado na página 19.
- DOROSHKEVICH, A. G. **Model of a universe with a uniform magnetic field** . *Astrofizika*, v. 1, n. 3, p. 255, 1965. Citado na página 37.
- ELLIS, G.; MAARTENS, R.; MACCALLUM, M. A. H. *Relativistic Cosmology*. 1. ed. United States: Cambridge University Press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 38.
- FARAONI, V. *Cosmological and Black Hole Apparent Horizont*. 1. ed. Switzaerland: Springer International Publishing, 2015. Citado na página 21.
- HOBSON, G. P. E. M. P.; LASENBY, A. N. *General Relativity An Introduction for Physicists*. 1. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2006. Citado 8 vezes nas páginas 15, 16, 18, 19, 22, 23, 24 e 25.
- KATORE, S. D.; HATKAR, S. P. **Bianchi *type*III and Kantowski–Sachs domain wall cosmological models in the  $f(R, T)$  theory of gravitation** . *Prog. Theor. Exp. Phys.*, v. 2016, n. 3, p. 033E01, 2016. Citado na página 36.
- KOMPANEETS, A. S.; CHERNOV, A. S. **Solutions of the Gravitation Equations for a Homogeneous Anisotropic model**. *J. Exptl. Theoret. Phys.*, v. 20, n. 5, p. 1303, 1965. Citado na página 36.

- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of fields*. 4. ed. United Kingdom: Pergamon Press, 1975. Citado na página 35.
- MARTEL, K.; POISSON, E. **Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes** . *Am. J. Phys.*, v. 69, n. 4, p. 476, 2001. Citado na página 22.
- MAURYA, S. K. et al. **Anisotropic models for compact stars** . *Eur. Phys. J. C*, v. 75, n. 5, p. 225, 2015. Citado na página 36.
- MENDES, L. E.; HENRIQUES, A. B. **Inflation in a simple Kantowski-Sachs model** . *Physics Letters B*, v. 254, n. 1, p. 44, 1991. Citado na página 36.
- PARISI, N. R. L.; VILASI, G. **Kantowski-Sachs universes sourced by a Skyrme fluid** . *Phys. Rev. D*, v. 91, n. 6, p. 063533, 2015. Citado na página 36.
- PERICO, E. L. D.; LIMA, J. A. S.; CAMPOS, M. **Simplified gravitational collapse with an interacting vacuum energy density** . *Gen. Relativ. Gravit.*, v. 48, n. 1, p. 8, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- STEPHANI, H. *Relativity an Introduction to Special and General Relativity*. 3. ed. United Kingdom: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 18.
- SUBENOY, C.; ANUSUA, R. **Anisotropic cosmological models with bulk viscosity for variable  $G$  and  $\Lambda$**  . *Astrophys Space Sci.*, v. 313, n. 4, p. 389, 2008. Citado na página 36.
- WEINBERG, S. *Gravitation and Cosmology*. 1. ed. Canadá: John Wiley & Sons, 1972. Citado 6 vezes nas páginas 11, 15, 16, 17, 22 e 28.

**APÊNDICES**



$$\begin{array}{c}
 \text{Coordinates} = [t, x, y, z] \\
 \text{Metric:} \\
 g_{a\ b} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A(t)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B(t)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B(t)^2 f(y)^2 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

You may choose to

- 0) Use the metric WITHOUT saving it,
- 1) Save the metric as it is,
- 2) Correct an element of the metric,
- 3) Re-enter the metric,
- 4) Add/change constraint equations,
- 5) Add a text description, or
- 6) Abandon this metric and return to Maple.

**makeg>0;**

Calculated ds for KS (0.005000 sec.)

*Default spacetime = KS*

*For the KS spacetime:*

*Coordinates*

*x(up)*

$x^a = [t, x, y, z]$

*Line element*

$$ds^2 = - dt^2 + A(t)^2 dx^2 + B(t)^2 dy^2 + B(t)^2 f(y)^2 dz^2$$

makeg() completed.

>

Componentes do tensor de Riemann

**> grcalc(R(dn,dn,dn,dn));**

Calculated detg for KS (0.004000 sec.)

Calculated g(up,up) for KS (0.004000 sec.)

Calculated g(dn,dn,pdn) for KS (0.000000 sec.)

Calculated Chr(dn,dn,dn) for KS (0.005000 sec.)

Calculated R(dn,dn,dn,dn) for KS (0.000000 sec.)

CPU Time = 0.009

**> grdisplay(R(dn,dn,dn,dn));**

For the KS spacetime:

Covariant Riemann

$$R_{txtx} = -A(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right)$$

$$R_{tyty} = -B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right)$$

$$R_{tztz} = -B(t) f(y)^2 \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right)$$

$$R_{xyxy} = B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) A(t) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right)$$

$$R_{xzxz} = B(t) f(y)^2 \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) A(t) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right)$$

$$R_{yzyz} = -B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) + B(t)^2 f(y)^2 \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2$$

>

Componentes do tensor de Ricci

> **grcalc(R(dn,dn));**

Calculated Chr(dn,dn,up) for KS (0.004000 sec.)

Calculated R(dn,dn) for KS (0.000000 sec.)

CPU Time = 0.004

> **grdisplay(R(dn,dn));**

For the KS spacetime:

Covariant Ricci

$R(dn, dn)$

$$R_{ab} = \left[ \left[ - \frac{\left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) B(t) + 2 \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t)}{A(t) B(t)}, 0, 0, 0 \right] \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c} A(t) \left( \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) B(t) + 2 \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \right) \\ 0, \frac{\quad}{B(t)}, 0, 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0, 0, \frac{1}{A(t) f(y)} \left( B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) + B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) \right. \\ \left. + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right), 0 \end{array} \right], \left[ \begin{array}{c} 0, 0, 0, \frac{1}{A(t)} \left( f(y) \left( B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) \right. \right. \\ \left. \left. + B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right) \right) \end{array} \right]$$

>

Componentes do tensor de Weyl

> **grcalC(C(dn, dn, dn, dn));**

Calculated Ricciscalar for KS (0.000000 sec.)  
 Calculated C(dn, dn, dn, dn) for KS (0.004000 sec.)  
 CPU Time = 0.004

> **grdisplay(C(dn, dn, dn, dn));**

For the KS spacetime:

Covariant Weyl

$$C_{txtx} = - \frac{1}{3 B(t)^2 f(y)} \left( A(t) \left( B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) - B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) \right. \right. \\ \left. \left. - B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right) \right)$$

$$C_{tyty} = \frac{1}{6 A(t) f(y)} \left( B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) - B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & - B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \\
 C_{tztz} &= \frac{1}{6 A(t)} \left( f(y) \left( B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) - B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) \right. \right. \\
 & \left. \left. - B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right) \right) \\
 C_{xyxy} &= -\frac{1}{6 f(y)} \left( A(t) \left( B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) - B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) \right. \right. \\
 & \left. \left. - B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right) \right) \\
 C_{xzxz} &= \frac{1}{6} B(t) f(y)^2 \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) A(t) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) + \frac{1}{6} A(t)^2 f(y)^2 B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) \\
 & + \frac{1}{6} A(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) - \frac{1}{6} A(t)^2 f(y)^2 \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 - \frac{1}{6} B(t)^2 f(y)^2 A(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) \\
 C_{yzyz} &= \frac{1}{3 A(t)} \left( B(t)^2 f(y) \left( B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) - B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) \right. \right. \\
 & \left. \left. - B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right) \right)
 \end{aligned}$$

>

Escalar de Ricci

> **grcalc(Ricciscalar);**

CPU Time = 0.

> **grdisplay(Ricciscalar);**

For the KS spacetime:

Ricci scalar

$$R = \frac{1}{B(t)^2 A(t) f(y)} \left( 2 \left( B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) + 2 B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) \right. \right. \\ \left. \left. + 2 B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) - \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) + \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right) \right)$$

>

Escalar de Weyl

> **grcalc(WeylSq);**

Calculated C(dn,dn,up,up) for KS (0.008000 sec.)

Calculated WeylSq for KS (0.000000 sec.)

CPU Time = 0.008

> **grdisplay(WeylSq);**

*For the KS spacetime:*

*Full Contraction of Weyl*

$$WeylSq = \frac{1}{3 A(t)^2 B(t)^4 f(y)^2} \left( 4 \left( -B(t)^2 f(y) \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right) + B(t) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right) \left( \frac{d}{dt} A(t) \right) f(y) \right. \right. \\ \left. \left. + B(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right) A(t) f(y) + \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) A(t) - \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 A(t) f(y) \right)^2 \right)$$

>

Escalar de Kretschmann

> **grcalc(RiemSq);**

Created definition for R(dn,dn,up,up)

Calculated R(dn,dn,up,up) for KS (0.004000 sec.)

Calculated RiemSq for KS (0.000000 sec.)

CPU Time = 0.019

> **grdisplay(RiemSq);**

*For the KS spacetime:*

*Full Contraction of Riemann*

$$\begin{aligned}
 K = \frac{1}{A(t)^2 B(t)^4 f(y)^2} & \left( 4 \left( 2 \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 \left( \frac{d}{dt} A(t) \right)^2 B(t)^2 f(y)^2 + A(t)^2 \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right)^2 \right. \right. \\
 & - 2 A(t)^2 \left( \frac{d^2}{dy^2} f(y) \right) f(y) \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^2 + A(t)^2 f(y)^2 \left( \frac{d}{dt} B(t) \right)^4 \\
 & \left. \left. + \left( \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right)^2 B(t)^4 f(y)^2 + 2 \left( \frac{d^2}{dt^2} B(t) \right)^2 A(t)^2 B(t)^2 f(y)^2 \right) \right)
 \end{aligned}$$

]