



UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

PATRÍCIA MARIA DE CARVALHO ALCÂNTARA

MODELO *LAMBDA*-CDM EMERGENTE

Boa Vista, RR

2017

PATRÍCIA MARIA DE CARVALHO ALCÂNTARA

MODELO *LAMBDA*-CDM EMERGENTE

Texto dissertativo apresentado como pré-requisito para obtenção de título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima. Área de Concentração: Cosmologia

Orientador: Prof. Dr. Miguel Gustavo de Campos Batista.

Boa Vista, RR

2017

PATRÍCIA MARIA DE CARVALHO ALCÂNTARA

MODELO *LAMBDA*-CDM EMERGENTE

Texto dissertativo apresentado como pré-requisito para obtenção de título de Mestre em Física pelo Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Roraima. Área de Concentração: Cosmologia. Apresentado em 05 de Maio de 2017 e avaliado pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Miguel Gustavo de Campos Batista
(Presidente) Universidade Federal de Roraima -
UFRR

Prof. Dr. José Carlos Teixeira de Oliveira
(Membro) Universidade Federal de Roraima -
UFRR

Prof. Dr. Roberto Ferreira dos Santos
(Membro) Universidade Federal de Roraima -
UFRR

Boa Vista, RR

2017

Aos meus pais,

José e Deuza.

Por sempre acreditarem
que esse sonho seria possível.

AGRADECIMENTOS

Não poderia deixar de agradecer primeiramente a Deus, e ao professor Miguel pela paciência, por me orientar e ter acreditado na realização deste trabalho, e por sempre me motivar a seguir em frente;

À minha mãe Deuza, a meu pai José, e aos meus irmãos Paula e Daniel por todo o incentivo e apoio ao longo do curso;

À CAPES pelo apoio financeiro;

Finalmente, ao Arnaldo, Marcelo e Karine, pelo apoio que deram na reta final do curso. Aos amigos de curso Willian, Brisa, Rafaela, Jailson, pelo companheirismo, pelo partilha de bons lanches e bons momentos. E a todos que contribuíram, de forma direta ou indireta, para a realização deste trabalho.

"Lembre-se que as pessoas
podem tirar tudo de você,
menos o seu conhecimento."

(Albert Einstein)

RESUMO

Faremos um estudo de um modelo cosmológico considerando um sistema aberto com uma dimensão adicional. O espaço-tempo é anisotrópico e sofre um processo de isotropização com o passar do tempo. O espaço-tempo quadridimensional emergente de nosso espaço-tempo com 5D é o modelo *Lambda*-CDM, considerado presentemente como o modelo que ajusta-se perfeitamente a diversos experimentos cosmológicos.

Palavras-chave: Produção de partículas; dimensão extra; processo de isotropização.

ABSTRACT

We will study a cosmological model considering an open system with an additional dimension. Space-time is anisotropic and undergoes an isotropic process over time. The four-dimensional space-time emerging from our space-time with 5D is the model *Lambda* CDM, that presently has a good concordance with several cosmological experiments.

Keywords: Particle production; extra dimension; isotropization process.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Evolução do fator de escala $R(t)$ para $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$, para um universo plano $k = 0$	19
Figura 2 – Evolução da densidade de energia dada pela equação (2.15), com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$. O espaço-tempo considerado é para a curvatura nula.	20
Figura 3 – Evolução temporal do parâmetro de Hubble $H(t)$, com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$. Onde fizemos uso da equação (2.18).	21
Figura 4 – Evolução do fator de escala, $R(t)$, para o modelo de Friedmann, para $k = +1$, $k = 0$ e $k = -1$	22
Figura 5 – Evolução do fator de escala, $R(t)$, para o modelo de de Sitter. A quantidade $\sqrt{\Lambda/3}t$ é adimensional.	26
Figura 6 – Evolução do fator de escala $R(t)$ do modelo Λ CDM.	30
Figura 7 – Gráfico da densidade de energia para o modelo Λ CDM, onde $\sqrt{3\Lambda}t$ é adimensional.	30
Figura 8 – Evolução da Função de Hubble $H(t)$ para o modelo Λ CDM.	31
Figura 9 – Evolução do parâmetro de desaceleração para o modelo Λ CDM. Podemos observar em $q(t) = 0$, o <i>redshift</i> de transição, ou seja, indica que o universo sofreu uma transição dinâmica de uma fase desacelerada para uma fase acelerada.	31
Figura 10 – Evolução do fator de escala, $R(t)$, para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para ω e β	35
Figura 11 – Gráfico da função de Hubble para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para ω e β	36
Figura 12 – Gráfico da densidade do número de partículas para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para ω e β	36
Figura 13 – Gráfico do fator de escala para o modelo de Friedmann com produção de partículas. A coordenada temporal que usamos é adimensional, e dado por: $\frac{\alpha\kappa M}{6}t$	41
Figura 14 – Gráfico da densidade de energia no modelo de Friedmann com produção de partículas.	41
Figura 15 – Gráfico para a fonte de partículas. Consideramos duas fontes distintas: $\Psi = 3n\beta H$ (LIMA; GERMANO; ABRAMO, 1989) e $\Psi = \alpha H^2$ (PRIGOGINE J. GEHENIAU; NARDONE, 1989).	42
Figura 16 – Evolução do parâmetro de desaceleração para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para C . Note que depois de um determinado tempo, todos alcançam o mesmo valor para $q(t)$, ou seja, "caem" no modelo de de Sitter, independente do valor de C	42

Figura 17 – Evolução dos Fatores de Escala $R(t)$ e $Y(t)$, com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$, no modelo de Friedmann, usando as equações (2.9) e (4.17).	50
Figura 18 – Gráfico da densidade do número de partículas com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$, usando a equação (4.26)	51
Figura 19 – Evolução dos fatores de escala $R(t)$, $Y(t)$ e $L(t)$, para o modelo emergente dependência potencial. Assumindo os valores: $\omega = 0$ e $\alpha = -1/2$	55
Figura 20 – Evolução do fator de escala $R(t)$, que mimetiza o modelo cosmológico Λ CDM, onde assumimos $\Delta = 1/2$	57
Figura 21 – Evolução do fator de escala $Y(t)$, onde assumimos $\Delta = 1/2$	57
Figura 22 – Evolução do parâmetro de desaceleração, onde assumimos $\Delta = 1/2$	58
Figura 23 – Evolução do parâmetro de desaceleração, onde assumimos $\Delta = -1/2$	59

LISTA DE SÍMBOLOS

$G^{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
k	Constante de curvatura
$R(t)$	Fator de escala
Λ	Constante cosmológica
$g^{\mu\nu}$	Tensor métrico
κ	Constante gravitacional
$T^{\mu\nu}$	Tensor momento-energia
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
R	Escalar de Ricci
ρ	Densidade de matéria-energia do fluido
P	Pressão do fluido
u	Quadrivelocidade do fluido
$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$	Símbolos de Christoffel
∇_{μ}	Derivada covariante
ω	Parâmetro da equação de estado
ρ_m	Densidade de matéria
ρ_r	Densidade de radiação
ρ_{Λ}	Densidade de vácuo
R_*	Fator de escala para um tempo específico
ρ_*	Densidade de momento-energia de um tempo específico
$q(t)$	Parâmetro de desaceleração
q_0	Parâmetro de desaceleração para um tempo específico
$H(t)$	Função de Hubble
z	Desvio para o vermelho (<i>redshift</i>)

$\Omega_i(t)$	Parâmetro de densidade de múltiplos componentes
Ω_m	Parâmetro de densidade da matéria
Ω_r	Parâmetro de densidade da radiação
Ω_Λ	Parâmetro de densidade do vácuo
Ω_k	Parâmetro de densidade da curvatura
P_c	Pressão de criação
$n(t)$	Densidade do número de partículas
Ψ	Fonte geradora de partículas
β	Parâmetro de criação
h	Entalpia
N	Número de partículas
V	Volume
S	Entropia
T	Temperatura
s	Entropia por volume
\tilde{P}	Pressão fenomenológica
M	Massa da partícula

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	MODELOS COSMOLÓGICOS	16
2.1	MODELO COSMOLÓGICO FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON- WALKER	16
2.2	MODELO DE DE SITTER	25
2.3	MODELO Λ CDM	27
3	PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS	32
3.1	EQUAÇÕES DE FRIEDMANN COM PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS . .	33
3.2	PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS E PRODUÇÃO DE ENTROPIA	37
4	SISTEMA COSMOLÓGICO ABERTO ANISOTRÓPICO	46
4.1	MODELO ABERTO ANISOTRÓPICO COM DECAIMENTO EM FRIED- MANN PLANO	49
4.2	MODELO ABERTO ANISOTRÓPICO COM DECAIMENTO NO MO- DELO DE DE SITTER	52
5	MODELOS EMERGENTES	53
5.1	CASO I - MODELO COM DEPENDÊNCIA POTENCIAL PARA O FATOR DE ESCALA	53
5.2	CASO II - MODELO <i>LAMBDA</i> -CDM EMERGENTE	56
6	CONCLUSÕES	60
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

Recontar a história do universo com base nos dados observacionais, tem sido uma das preocupações da cosmologia moderna, onde concordamos que de fato é um grande desafio. Conhecer a real origem do conteúdo material e energético do universo, é um dos mais fascinantes problemas ainda não solucionados da cosmologia.

Ao longo dos anos tem se buscado incessantemente descrever o universo através de um modelo cosmológico, todavia, ainda não se tem um que responda satisfatoriamente a todas as observações. Entre muitos modelos desenvolvidos por anos a fio, iremos nos restringir a um número pequeno deste conjunto, e que de certa forma mantém uma correlação com o modelo que será estudado mais a frente, no presente trabalho.

O primeiro modelo estudado é o de Friedmann, que por vários anos foi considerado como modelo padrão para descrever o cosmos, e tem como base o princípio cosmológico. Este princípio torna dois pontos distintos no universo indistinguíveis, ou seja, o universo é homogêneo e isotrópico a grandes escalas em qualquer valor do tempo cósmico. Além disso, embora o modelo Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker (FLRW) não responda a todos os preceitos que advêm dos experimentos cosmológicos, ainda assim se coaduna bem, por exemplo, levando em conta a nucleossíntese primordial. E mais além, temos o caráter pedagógico que não pode ser descontado. De um modo geral a métrica de Friedmann-Lemâitre-Robertson-Walker governa um universo com tais características. Nesta métrica, a curvatura é caracterizada pela constante de curvatura k , e esta pode assumir os valores $+1$, 0 , -1 . Conseqüentemente, o universo pode ser plano, fechado e aberto, onde a constante de curvatura assume valores 0 , $+1$, -1 , respectivamente. Posteriormente, vamos considerar detalhes de cada um destes casos.

Dando continuidade ao estudo dos modelos cosmológicos, temos modelo de de Sitter, que não pode ser considerado um modelo cosmológico realista. Isso, porque se trata de um modelo de universo em que inexiste matéria. Neste modelo, a constante cosmológica Λ , originalmente introduzida por Einstein nas equações da relatividade geral, atua como uma força repulsiva, que gera uma expansão, inclusive acelerada. Por outro lado, o modelo de de Sitter possui uma relevância histórica, e além disso, este é um modelo que não possui uma singularidade em sua origem. Mais a frente vamos discutir um pouco mais sobre este modelo e suas particularidades.

E por fim, estudaremos o modelo no qual está em concordância com o universo hoje, o modelo *Lambda-Cold Dark Matter* (Λ CDM), que responde bem as observações feitas com supernovas tipo Ia, bem como a expansão acelerada do universo. Está de acordo com o princípio cosmológico, tem caráter isotrópico e homogêneo, além de ter curvatura nula, é um modelo onde se apresenta inflação cósmica, matéria e energia escura. O espaço-tempo é governado pela métrica FLRW.

Resumidamente, o modelo Λ CDM não se diferencia do modelo FLRW em relação a sua geometria. Todavia, o modelo Λ CDM inclui em seu conteúdo material: a energia escura, a matéria escura, bem como a matéria usual, ou seja, a bariônica. Esta última componente é a que constitui o fluido do modelo FLRW.

Ainda neste trabalho, mas especificamente no capítulo 3, discutiremos a respeito do aumento da entropia do universo e das equações de campo de Einstein semiclássicas que de certo modo se contradizem, mas, faremos um estudo macroscópico e fenomenológico para conciliar a produção de partículas com o aumento da entropia. É interessante ressaltar que os modelos de Friedmann e Λ CDM, surgem de uma singularidade, ou seja, em $t = 0$ o fator que descreve a evolução do universo é nulo ($R(t) = 0$), que para o modelo de de Sitter não é verdade. Porém, se "reescrevermos" os modelos de Friedmann e Λ CDM com produção de partículas poderemos observar que eles surgiram de uma densidade de partículas inicial n_0 , e que em algum tempo reproduzirão o modelo de de Sitter.

Nos capítulos finais, trataremos de fato do nosso modelo cosmológico anisotrópico, onde consideramos a energia responsável pela produção de partículas, como oriunda de uma dimensão extra. Esta dimensão carrega o caráter anisotrópico. Quando o processo de criação de partículas ocorre, a dimensão extra vai decaindo e conseqüentemente o espaço-tempo passa por um processo de isotropização, emergindo assim, um modelo que mimetiza o modelo Λ CDM, e conseqüentemente, nosso modelo assume as características condizentes com as observações atuais do universo.

2 MODELOS COSMOLÓGICOS

2.1 MODELO COSMOLÓGICO FRIEDMANN-LEMAÎTRE-ROBERTSON-WALKER

Em escalas cada vez maiores podemos notar que o universo não tem preferência de um centro específico. Isso pode ser confirmado pela temperatura da radiação cósmica de fundo em diferentes direções no céu, indicando que em grandes escalas o universo é isotrópico, e neste caso a isotropia implica à homogeneidade (HOBSON; LASENBY, 2006). Este modelo foi considerado como padrão durante muito tempo, até que, depois de novas observações, buscou-se descrever outro modelo para que respondesse melhor, modelo este que veremos com mais detalhes posteriormente.

A ideia de isotropia está ligada a um ponto pertencente a uma variedade, e forma um espaço ao redor deste ponto de modo que se pareça o mesmo em todas as direções. Enquanto que a homogeneidade propõe que a métrica seja a mesma ao longo de toda a variedade. Entendemos variedade como um conjunto de pontos no espaço.

Um espaço que é homogêneo e isotrópico é maximamente simétrico (WEINBERG, 1972), onde podemos imaginar a isotropia sendo invariante perante rotações e a homogeneidade a translações. Esta é a ideia básica de princípio cosmológico.

O modelo padrão tem como base este princípio, ou seja, o universo tem como principais características: a homogeneidade e a isotropia. Esta idealização de universo implica que o espaço-tempo possa ser descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.1)$$

onde $R(t)$ é o fator de escala do universo e k é a constante de curvatura espacial, que pode assumir três valores distintos: $-1, 0$ ou 1 . Quando $k = 0$ o universo é plano, isto é, sua geometria espacial é plana. Para $k = -1$, temos o universo aberto, similar a uma sela, e no caso $k = 1$, o universo é fechado, e sua superfície é idêntica a uma esfera em duas dimensões. Posteriormente, vamos discutir estas soluções com mais detalhes.

As equações de campo de Einstein podem ser escritas como:

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ e Λ são as constantes gravitacional e cosmológica, respectivamente. O tensor métrico é denotado por $g^{\mu\nu}$, e $T^{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia. Os índices μ e ν podem assumir valores de $0\dots 3$. Este conjunto de equações é denominado equações

de campo da teoria da relatividade geral, mas simplesmente conhecidas como equações de campo de Einstein. As equações de Einstein possuem uma descrição geométrica do espaço-tempo, em seu lado esquerdo. Já do lado direito da equação (2.2) figuram as componentes materiais, como por exemplo matéria bariônica e radiação.

O tensor de Einstein é dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.3)$$

onde $R_{\mu\nu}$ e R são o tensor e o escalar de curvatura de Ricci, respectivamente.

À direita das equações de Einstein temos a parte material que é governada pelo tensor momento-energia, que para um fluido perfeito, assume a forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde u é a quadrivelocidade do fluido, ρ a densidade e P a pressão. Vamos considerar um referencial co-móvel, onde a quadrivelocidade do fluido é dado por:

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0). \quad (2.5)$$

onde τ é o tempo próprio.

Para obtermos as equações de campo explicitamente para o espaço-tempo, governado pela métrica dada pela equação (2.1), temos que seguir um certo procedimento, que por ora faremos com certos detalhes.

As componentes do tensor de Ricci podem ser calculadas usando a expressão:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\sigma,\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu,\sigma}^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\sigma - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\sigma}^\sigma,$$

onde os termos $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ são os símbolos de Christoffel de segunda espécie e são dados por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(g_{\rho\mu,\nu} + g_{\rho\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\rho}),$$

onde $(,)$ na expressão denota uma derivada ordinária. Para a métrica (2.1) as componentes do tensor de Ricci são dadas por:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3\ddot{R}}{R}, \\ R_{11} &= -\frac{(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)}{(1 - kr^2)}, \\ R_{22} &= -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2, \\ R_{33} &= -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 \text{sen}^2\theta, \end{aligned}$$

e conseqüentemente o escalar de Ricci é dado por:

$$R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 6 \left[\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right].$$

Embora tenhamos calculado estas componentes tensoriais manualmente, elas podem ser calculadas muito mais rapidamente usando o pacote *GrTensor* ([GRTECTOR](#),).

Com estes dados podemos construir as componentes do tensor de Einstein, dadas por:

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3\ddot{R}}{R}, \\ G_{11} &= -\frac{(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)}{(1 - kr^2)}, \\ G_{22} &= -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2, \\ G_{33} &= -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)r^2 \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Com isso temos todos os ingredientes para escrever explicitamente as equações de campo:

$$3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{3k}{R^2} - \Lambda = 8\pi G\rho, \quad (2.6)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} - \Lambda = -8\pi GP. \quad (2.7)$$

Estas duas equações diferenciais são conhecidas por equações de Friedmann-Lemaître ([HOBSON; LASENBY, 2006](#)). Considerando $\Lambda = 0$, elas são simplesmente chamadas de equações de Friedmann ([HOBSON; LASENBY, 2006](#)). Diferentes tipos de componentes materiais e energéticos que preenchem o universo podem ser parametrizados através da expressão $P = \omega\rho$, conhecida como equação de estado, onde ω é constante. Usando a equação de estado e as equações (2.7) e (2.6) obtemos:

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{(1 + 3\omega)}{2} \left[\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} \right] = 0. \quad (2.8)$$

Integrando a equação (2.8), considerando a constante de curvatura nula, ou seja, $k = 0$, teremos o fator de escala em função do tempo:

$$\frac{R}{R_*} = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3(1+\omega)}. \quad (2.9)$$

Podemos analisar o comportamento da equação (2.9) no gráfico dado pela figura (1), para o caso de poeira, quando $\omega = 0$ e para o caso de radiação, quando $\omega = 1/3$.

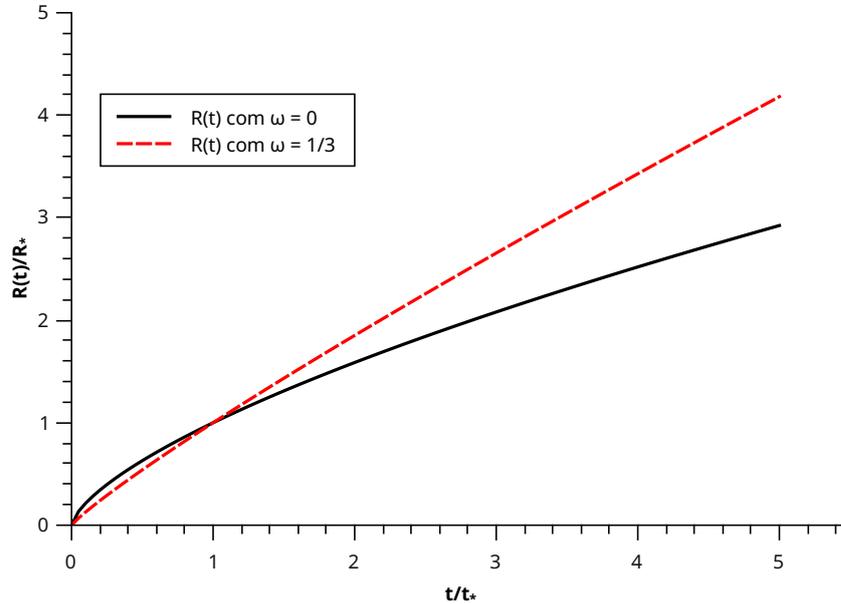
Além das equações de campo cosmológicas, vamos ainda considerar nesta seção, a lei de conservação de energia:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.10)$$

onde ∇_μ denota a derivada covariante. Então, a equação de conservação assume a forma:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P) = 0. \quad (2.11)$$

Figura 1 – Evolução do fator de escala $R(t)$ para $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$, para um universo plano $k = 0$.



Fonte: O Autor.

Na verdade, podemos obter a equação acima diretamente das equações de campo eliminando a derivada segunda do fator de escala \ddot{R} .

Podemos ainda reescrever a equação (2.11) na forma:

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) = -3P\dot{R}R^2, \quad (2.12)$$

ou ainda:

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3PR^2. \quad (2.13)$$

Usando novamente a equação de estado, reescrevemos a equação (2.13):

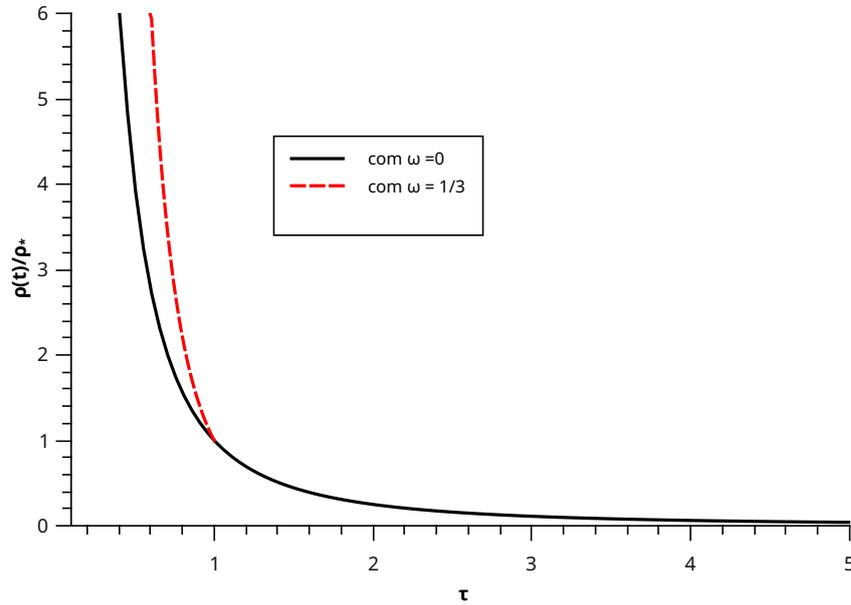
$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3\rho\omega R^2. \quad (2.14)$$

Integrando a equação (2.14) podemos obter a expressão para a densidade de matéria-energia em função do fator de escala:

$$\frac{\rho}{\rho_0} \propto \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+\omega)}. \quad (2.15)$$

E podemos ver na figura (2), a evolução da densidade de matéria-energia dada pela equação (2.15). Para $\omega = 0, 1/3$ ou -1 , temos respectivamente: $\rho_m \propto R^{-3}$ (matéria), $\rho_r \propto R^{-4}$ (radiação) e $\rho_\Lambda \propto \text{constante}$ (vácuo).

Figura 2 – Evolução da densidade de energia dada pela equação (2.15), com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$. O espaço-tempo considerado é para a curvatura nula.



Fonte: O Autor.

Fazendo uso novamente da equação (2.6), podemos reescrevê-la como:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = H_0^2 \left[1 - 2q_0 + 2q_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)\right], \quad (2.16)$$

onde fizemos uso também da equação (2.15).

A definição do parâmetro de desaceleração q que figura na equação (2.16) é dada por:

$$q(t) = -\frac{R(t)\ddot{R}(t)}{\dot{R}(t)^2}, \quad (2.17)$$

onde $q_0 \equiv q(t = t_0)$.

Por outro lado, a função de Hubble H é definida por:

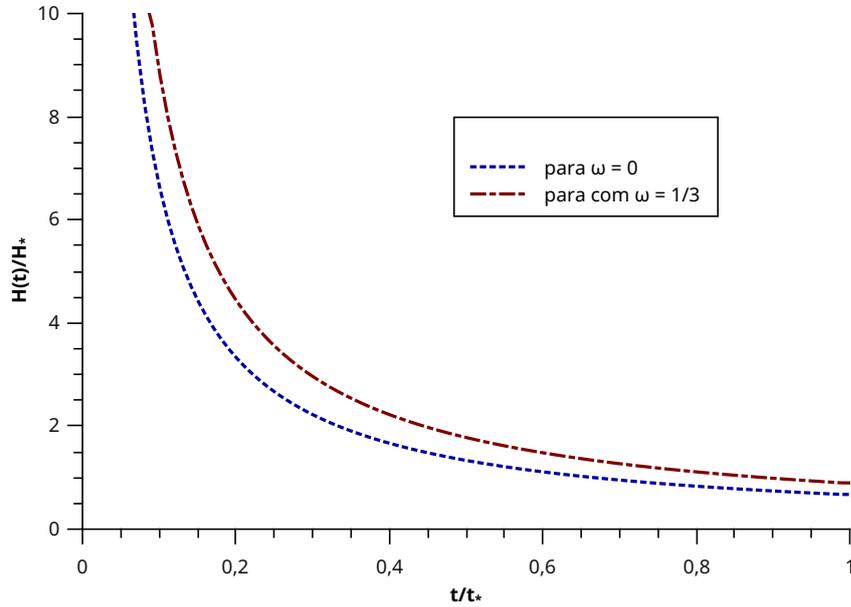
$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (2.18)$$

onde, do mesmo que ocorre para o parâmetro de desaceleração, temos $H_0 \equiv H(t = t_0)$. Podemos observar a evolução temporal de $H(t)$, na figura (3).

A partir da equação (2.16), podemos escrever uma expressão geral para t em função de $R(t)$:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{R/R_0} \left[1 - 2q_0 + \frac{2q_0}{x}\right]^{-1/2} dx \quad (2.19)$$

Figura 3 – Evolução temporal do parâmetro de Hubble $H(t)$, com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$. Onde fizemos uso da equação (2.18).



Fonte: O Autor.

onde $x = R(t)/R_0$. Na verdade temos aqui o desvio para o vermelho "camuflado", ou seja, $z = \frac{1}{x} - 1$.

Voltando agora ao fator da curvatura espacial que aparece explicitamente na métrica dada pela equação (2.1), podemos analisar os três casos apropriados, usando a equação (2.19):

1. $k = +1$ ($q_0 > 1/2$). Para este primeiro caso é conveniente definirmos a variável $\tilde{\theta}$:

$$1 - \cos \tilde{\theta} = \left(\frac{2q_0 - 1}{q_0} \right) \frac{R(t)}{R_0}. \quad (2.20)$$

Substituindo a expressão (2.20), na solução geral para a curvatura espacial, obtemos:

$$H_0 t = q_0 (2q_0 - 1)^{-3/2} [\tilde{\theta} - \text{sen} \tilde{\theta}]. \quad (2.21)$$

2. $k = 0$ ($q_0 = 1/2$). Para este caso a integração é relativamente simples, resultando:

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{3H_0}{2} t \right)^{2/3}. \quad (2.22)$$

Essa solução é conhecida como modelo de Einstein-de Sitter.

3. $k = -1$ ($0 < q_0 < 1/2$). Neste último caso usaremos a equação (2.20) e também a equação (2.21), mas com $\tilde{\theta}$ imaginário, ou seja:

$$\tilde{\theta} = i\Psi, \quad (2.23)$$

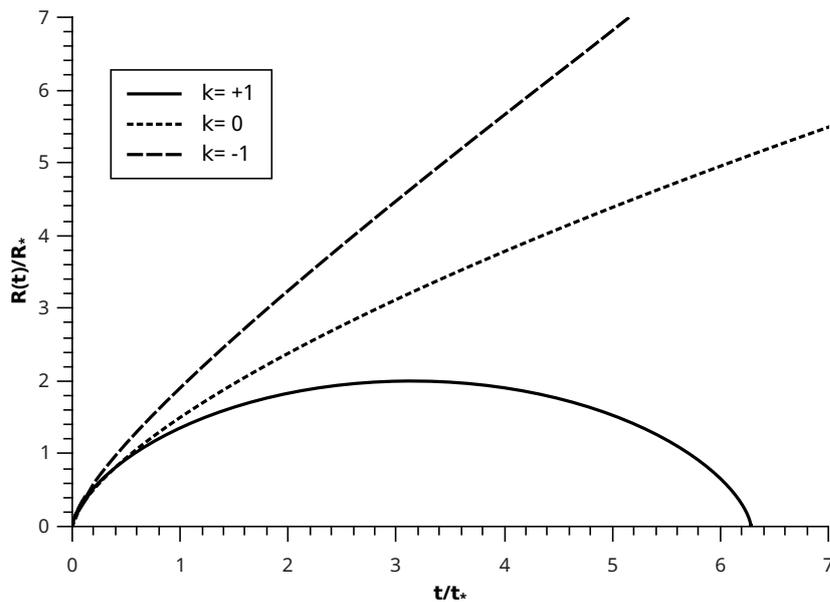
vamos definir Ψ por:

$$\cosh \Psi - 1 = \frac{1 - 2q_0}{q_0} \frac{R(t)}{R_0}. \quad (2.24)$$

Neste caso a equação (2.19) assume a forma:

$$H_0 t = q_0 (1 - 2q_0)^{-2/3} [\sinh \Psi - \Psi] \quad (2.25)$$

Figura 4 – Evolução do fator de escala, $R(t)$, para o modelo de Friedmann, para $k = +1$, $k = 0$ e $k = -1$.



Fonte: (SOUZA; CAMPOS, 2014)

Para detalhes referente a $k = 0$, $k = +1$, $k = -1$, respectivamente dada pelas equações (2.21), (2.22) e (2.25), vide por exemplo (WEINBERG, 1972, p. 482).

Tendo em mãos as três soluções para a evolução do fator de escala, no qual consideramos os três valores possíveis da curvatura espacial k , podemos mostrar na figura (4) o perfil de cada caso. Tanto o fator de escala como o tempo no gráfico são colocados de forma adimensional, onde o subscrito (*) denota um valor específico para t .

Podemos considerar que o fluido cosmológico pode ser constituído de vários componentes que não interagem entre si, como por exemplo: matéria, radiação e vácuo, mas que haja interação gravitacional. Supomos ainda, que cada constituinte do fluido pode ser modelado como um fluido perfeito. Assim sendo, podemos escrever o tensor momento-energia para um fluido constituído de inúmeros componentes, através do somatório:

$$T^{\mu\nu} = \sum_i (T^{\mu\nu})_i, \quad (2.26)$$

onde ' i ' são todos os componentes do fluido. Sendo que cada componente pode ser dado como um fluido perfeito, temos:

$$T^{\mu\nu} = \sum_i (\rho_i + P_i) u^\mu u^\nu - \sum_i P_i g^{\mu\nu}. \quad (2.27)$$

Fazendo a soma dos vários componentes :

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad \text{e} \quad P = \sum_i P_i.$$

Devido a suposição que só há interação gravitacional entre os componentes, a conservação de energia atua separadamente em cada componente, na forma:

$$\nabla_\mu (T^{\mu\nu})_i = 0, \quad (2.28)$$

e conseqüentemente cada fluido irá obedecer a equação (2.11).

Para darmos continuidade ao nosso estudo sobre o modelo padrão, partiremos da equação de Friedmann :

$$3H^2 + \frac{3k}{R^2} - \Lambda = 8\pi G\rho. \quad (2.29)$$

Podemos ainda dividir a equação por $3H^2$:

$$1 + \frac{k}{H^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho, \quad (2.30)$$

onde ρ pode ter vários componentes, como por exemplo:

$$\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_r(t) + \rho_\Lambda(t). \quad (2.31)$$

Portanto a equação (2.30), pode ser escrita na forma:

$$1 + \frac{k}{H^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_m + \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_r + \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_\Lambda \quad (2.32)$$

ou ainda:

$$1 + \frac{k}{H^2 R^2} - \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i, \quad (2.33)$$

Agora, podemos definir $\frac{8\pi G}{3H^2} \rho_i$ como o parâmetro de densidade para múltiplos componentes cosmológicos Ω_i :

$$\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H(t)^2} \rho_i(t), \quad (2.34)$$

Usando a definição dada pela equação (2.34), escrevemos a equação (2.32) na forma:

$$\Omega_m + \Omega_r + \frac{k}{H^2 R^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} = 1, \quad (2.35)$$

onde $\Lambda/3H^2$ e $-k/H^2 R^2$ são os parâmetros de densidade para o vácuo e para a curvatura, respectivamente. Resumidamente, obtemos:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1, \quad (2.36)$$

ou então:

$$\sum_i \Omega_i = 1. \quad (2.37)$$

Conseqüentemente, podemos escrever a dependência da curvatura espacial do universo em termos dos constituintes da densidade de matéria:

- Para uma curvatura espacial negativa ($k = -1$):

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda < 1, \quad (2.38)$$

teremos um universo aberto.

- Para a curvatura espacial nula ($k = 0$):

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1, \quad (2.39)$$

teremos um universo plano.

- E por fim, para uma curvatura espacial positiva ($k = +1$):

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda > 1, \quad (2.40)$$

teremos um universo fechado.

A partir da quantidade do parâmetro de densidade Ω , podemos escrever a densidade crítica:

$$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.41)$$

Essa expressão estabelece o valor necessário da densidade de energia total para que o universo seja plano.

Os parâmetros de densidade nos permite reescrever as equações de campo. Para isso vamos considerar, primeiramente, a equação (2.6) de campo na forma:

$$3H^2 + \frac{3k}{R^2} = 8\pi G\rho,$$

ou

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{R^2}. \quad (2.42)$$

O passo seguinte é dividir e multiplicar H_0^2 e ρ_0 , na equação (2.42):

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_i}{3H_0^2} H_0^2 \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0i}} - \frac{k}{R^2 H_0} H_0^2 \frac{\rho_{0i}}{\rho_{0i}}. \quad (2.43)$$

Mas, podemos organizar a equação acima fazendo:

$$\frac{8\pi G\rho_i}{3H_0^2} = \Omega_{i0} \quad \text{e} \quad -\frac{k}{R^2 H_0} = \Omega_{k0}.$$

Que nos possibilita escrever (2.43), na forma:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{0i} \frac{\rho_0}{\rho_{0i}} + \Omega_{k0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2} \right] \quad (2.44)$$

Agora podemos escrever a equação de Friedmann (2.6), em termos dos parâmetros de densidade:

$$H^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3} + \Omega_{r0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-4} + \Omega_{\Lambda 0} + \Omega_{k0} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-2} \right] \quad (2.45)$$

Reescrevendo a equação (2.7), em termos dos parâmetros de densidade, obtemos:

$$\frac{2}{3} \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} + \frac{1}{3} + \Omega_k - \Omega_\Lambda = -\frac{8\pi G}{3H^2}(\omega\rho), \quad (2.46)$$

onde fizemos uso da equação de estado $P = \omega\rho$.

Aplicando a equação (2.36) na equação (2.46), usando a equação (2.31), temos:

$$\frac{2}{3} \frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} + \frac{\Omega_m}{3} + \frac{\Omega_r}{3} - \frac{2}{3}\Omega_\Lambda = -\frac{8\pi G}{3H^2}\omega(\rho_m + \rho_r). \quad (2.47)$$

onde $\rho_i = \frac{3H^2}{8\pi G}\Omega_i$. Enfim podemos reescrever a equação de Friedmann (2.47) em termos dos parâmetros de densidade:

$$q = \frac{1}{2}(\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda). \quad (2.48)$$

2.2 MODELO DE DE SITTER

O modelo de de Sitter é de cunho teórico que foi proposto em 1917 por Willem de Sitter, segundo ele o universo tem caráter isotrópico, estático e sem matéria. Este é um modelo que não corresponde a descrição atual do universo, mas historicamente, tem grande importância (D'INVERNO, 1992).

Afim de obtermos as equações de campo de de Sitter, partiremos então da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, escrita em coordenadas espaciais esféricas (2.1).

A solução para o modelo de de Sitter surge quando levamos as equações de campo às seguintes condições: $P = \rho = k = 0$, o que nos dá:

$$3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \Lambda = 0, \quad (2.49)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \Lambda = 0. \quad (2.50)$$

Rearranjando a equação(2.49), temos:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{1}{3}\Lambda,$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}\frac{\dot{R}}{R} &= \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda}, \\ \frac{dR}{R} &= \sqrt{\frac{1}{3}\Lambda} dt.\end{aligned}\quad (2.51)$$

Ao integrarmos, a equação (2.51) obtemos:

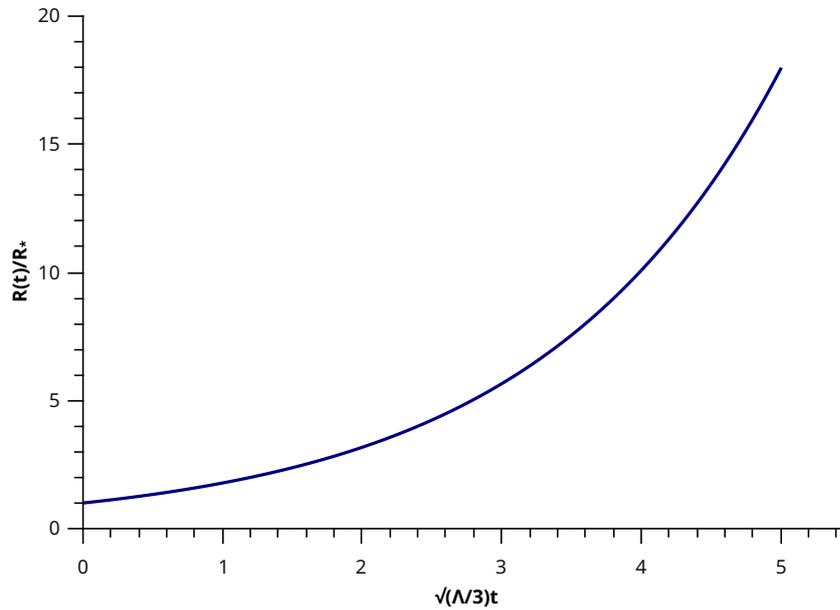
$$R = Ae^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}, \quad (2.52)$$

onde A é uma constante de integração, ou seja:

$$\frac{R}{R_*} = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_*)}. \quad (2.53)$$

A evolução do fator de escala do modelo de de Sitter, pode ser conferido na figura (5).

Figura 5 – Evolução do fator de escala, $R(t)$, para o modelo de de Sitter. A quantidade $\sqrt{\Lambda/3}t$ é adimensional.



Fonte: O Autor

Neste modelo o parâmetro de Hubble é constante e vale:

$$H = \frac{\Lambda}{3},$$

enquanto o parâmetro de desaceleração é dado por:

$$q = -1.$$

A partir da equação (2.1), e considerando $k = 0$, o elemento de linha torna-se:

$$ds^2 = dt^2 - [e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t-t_0)}]^2 (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)), \quad (2.54)$$

e em coordenadas cartesianas, a métrica tem a forma:

$$ds^2 = dt^2 - [e^{2(t-t_0)/\alpha}] (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.55)$$

onde:

$$\alpha = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}. \quad (2.56)$$

O elemento de linha (2.55) é invariante perante transformações em t , e mudança simultânea de escala nas coordenadas de espaço. Observe que a métrica é completamente especificada por α . O intervalo da coordenada t vai de $-\infty$ a $+\infty$. Se introduzirmos novas coordenadas sendo elas $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= t - \frac{1}{2}\alpha \ln \left[1 - \alpha^{-2}(x^2 + y^2 + z^2)e^{\frac{2t}{\alpha}} \right], \\ \bar{x} &= xe^{\frac{t}{\alpha}}, \\ \bar{y} &= ye^{\frac{t}{\alpha}}, \\ \bar{z} &= ze^{\frac{t}{\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.57)$$

fazendo as transformações necessárias, a equação(2.55) torna-se:

$$ds^2 = [1 - \alpha^{-2}(x^2 + y^2 + z^2)]dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 - \frac{\alpha^{-2}(xdx + ydy + zdz)^2}{1 - \alpha^{-2}(x^2 + y^2 + z^2)}, \quad (2.58)$$

a qual é visivelmente estacionária, ou seja, não depende de t (HAWKING; ELLIS, 1994).

2.3 MODELO Λ CDM

O modelo cosmológico Λ CDM *Lambda-Cold Dark Matter*, que é caracterizado por um fluido constituído de matéria escura fria, matéria bariônica e uma componente (Λ) devido a energia escura . Assim como a maioria dos modelos cosmológicos modernos, tem como base o princípio cosmológico, que declara que não ocupamos um lugar privilegiado no universo, e que a grandes escalas o universo parece ser o mesmo (LIDDLE, 2003). Sua curvatura é nula, ou seja, é um modelo onde sua geometria é plana ($k = 0$). Este modelo apresenta inflação cósmica, matéria e energia escura. Estes três pontos em si só podem gerar discussões não muito simples, de tal modo que preferimos omitir um relato sobre os temas apenas citamos, em cada caso uma referência apropriada: inflação (LIDDLE; LYTH, 2000); matéria e energia escura (AMENDOLA; TSUJIWAKA, 2010).

O modelo Λ CDM surgiu no final dos anos 90 (KRAUSS, 1995), quando diferentes propriedades do universo foram observadas e pareciam contraditórias, não havendo consenso a

respeito da composição da densidade de energia do universo. É o modelo de concordância atual para o universo, já que, explica as observações cósmicas realizadas sobre a radiação de fundo de micro-ondas, assim como a estrutura em grande escala do universo, bem como as observações realizadas das supernovas distantes do tipo Ia, que apontam para uma expansão acelerada do universo (PERLMUTTER et al., 1997; PERLMUTTER et al., 1998; GARNAVICH et al., 1998; SCHMIDT et al., 1998; RIESS, 1998; PERLMUTTER et al., 1999).

A constante cosmológica Λ é definida como a densidade de energia do vácuo, sendo considerada a forma mais simples para interpretar-se fisicamente a energia escura. Ela foi originalmente introduzida nas equações de campo de Einstein para tornar o universo estático e só adquiriu o caráter de energia escura posteriormente, a partir das observações de supernovas feitas em 1997 e 1998 que já citamos previamente. A constante cosmológica nos permite explicar e conhecer o valor atual da taxa de aceleração em que o universo se expande. A inclusão de um termo cosmológico nas equações de campo da teoria da relatividade geral aparece como uma pressão adicional no tensor momento-energia, e curiosamente, uma pressão negativa. A necessidade de inclusão desse componente justifica o processo de expansão acelerada que observamos.

Por outro lado, a matéria escura fria foi introduzida no modelo afim de explicar as influências gravitacionais observadas em estruturas em grandes escalas e que não podem ser explicadas pela quantidade de matéria observada. A matéria escura (RUBIN; FORD, 1970) é dada como fria devido sua velocidade ser muito menor que da luz; ela também é uma matéria não bariônica, pois é constituída de matéria diferente da que usualmente conhecemos, constituída por prótons e nêutrons; não tem dissipação e as partículas da matéria escura não interagem entre si, apenas sofrem influência da gravidade e possivelmente da força fraca.

Vamos agora detalhar matematicamente um pouco do modelo Λ CDM, que usa a métrica (2.1) e as equações de campo de Einstein, explicitamente dada por:

$$3\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \Lambda = 8\pi G\rho, \quad (2.59)$$

$$2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \Lambda = -8\pi GP. \quad (2.60)$$

Usando a equação de estado $P = \rho\omega$, nas equações de campo, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2}(3\omega + 1) - \Lambda(1 + \omega) + 2\frac{\ddot{R}}{R} = 0, \quad (2.61)$$

onde podemos obter a solução para o fator de escala para o modelo Λ CDM em função de t :

$$R(t) \propto \sinh \left[\frac{1}{2} \sqrt{3\Lambda(1 + \omega)} t \right]^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (2.62)$$

Note que o termo $\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda}(1+\omega)t$ é adimensional.

A função de Hubble, para este modelo é dada por:

$$H(t) = \frac{\sqrt{3\Lambda}}{3} \cot \left[\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda}(1+\omega)t \right], \quad (2.63)$$

enquanto que o parâmetro de desaceleração assume a forma:

$$q(t) = -\frac{2\cosh \left[\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda}(1+\omega) \right]^2 + 3(1+\omega)}{2\cosh \left[\frac{1}{2}\sqrt{3\Lambda}(1+\omega)t \right]^2}. \quad (2.64)$$

Por outro lado, também podemos escrever a equação de campo de Friedmann em termos dos parâmetros de densidade:

$$H^2 = H_*^2 \left[\Omega_r \left(\frac{R}{R_*} \right)^{-4} + \Omega_m \left(\frac{R}{R_*} \right)^{-3} + \Omega_\Lambda \right], \quad (2.65)$$

onde (*) denota um valor específico de t , e fizemos uso da equação (2.35).

Vamos considerar $\Omega_r = 0$, já que a radiação só é dominante apenas em valores elevados para o *redshift*, ou seja, para o início do universo. No parâmetro densidade da matéria Ω_m está incluído os bárions e a matéria escura, logo podemos escrever a equação acima na forma:

$$H^2 = H_*^2 \left[\Omega_m \left(\frac{R}{R_*} \right)^{-3} + \Omega_\Lambda \right], \quad (2.66)$$

onde Ω_m e Ω_Λ são dados por:

$$\Omega_m = \frac{1}{1 - \frac{(1-\Omega_{m0})}{\Omega_{m0}} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda(1-\Omega_{\Lambda0})}{\Omega_{\Lambda0}(1-\Omega_\Lambda)}}} \quad (2.67)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Omega_{\Lambda0} \left[\frac{\Omega_m(1-\Omega_{m0})}{\Omega_{m0}(\Omega_m-1)} \right]^{-2}}{1 - \Omega_{\Lambda0} + \Omega_{\Lambda0} \left[\frac{\Omega_m(1-\Omega_{m0})}{\Omega_{m0}(\Omega_m-1)} \right]^{-2}} \quad (2.68)$$

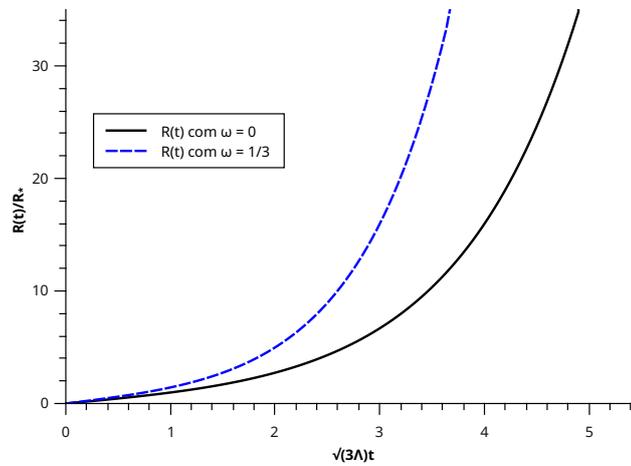
Podemos integrar a equação (2.66) e encontrar o fator de escala em função dos parâmetros de densidade (BASILAKOS; LIMA, 2010):

$$\frac{R}{R_*} = \left(\frac{\Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh \left(\frac{3H_*\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} t \right)^{2/3}. \quad (2.69)$$

Escrevemos $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda$, temos:

$$\frac{R}{R_*} = \left(\frac{1 - \Omega_\Lambda}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3} \sinh \left(\frac{3H_*\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} t \right)^{2/3}. \quad (2.70)$$

Figura 6 – Evolução do fator de escala $R(t)$ do modelo Λ CDM.



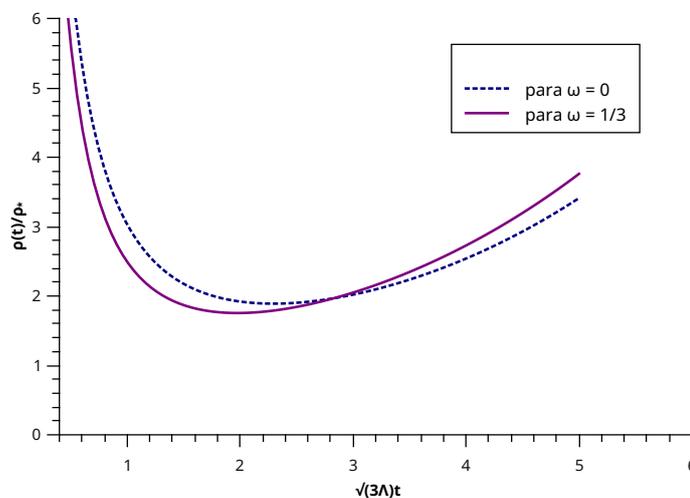
Fonte: O Autor.

O parâmetro de Hubble escrito em função do parâmetro de densidade Ω_Λ é dado por:

$$H(t) = H_* \sqrt{\Omega_\Lambda} \coth \left(\frac{3H_* \sqrt{\Omega_\Lambda}}{2} t \right) \quad (2.71)$$

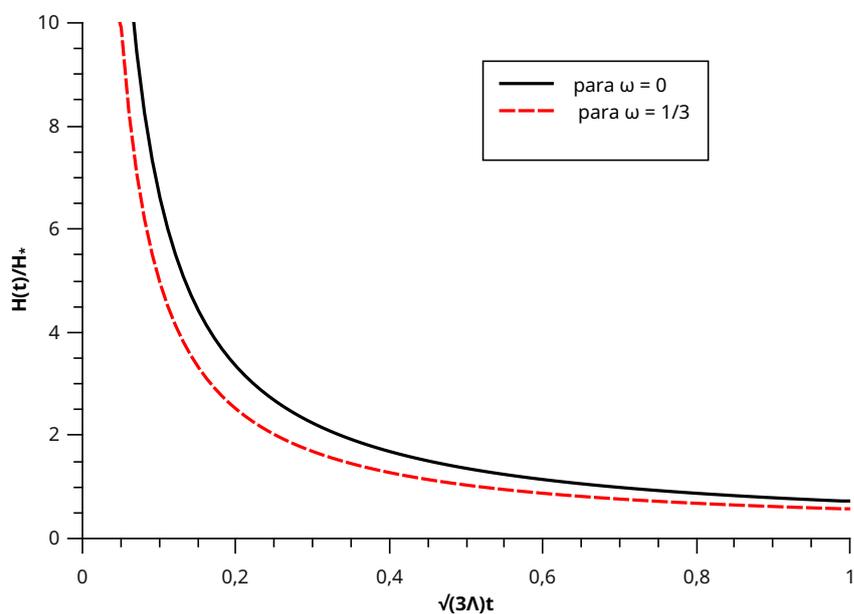
Na figura (6) temos a evolução do fator de escala do modelo Λ CDM dado pela equação (2.62) versus o tempo adimensional para a poeira $\omega = 0$ e para a radiação $\omega = 1/3$. Enquanto que a figura (7) nos fornece o gráfico da evolução da densidade de momento-energia no tempo, na figura (8), temos a evolução temporal da função de Hubble, assim como o parâmetro de desaceleração na figura (9).

Figura 7 – Gráfico da densidade de energia para o modelo Λ CDM, onde $\sqrt{3\Lambda}t$ é adimensional.



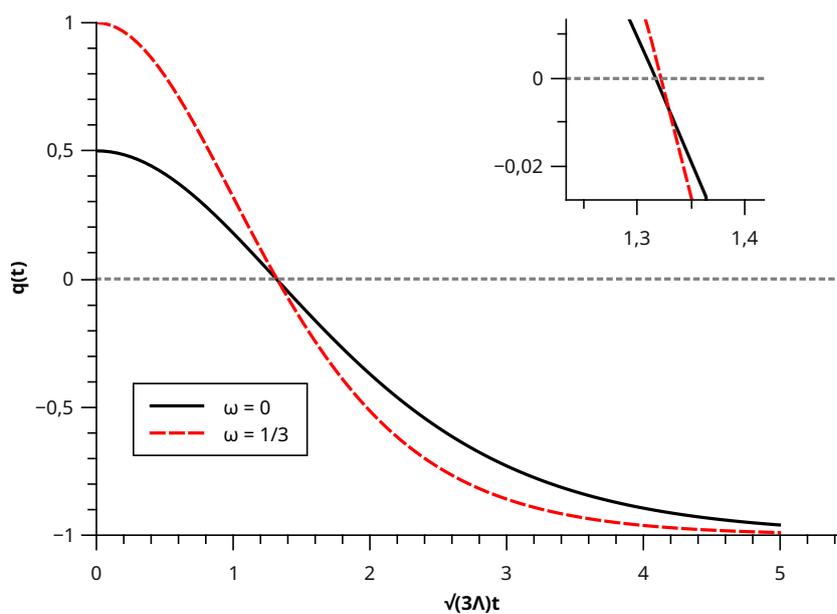
Fonte: O Autor.

Figura 8 – Evolução da Função de Hubble $H(t)$ para o modelo Λ CDM.



Fonte: O Autor.

Figura 9 – Evolução do parâmetro de desaceleração para o modelo Λ CDM. Podemos observar em $q(t) = 0$, o *redshift* de transição, ou seja, indica que o universo sofreu uma transição dinâmica de uma fase desacelerada para uma fase acelerada.



Fonte: O Autor.

3 PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS

O estudo da cosmologia hoje nos traz um dos mais fascinantes mistérios, a origem da matéria e radiação que preenche o universo que ainda não foram resolvidos na cosmologia, enquanto que por um lado temos as equações de campo de Einstein que são puramente adiabáticas e reversíveis, por outro, se tem observado o aumento da entropia, principalmente na forma de radiação do corpo negro, fato esse que as equações de Einstein dificilmente podem fornecer uma explicação.

Na interpretação do Professor Prigogine ([PRIGOGINE J. GEHENIAU; NARDONE, 1989](#)) a produção de partículas vem do campo gravitacional. As equações de campo de Einstein são semiclássicas, adiabáticas e reversíveis, o que impede a expansão de entropia, o qual hoje é observado como o precedente da produção de partículas. Propomos nesse capítulo um breve estudo fenomenológico e macroscópico que nos permite conciliar tanto a produção de partículas como o aumento da entropia no início do universo.

Mostraremos que a termodinâmica de sistemas abertos aplicada à cosmologia nos conduz naturalmente à uma reinterpretação do tensor momento-energia, mas precisamente na pressão, onde se adiciona uma pressão negativa, fazendo com que a criação de matéria e entropia alcance um nível macroscópico.

Nas equações de campo de Einstein, tradicionalmente, estabelecem uma igualdade entre a parte geométrica do universo e a parte energética, onde usamos as variáveis da densidade de energia ρ e da pressão P . E assim podemos simplificar as equações de campo usando a equação de estado $P = \omega\rho$. Usaremos também a variável da densidade do número de partículas, n , que naturalmente depende da taxa de criação de matéria. Aplicando estas condições à transformação de matéria a partir do campo gravitacional, teremos um processo que ocorrerá de forma irreversível, e conseqüentemente gera a entropia cosmológica. Processo esse que está de acordo com a segunda lei da termodinâmica e, portanto, parece ser termodinamicamente possível. Resumindo, por força da segunda lei da termodinâmica, temos a criação de partículas a partir do campo gravitacional, e não o processo inverso, embora a visão quantum mecânica do processo de formação de partículas é mais bem estruturado ([PARKER, 2012](#)).

3.1 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN COM PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS

Considerando a métrica dada pela equação (2.1), podemos escrever as equações de campo para um fluido com produção de matéria:

$$8\pi G\rho = 3\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{k}{R^2}, \quad (3.1)$$

$$8\pi G(P + P_c) = -2\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{k}{R^2}, \quad (3.2)$$

onde o ponto denota derivada temporal, ρ é a densidade de energia, P a pressão termostática e P_c a pressão adicional, responsável pelo processo de criação.

Levando em conta que o número de partículas não se conserva, escrevemos a equação de continuidade na forma tensorial:

$$(nu^\mu)_{;\mu} = \Psi, \quad (3.3)$$

onde n é a densidade do número de partículas e Ψ é a fonte da produção de matéria. Logo, a equação da continuidade assume a forma:

$$\frac{\dot{n}}{n} + 3\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\Psi}{n}, \quad (3.4)$$

onde naturalmente, levando em conta o espaço-tempo governado pela equação (2.1).

A pressão de criação P_c depende da fonte geradora de matéria, então se combinarmos as equações (3.1), (3.2) e (3.4), através da lei de conservação de energia, com isso, para a criação de matéria "adiabática", a pressão assume a forma (CALVAO; WAGA, 1992) :

$$P_c = -\frac{\rho + P}{3nH}\Psi, \quad (3.5)$$

onde $H = \dot{R}/R$ é o parâmetro de Hubble.

Temos seis variáveis desconhecidas, apenas três equações e uma expressão para a pressão de criação P_c . Todavia, para eliminarmos essa incompatibilidade, iremos considerar duas expressões, uma delas é a equação de estado usualmente empregada na cosmologia:

$$P = \omega\rho. \quad (3.6)$$

A outra é determinar uma expressão para a fonte de partículas Ψ , que por sua vez é dada por:

$$\Psi = 3\beta nH. \quad (3.7)$$

A adoção dessa fonte é apresentada no trabalho (LIMA; GERMANO; ABRAMO, 1989), onde algumas justificativas de ordem físicas para a escolha são apresentadas.

Agora, usando as equações de campo de Einstein, dada pela equação (3.1) e pela equação (3.2), assim como, a pressão de criação fornecida pela equação (3.5), com alguns artifícios

matemáticos, podemos escrever uma equação para o fator de escala $R(t)$ em função de Ψ e n , na forma:

$$R\ddot{R} + \dot{R}^2 \left[\frac{(3\omega + 1)}{2} - \frac{(1 + \omega)}{2nH} \Psi \right] + k \left[\frac{(3\omega + 1)}{2} - \frac{(1 + \omega)}{2nH} \Psi \right] = 0. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) nada mais é que o resumo do conjunto das equações (3.1) - (3.6). Teoricamente a criação de matéria é essencialmente um processo quântico e as taxas correspondentes devem ser obtidas a partir de uma teoria do campo quântico na presença de campos gravitacionais. No entanto, não se tem um modelo bem aceito para tratar quanticamente campos gravitacionais, a maneira natural é investigar soluções da equação (3.8), de modo que se tenha uma descrição fenomenológica.

Faremos algumas considerações a respeito da equação (3.8), e por ora, iremos nos restringir ao universo com geometria plana, ou seja, a constante de curvatura igual a zero. A outra é usar a equação (3.7), que é a expressão para a fonte geradora de matéria. Com isso, a equação (3.8), toma a forma:

$$R\ddot{R} + \dot{R}^2 \left[\frac{(3\omega + 1)}{2} - \frac{3\beta(1 + \omega)}{2} \right] = 0. \quad (3.9)$$

Ao integrarmos a equação (3.9), obtemos uma expressão explícita para o fator de escala $R(t)$:

$$\frac{R(t)}{R_*} \propto \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{2}{3(1-\beta)(1+\omega)}}. \quad (3.10)$$

Se conhecemos a expressão para $R(t)$, para o modelo de Friedmann com produção de partículas, podemos escrever tanto a função de Hubble:

$$H(t) = \frac{2}{3(1 - \beta)(1 + \omega)t}, \quad (3.11)$$

como o parâmetro de desaceleração:

$$q(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\omega - \frac{3}{2}\beta - \frac{3}{2}\beta\omega. \quad (3.12)$$

A densidade de energia ρ , aparece nas equações de campo da teoria da relatividade geral, e neste modelo de produção de partículas, está associada a fonte geradora de partículas. Todavia, podemos determinar uma relação entre ρ e n . Para isso, usaremos a expressão para a pressão devido à criação de partículas dada pela equação (3.5) e da equação (3.6), na lei de conservação do momento-energia, $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P_c + P) = 0. \quad (3.13)$$

Substituindo as equações mencionadas acima, a equação (3.13):

$$\dot{\rho} + 3\rho(1 + \omega)H + \rho(1 + \omega)\frac{\Psi}{n} = 0. \quad (3.14)$$

Igualando as equações (3.4) e (3.14) obtemos a relação:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = (1 + \omega) \frac{\dot{n}}{n}, \quad (3.15)$$

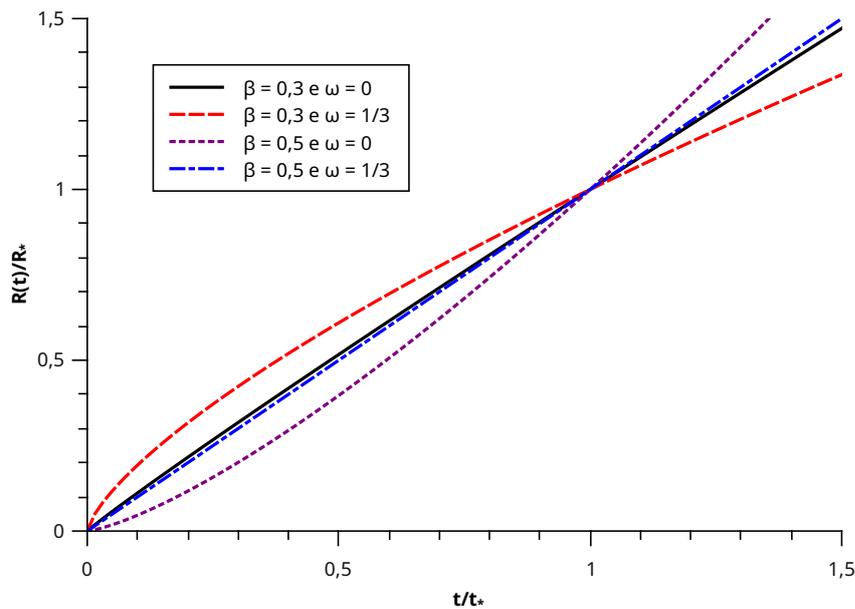
que ao ser integrada tem como solução:

$$n = n_* \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\frac{1}{(1+\omega)}}, \quad (3.16)$$

aqui (*) denota um valor n e ρ , em um tempo específico. A equação (3.16) manteve-se explicitamente independente da fonte de criação de matéria Ψ . Ela reduz até o limite $\omega = 0$, ou seja, um Universo preenchido de poeira, e neste caso $\rho = nM$, sendo M a massa das partículas criadas.

Nas figuras (10)-(12) podemos observar o comportamento em função do tempo do fator de escala, da função de Hubble e da densidade do número de partículas.

Figura 10 – Evolução do fator de escala, $R(t)$, para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para ω e β .



Fonte: O Autor.

Já o parâmetro desaceleração é constante.

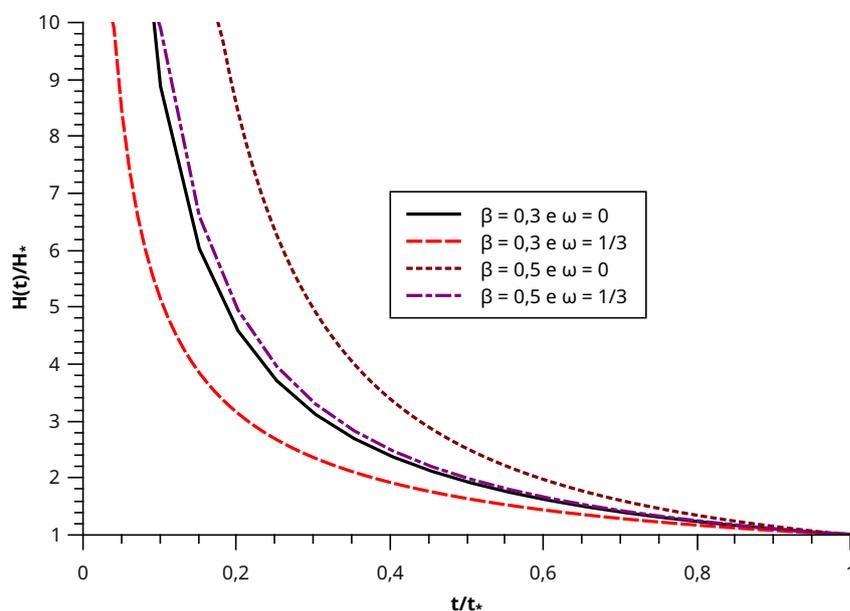
Em relação à densidade de energia, podemos voltar a equação(3.8), escrita na forma:

$$R\ddot{R} + \Delta\dot{R}^2 + \Delta k = 0, \quad (3.17)$$

onde $\Delta = \left[\frac{(3\omega+1)}{2} - \frac{(1+\omega)}{2nH} \Psi \right]$. A primeira integração da equação (3.17), tem a forma:

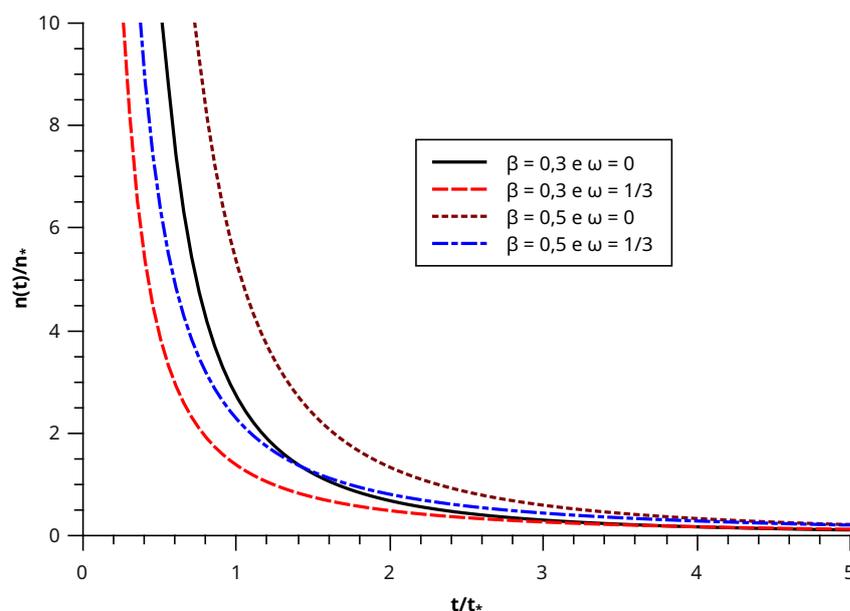
$$\dot{R}^2 = \frac{A}{R^{2\Delta}} \quad (3.18)$$

Figura 11 – Gráfico da função de Hubble para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para ω e β .



Fonte: O Autor.

Figura 12 – Gráfico da densidade do número de partículas para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para ω e β .



Fonte: O Autor.

onde A é uma constante de integração positiva.

Fazendo uso da equação (3.1), juntamente com a equação (3.17), podemos escrever uma

expressão para a densidade em função do fator de escala $R(t)$:

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{R_*}{R} \right)^{2(\Delta+1)}. \quad (3.19)$$

Na expressão para Δ , podemos substituir a equação (3.7), com isso obtemos a densidade de energia em função do fator de escala e dos parâmetros β e ω :

$$\frac{\rho}{\rho_*} = \left(\frac{R_*}{R} \right)^{3(1+\omega)(1-\beta)}. \quad (3.20)$$

Antes de finalizar esta seção temos que mencionar que para $\beta = 0$ reproduzimos as equações usuais de Friedmann, ou seja, sem produção de partículas.

3.2 PRODUÇÃO DE PARTÍCULAS E PRODUÇÃO DE ENTROPIA

Nesta seção, vamos abordar a produção macroscópica de partículas de acordo com o ponto de vista do Professor Ilya Prigogine ([PRIGOGINE J. GEHENIAU; NARDONE, 1989](#)), que apresenta características físicas peculiares.

Partindo das equações de campo de Einstein:

$$G_{\nu}^{\mu} = T_{\nu}^{\mu}, \quad (3.21)$$

onde T_{ν}^{μ} é o tensor momento-energia para um fluido perfeito. Assim, suas componentes são dadas explicitamente por:

$$T_0^0 = \rho, \quad (3.22)$$

$$T_j^i = \tilde{P}\delta_j^i. \quad (3.23)$$

A pressão fenomenológica \tilde{P} inclui a pressão termodinâmica usual P e a pressão de criação P_c .

Fazendo uso das identidades de Bianchi:

$$G_{\nu;\mu}^{\mu} = 0, \quad (3.24)$$

onde $(;)$ denota a derivada covariante, teremos a seguinte relação:

$$d(\rho V) = -\tilde{P}dV, \quad (3.25)$$

que descreve uma evolução adiabática de um sistema fechado, sendo V , o volume.

Para um sistema aberto, onde há criação de matéria, o número de partículas N em um volume V não é constante, a primeira lei da termodinâmica é dada por:

$$d(\rho V) + PdV - \frac{h}{V}d(nV) = 0, \quad (3.26)$$

$n = N/V$ é o número de partículas e $h = \rho + P$ é a entalpia. Durante a transformação, a variação do número de partículas faz com que o sistema receba "calor". Essa variação ocorre por conta da transferência de energia do campo gravitacional para a matéria. A produção de partículas atua como uma fonte de energia interna.

Tradicionalmente, na cosmologia, a variação da entropia dS desaparece na transformação adiabática em um sistema fechado, todavia, se tratando de um sistema aberto, a transformação adiabática se dá na forma:

$$TdS = \frac{h}{n}d(nV) - \mu d(nV) = T \frac{S}{n}d(nV), \quad (3.27)$$

onde $\mu n = h - Ts$ é o potencial químico e s é entropia por volume S/V . As mudanças no número de partículas obedece a segunda lei da termodinâmica:

$$dN = d(nV) \geq 0. \quad (3.28)$$

A equação acima mostra que no sistema aberto, o espaço-tempo tem uma produção de partículas enquanto que o processo inverso é termodinamicamente proibido. O par espaço-tempo e matéria deixa de ser simétrico, pois a produção de matéria que ocorre mediante a energia armazenada no campo gravitacional, configura um processo irreversível.

Voltando para a lei de conservação de energia termodinâmica, ou melhor a da primeira lei da termodinâmica (3.26), podemos reescrevê-la de maneira diferente, mas equivalentes:

$$\dot{\rho} = \frac{h}{n}\dot{n}, \quad (3.29)$$

$$P = \frac{n\dot{\rho} - \rho\dot{n}}{\dot{n}}, \quad (3.30)$$

$$\rho = -\frac{\partial e}{\partial v}. \quad (3.31)$$

Sendo $e = \frac{\rho}{n}$ e $v = \frac{1}{n}$. Podemos notar que $\dot{\rho}$ e \dot{n} são responsáveis pela pressão P . Logo:

$$\rho = mn \longrightarrow P = 0, \quad (3.32)$$

e ainda:

$$\rho = aT^4, \quad n = bT^3 \longrightarrow P = \frac{\rho}{3}. \quad (3.33)$$

Na cosmologia, esta é a análise termodinâmica de sistema aberto apropriada na presença da criação de partículas. E isso se deve a uma redefinição da pressão na expressão do tensor momento-energia (PRIGOGINE J. GEHENIAU; NARDONE, 1989). O que queremos dizer é que a criação de matéria equivale a uma pressão extra que chamaremos de pressão de criação P_c , e faz parte da pressão fenomenológica \tilde{P} . Então escrevemos a equação (3.26) de forma análoga a (3.25):

$$d(\rho V) = -(P + P_c)dV = -\tilde{P}dV,$$

onde a pressão de criação P_c é dada por:

$$P_c = -\frac{h}{n} \frac{d(nV)}{dV} = -\frac{\rho + P}{n} \frac{d(nV)}{dV}, \quad (3.34)$$

onde P_c pode assumir valores negativos ou nulos, dependendo se há ou não produção de partículas.

Nosso próximo passo é aplicar na cosmologia as considerações feitas a respeito de sistemas abertos. Para um universo homogêneo e isotrópico escreveremos o volume V como sendo:

$$V = R^3(t),$$

onde a expressão para a pressão de criação pode ser reescrita na forma:

$$P_c = -\frac{\rho + P}{3nH}(\dot{n} + 3Hn). \quad (3.35)$$

Por conta da equação (3.28), as equações de Einstein para sistemas abertos inclui agora a segunda lei da termodinâmica. Então as equações de Einstein usuais:

$$\kappa\rho = 3H^2 + \frac{k}{R^2}, \quad (3.36)$$

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P), \quad (3.37)$$

assumem a forma com criação de partículas:

$$\kappa\rho = 3H^2 + \frac{k}{R^2}, \quad (3.38)$$

$$\dot{\rho} = \frac{\dot{n}}{n}(\rho + P). \quad (3.39)$$

Como estamos considerando um processo de produção de partículas adiabático, temos que:

$$\dot{\sigma} = 0, \quad (3.40)$$

onde σ é a entropia específica e é expressada na forma $\sigma = S/N$. Logo a equação (3.40) pode ser escrita na forma:

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{N}}{N} = \frac{\dot{n} + 3Hn}{n}, \quad (3.41)$$

onde S é a entropia e N o número de partículas.

Em uma cosmologia onde se inclui a criação de matéria podemos apresentar o modelo fenomenológico mais simples, expressando a fonte de produção de partículas em termos da função de Hubble:

$$\frac{1}{R^3} \frac{d(nR^3)}{dt} = \Psi. \quad (3.42)$$

No exemplo do Prigogine a fonte considerada é proporcional a H^2 , onde:

$$\Psi = \alpha H^2. \quad (3.43)$$

Para $\alpha \neq 0$, podemos usar a equação (3.38) na equação (3.42), e obtemos a expressão :

$$\frac{1}{R^3} \frac{d(nR^3)}{dt} = \frac{\alpha\kappa\rho}{3}. \quad (3.44)$$

Mas $\rho = nM$, então reescrevemos a equação (3.44), na forma:

$$\frac{1}{nR^3} \frac{d(nR^3)}{dt} = \frac{\alpha\kappa M}{3}. \quad (3.45)$$

Todavia, $nR^3 = N$, logo:

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{\alpha\kappa M}{3}, \quad (3.46)$$

que podemos integrar e obter a expressão:

$$N(t) = N_0 e^{\alpha\kappa Mt/3}. \quad (3.47)$$

Por outro lado, partindo da pressão de criação P_c , onde podemos usar a fonte geradora de partículas dada pela equação (3.43), e pressão termodinâmica zero ($P = 0$), obtemos:

$$P_c = -\frac{M\alpha H}{3}. \quad (3.48)$$

Relacionando a equação (3.38), com a equação:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + \tilde{P}) = -3H(\rho + P_c), \quad (3.49)$$

obtemos:

$$\frac{6H\dot{H}}{\kappa} = -3H \left(\frac{3H^2}{\kappa} - \frac{M\alpha H}{3} \right), \quad (3.50)$$

onde consideramos $k = 0$. A equação (3.50) ainda pode assumir a forma:

$$\frac{6}{\kappa} \frac{\dot{R}\ddot{R}}{R^2} + \frac{3}{\kappa} \frac{\dot{R}^3}{R^3} - \alpha M \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 0. \quad (3.51)$$

A solução do fator de escala $R(t)$ é dada, a partir da integração da equação (3.51):

$$R(t) = [1 + C(e^{\alpha\kappa Mt/6} - 1)]^{2/3}, \quad (3.52)$$

onde C vale:

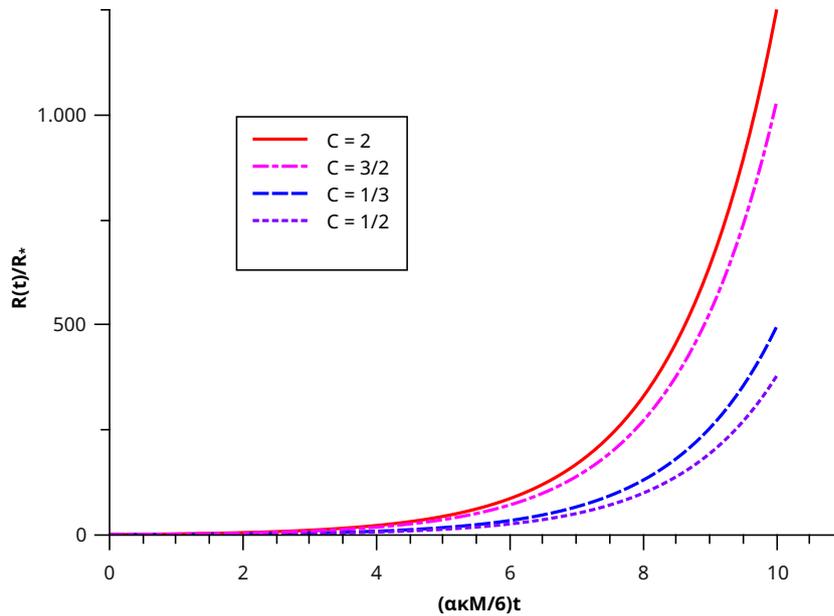
$$C = \frac{9}{\kappa M \alpha} \left(\frac{\kappa M n_0}{3} \right)^{1/2}. \quad (3.53)$$

Na figura (13), observamos o gráfico para a evolução temporal do fator de escala dado pela equação (3.52). Na figura (14) e na figura (15), temos a densidade de energia, e a comparação das fonte geradoras de matéria, respectivamente.

Ainda podemos escrever o parâmetro de desaceleração $q(t)$:

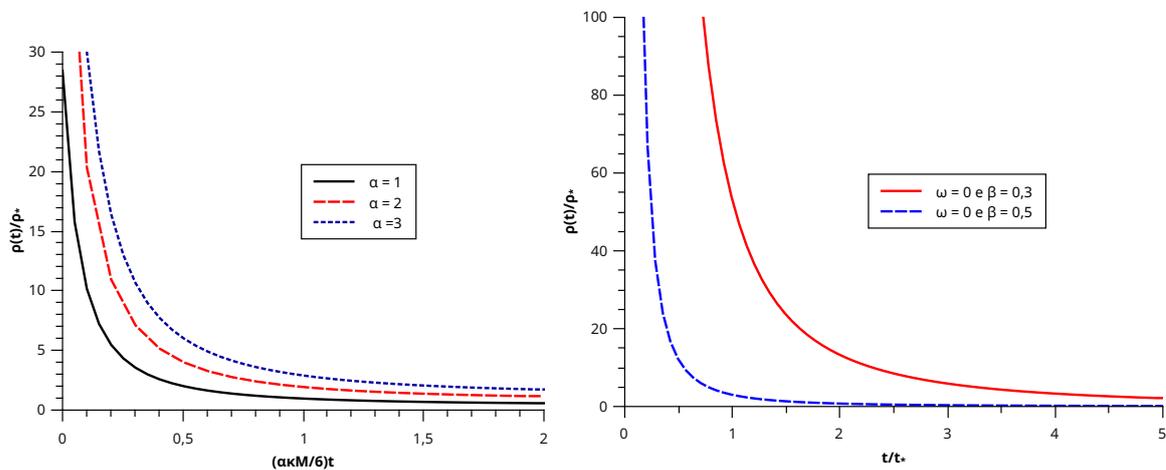
$$q(t) = - \left[1 + \frac{2}{3C} e^{(-\frac{\alpha\kappa M}{6}t)} - \frac{2}{3} e^{(-\frac{\alpha\kappa M}{6}t)} \right], \quad (3.54)$$

Figura 13 – Gráfico do fator de escala para o modelo de Friedmann com produção de partículas. A coordenada temporal que usamos é adimensional, e dado por: $\frac{\alpha\kappa M}{6}t$.



Fonte: O Autor.

Figura 14 – Gráfico da densidade de energia no modelo de Friedmann com produção de partículas.



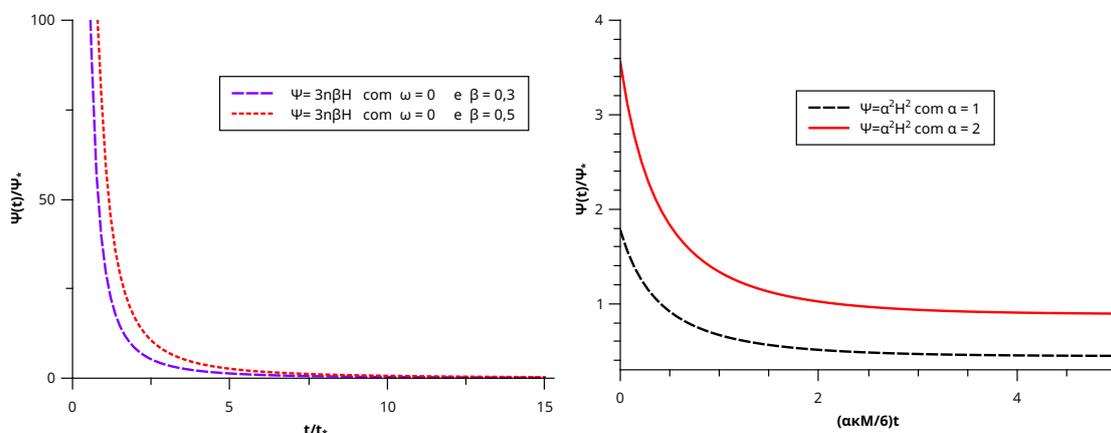
Fonte: O Autor.

onde $C > 0$ e $C \neq 1$. Podemos observar na figura (16), a evolução desse parâmetro para diferentes valores de C . Note que para $C = 1$, o parâmetro de desaceleração é constante, dado por:

$$q(t) = -1, \tag{3.55}$$

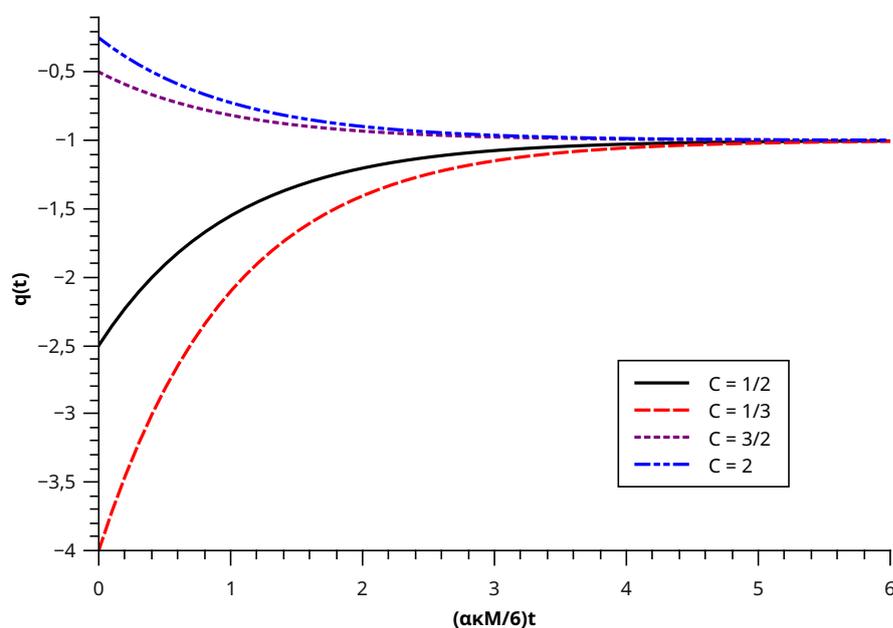
o que podemos concluir também substituindo $C = 1$ na equação (3.52).

Figura 15 – Gráfico para a fonte de partículas. Consideramos duas fontes distintas: $\Psi = 3n\beta H$ (LIMA; GERMANO; ABRAMO, 1989) e $\Psi = \alpha H^2$ (PRIGOGINE J. GEHENIAU; NARDONE, 1989).



Fonte: O Autor.

Figura 16 – Evolução do parâmetro de desaceleração para o modelo de Friedmann com produção de partículas, assumindo diferentes valores para C . Note que depois de um determinado tempo, todos alcançam o mesmo valor para $q(t)$, ou seja, "caem" no modelo de de Sitter, independente do valor de C .



Fonte: O Autor.

Todavia, podemos fazer uma correlação entre o modelo com produção de partículas de Prigogine e o modelo de de Sitter. Então, quando fazemos $C = 1$, na equação (3.52), obtemos:

$$R(t) = e^{\alpha\kappa Mt/9}, \tag{3.56}$$

enquanto que a solução para de Sitter é:

$$R(t) = e\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t.$$

Pois então, comparando, temos:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} &= \frac{\alpha\kappa M}{9} \\ \Lambda &= \frac{\alpha^2\kappa^2 M^2}{27}\end{aligned}$$

É que temos neste caso uma ligação entre a massa das partículas produzidas no modelo de Prigogine com a constante cosmológica no modelo de de Sitter. Em outras palavras, o modelo com criação pode mimetizar o de de Sitter.

Por outro lado considerando, $C = 1$ na equação (3.53), temos:

$$n_0 = \frac{\alpha\kappa M}{27}, \quad (3.57)$$

onde n_0 é a densidade de partículas inicial do universo.

O universo emerge com uma densidade de partículas inicial n_0 , com isso, não temos uma singularidade quando em $t = 0$, pois $R(t) \neq 0$. A singularidade desaparece devido à presença de criação de partículas ($\alpha \neq 0$), ou seja, a singularidade é estruturalmente instável devido à criação irreversível de partículas, surgindo assim uma cosmologia que vem de uma instabilidade ($n_0 \neq 0$) e não de uma singularidade.

Então, após um tempo característico:

$$t_c = \frac{6}{\alpha\kappa M}, \quad (3.58)$$

o universo chega a um regime de de Sitter, vide seção (2.2), que podemos expressar como:

$$\begin{aligned}R_d(t) &= C^{2/3}e^{\alpha\kappa Mt/9} = C^{2/3}e^{2t/3t_c}, \\ H_d &= \frac{\alpha\kappa M}{9} = \frac{2}{3t_c},\end{aligned} \quad (3.59)$$

$$n_d = \frac{\kappa M}{27}\alpha^2. \quad (3.60)$$

As quantidades H_d , n_d e ρ_d não dependem de C , o que nos parece ser um estado cosmológico onde se comporta como um atrator independente da flutuação inicial. O período de de Sitter tem a duração do decaimento do tempo t_d de seus constituintes conectando-se continuamente a um universo usual (adiabático) de matéria-radiação Robertson-Walker caracterizado por uma densidade de matéria-energia ρ_b e densidade de energia de radiação ρ_γ , relacionado por:

$$\kappa\rho_b = \frac{3a}{R^3}, \quad \kappa\rho_\gamma = \frac{3b}{R^4} \quad \text{e} \quad \rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15}T^4, \quad (3.61)$$

aqui a e b são constantes e estão relacionadas com o número total de bárions N_b e prótons N_γ , em um volume R^3 , e T é a temperatura da radiação do corpo negro. Ainda temos que :

$$a \simeq 2H_d^2 C^2 e^{2H_d \tau_d}, \quad (3.62)$$

$$b \simeq H_d^2 C^{8/3} e^{4H_d \tau_d}. \quad (3.63)$$

Com isso a entropia específica por número de próton é:

$$S = \frac{n_\gamma}{n_b} = \frac{\zeta(3)}{3\pi^2} \left(\frac{45}{\pi^2}\right)^{3/4} \kappa^{1/4} m_b \left(\frac{3t_d}{2}\right)^{1/2} e^{2t_d/3t_c}, \quad (3.64)$$

onde m_b é a massa dos prótons. E o valor do invariante adiabático $\rho_\gamma/T\rho_b$ é:

$$\frac{\rho_\gamma}{T\rho_b} = \frac{b^{3/4}}{a} \left(\frac{\pi^2 \kappa}{45}\right)^{1/4}. \quad (3.65)$$

Os tempos característicos t_d e t_c expressos em termos de M , que é a massa das partículas produzidas:

$$t_d = \frac{640}{81\pi} \kappa^2 M^3 = \frac{640}{81\pi} \frac{M^3}{M_p^4} \simeq 2,5 \left(\frac{M}{M_p}\right)^3 t_p \quad (3.66)$$

e

$$t_c = \frac{2}{3H_d} = \left(\frac{20}{\pi^2}\right)^{1/2} \frac{M^2}{M_p^3} \simeq 1,42 \left(\frac{M}{M_p}\right)^2 t_p \quad (3.67)$$

onde M_p e t_p são a massa e tempo de Planck, respectivamente.

Os valores corretos observados para a entropia S estão na faixa de $10^8 \leq S \leq 10^{10}$, ou seja, são valores de massa M muito próximos dos produzidos quantum-mecanicamente, por exemplo:

$$M/M_p = 40 \longrightarrow S = 8,46 \times 10^2,$$

$$M/M_p = 50 \longrightarrow S = 1,38 \times 10^8,$$

$$M/M_p = 53,3 \longrightarrow S = 7,17 \times 10^9,$$

$$M/M_p = 60 \longrightarrow S = 2,16 \times 10^{13}.$$

O que nos mostra uma ligação inesperada entre microscópico e macroscópico.

A temperatura do corpo negro através desses requisitos é dada por:

$$T_p = \left(\frac{45}{\pi^2 \kappa}\right)^{1/4} \frac{b^{1/4}}{a^{1/3}} H_p^{2/3}, \quad (3.68)$$

$$T_p(^{\circ}K) \simeq 2,82 \times 10^{-9} \left(\frac{H_p}{75 \text{ km/s/Mpc}}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{M_p}\right)^{1/3} e^{0,3926 M/M_p} \quad (3.69)$$

onde H_p é o atual valor da função de Hubble: $50 \leq H_p(\text{km/s/Mpc}) \leq 100$.

São observadas na gama de temperatura da radiação do corpo negro ($2,7^{\circ}K$) os mesmos valores da massa M :

$$M/M_p = 50 \longrightarrow T_p = 3,49 \left(\frac{H_p}{75 \text{ km/s/Mpc}}\right)^{2/3} ^{\circ}K \quad (3.70)$$

O modelo tratado nesta seção tem como principal característica considerar a segunda lei da termodinâmica na escala cosmológica. De fato, a transformação de energia da curvatura espaço-tempo em matéria nos parece ser um processo irreversível onde se tem um aumento da entropia ligada à criação de matéria. Logo, a diferença entre espaço-tempo e matéria se deve a criação de entropia. A questão relacionada a seta cosmológica está longe de ser simples, pois na cosmologia tradicional, tanto expansão como contração podem ocorrer de maneira reversível. Todavia, os requisitos para se ter criação de matéria a partir do espaço-tempo envolvem o sinal da função de Hubble H . Ainda nesta seção vimos que apenas no universo de de Sitter, a expansão é termodinamicamente possível, de acordo com a cosmologia não tradicional a qual foi tratada aqui, o universo se desenvolve através de um estágio de de Sitter, onde podemos observar que há uma relação direta entre expansão do universo e entropia.

4 SISTEMA COSMOLÓGICO ABERTO ANISOTRÓPICO

A ideia que vamos apresentar neste capítulo, é adotar um ponto de vista um tanto quanto diferente para um modelo onde o número de partículas não é conservado. Iremos manter a interpretação de Prigogine, ou seja, que a produção de partículas far-se-á por meio da energia armazenada no campo gravitacional. Em nosso modelo, assumimos a energia gravitacional estocada em uma dimensão adicional que será canalizada para o processo de criação.

Então consideramos o elemento de linha que governa o espaço-tempo dado por :

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \{ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 \} - Y^2(t) dy^2, \quad (4.1)$$

onde $R(t)$ e $Y(t)$ são funções dependentes do tempo, que inicialmente têm diferentes taxas de evolução temporal. A geometria apresentada nesse espaço - tempo é homogênea, com uma dimensão plana extra de caráter anisotrópico, ou seja, as propriedades física não são as mesmas em qualquer direção do universo.

Nas equações de campo de Einstein, dada pela equação (2.2), o tensor momento-energia é redefinido pela produção de partículas, para sermos mais precisos, a mudança ocorrerá no número de dimensões do espaço-tempo.

Dessa forma, o tensor momento-energia de dimensão superior, será formado por duas partes específicas, sendo a primeira referente ao fluido perfeito:

$$T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu + P h^{\mu\nu}. \quad (4.2)$$

E a outra é uma componente adicional, referente à dimensão extra, e é dada por:

$$T^{yy} = \Pi g^{yy}, \quad (4.3)$$

onde Π é a pressão da parte anisotrópica e $h^{\mu\nu}$ é a projeção do tensor, a qual é definida por:

$$h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu.$$

Todavia, assumindo um observador comóvel, as equações de campo de Einstein são resumidas a:

$$\rho = 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 + 3 \frac{\dot{R}\dot{Y}}{R\dot{Y}}, \quad (4.4)$$

$$P = -2 \frac{\ddot{R}}{R} - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - 2 \frac{\dot{R}\dot{Y}}{R\dot{Y}} - \frac{\ddot{Y}}{Y}, \quad (4.5)$$

$$\Pi = -3 \frac{\ddot{R}}{R} - 3 \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2. \quad (4.6)$$

A constante gravitacional (κ) das equações de campo de Einstein, neste trabalho, será considerada como unitária, no entanto, essa constante pode ser ligeiramente alterada se considerarmos um espaço-tempo com dimensões extras.

Vamos ainda considerar as equações de conservação do tensor momento-energia:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad T^{\mu\nu};_{\mu} = 0, \quad (4.7)$$

onde ∇ e $(;)$ diz respeito a derivada covariante.

A definição de derivada covariante é dada por:

$$T^{\mu\nu};_{\mu} = T^{\mu\nu},_{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\gamma\mu} T^{\gamma\nu} + \Gamma^{\nu}_{\gamma\mu} T^{\mu\gamma} = 0,$$

aqui $(,)$ refere-se à derivada ordinária.

Aplicaremos na equação (4.7) a convenção de Einstein, o que nos dá:

$$T^0_{;0} + T^1_{;1} + T^2_{;2} + T^3_{;3} + T^4_{;4} = 0.$$

E agrupando os termos comuns, a conservação de $T^{\mu\nu}$ resulta:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P) + (\rho + \Pi)\frac{\dot{Y}}{Y}. \quad (4.8)$$

A lei de conservação dada pela equação (4.8) tem uma analogia com a primeira Lei da Termodinâmica, que pode ser mostrada ao se fazer algumas observações em relação ao trabalho realizado pelo fluido. A respeito do volume, temos:

$$dV = R^3 dY + Y dR^3$$

O trabalho é escrito por duas partes distintas:

$$W = PY dR^3 + \Pi dR^3$$

O primeiro termo está relacionado com a expansão do Universo, e o segundo com a produção de partículas. É importante notarmos que a energia armazenada na dimensão extra é a responsável pela produção de partículas. Portanto, podemos escrever a primeira lei da termodinâmica com a forma:

$$d(\rho R^3 Y) + PY dR^3 + \Pi R^3 dY = 0. \quad (4.9)$$

Temos então cinco incógnitas e três equações ((4.4),(4.5) e (4.6)). Mas, podemos considerar a equação de estado $P = \rho\omega$, com ω constante como é habitual em modelos cosmológicos, e para a pressão da dimensão adicional adotamos um procedimento equivalente para a equação de estado dessa dimensão aliviando assim a incompatibilidade que se tem entre o número de equações e incógnitas.

Uma vez que não temos a equação de estado para a dimensão adicional, iremos percorrer um trajeto diferente, que ao fim teremos uma solução satisfatória para a pressão da dimensão adicional. Para isso, levaremos em conta que o número de partículas não se conserva, entretanto a equação da continuidade é escrita como:

$$(nu^\mu)_{;\mu} = \Psi, \quad (4.10)$$

onde n é a densidade do número de partículas, e Ψ é a fonte de partículas. Aplicaremos a convenção de Einstein na equação (4.10), o que nos dá:

$$(nu^0)_{;0} + (nu^1)_{;1} + (nu^2)_{;2} + (nu^3)_{;3} + (nu^4)_{;4} = \Psi.$$

Aplicando a definição de derivada covariante, podemos resolver cada termo considerando a geometria definida na equação (4.1), teremos:

$$\dot{n} + n\frac{\dot{R}}{R} + n\frac{\dot{R}}{R} + n\frac{\dot{R}}{R} + n\frac{\dot{Y}}{Y} = \Psi.$$

Com isso a equação da continuidade assume a forma:

$$\dot{n} + \left(3\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{Y}}{Y}\right)n = \Psi. \quad (4.11)$$

Como não há conservação no número de partículas do fluido cósmico, então o nosso próximo passo é associar uma pressão anisotrópica a uma propriedade dissipativa que será responsável pela não conservação das partículas. A pressão então será negativa e responsável pelo processo de expansão cósmica sem a inclusão do termo de energia escura, e a criação de partículas acontecerá às custas da energia armazenada na dimensão adicional.

Para concluir a nossa coleção de equações básicas para este modelo, veremos as equações termodinâmicas, começando com a primeira lei da termodinâmica:

$$TdS = dU + PdV + \mu dN, \quad (4.12)$$

onde T é a temperatura, S a entropia, N o número de partículas e μ , o potencial químico.

Comparando as expressões para a primeira lei da termodinâmica dada pela equação (4.9) e pela equação (4.12), notamos que há um termo relacionado com a produção de partículas que envolvem o potencial químico. Podemos escrever essa comparação na seguinte relação:

$$\begin{aligned} \Pi R^3 dY &= -\mu dN, \\ dN &= \frac{-\Pi R^3}{\mu} dY. \end{aligned}$$

Após rearranjar a expressão e dividindo ambos os lados por dt , temos:

$$\dot{N} = \frac{\Pi R^3}{\mu} (-\dot{Y}). \quad (4.13)$$

A equação acima (4.13), demonstra claramente que a produção de partículas faz-se às custas do decaimento da energia armazenada na dimensão adicional.

Fazendo algumas modificações podemos reescrever a primeira lei da termodinâmica na forma:

$$Tnd\sigma = d\rho - \mu dn - T\sigma dn, \quad (4.14)$$

onde σ é a entropia específica.

Tendo em mãos a equação de Euler,

$$\mu = \frac{\rho + P_{th}}{n} - T\sigma,$$

podemos substituir na equação (4.14), o que nos dá:

$$\begin{aligned} Tnd\sigma &= d\rho - \left\{ \frac{\rho + P_{th}}{n} - T\sigma \right\} dn - T\sigma dn \\ Tnd\sigma &= d\rho - (\rho + P_{th}) \frac{dn}{n}, \end{aligned}$$

e por fim dividindo ambos os lados por dt , reescrevemos a equação (4.14) como:

$$nT\dot{\sigma} = \dot{\rho} - (\rho + P) \frac{\dot{n}}{n}.$$

Agora se considerarmos a produção de partícula onde não haja dissipação de energia, ou seja adiabática ($\dot{\sigma} = 0$), e as partículas produzidas com a mesma velocidade que tinham as preexistentes a equação acima fica na forma:

$$\dot{\rho} - (\rho + P) \frac{\dot{n}}{n} = 0.$$

Usando a equação (4.8) e a equação (4.11), encontramos a expressão para a pressão anisotrópica:

$$\Pi = P - \frac{(\rho + P)\Psi}{n\frac{\dot{Y}}{Y}}. \quad (4.15)$$

4.1 MODELO ABERTO ANISOTRÓPICO COM DECAIMENTO EM FRIEDMANN PLANO

Começaremos a nossa discussão com respeito do modelo de Friedmann anisotrópico, partindo do valor do fator de escala $R(t)$ dado pela equação (2.9) obtido na seção (2.1):

$$\frac{R}{R_*} = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{2/3(1+\omega)}.$$

Agora, usando as equações de campo (4.4) e (4.5) e a equação de estado $P = \rho\omega$ e com uma fácil manipulação matemática podemos obter a expressão:

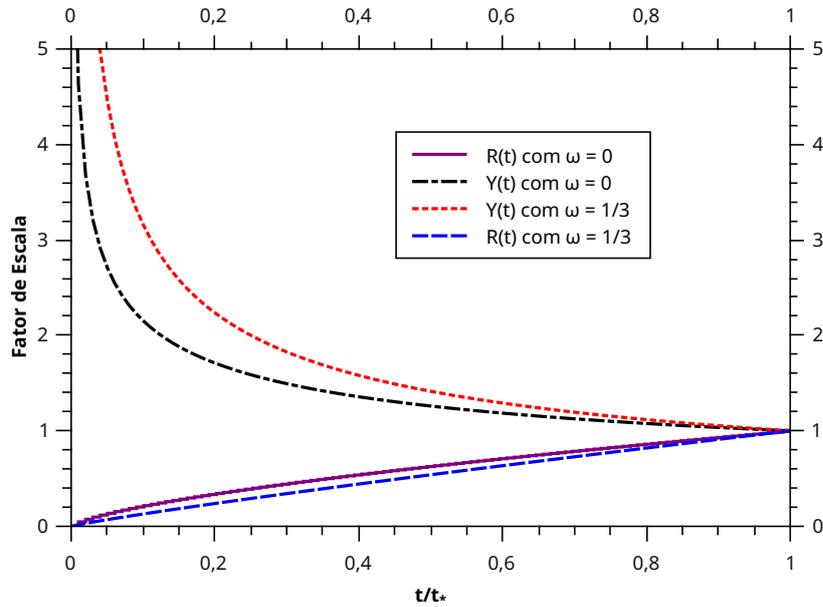
$$-2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2}(3\omega + 1) + \frac{\dot{R}\dot{Y}}{R\dot{Y}} - \frac{\ddot{Y}}{Y} = 0. \quad (4.16)$$

Sendo assim, podemos substituir o fator de escala $R(t)$ dado pela equação (2.9) na expressão acima, eliminando $R(t)$. Integramos, e encontramos a seguinte expressão:

$$\frac{Y}{Y_*} = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\left(-\frac{3\omega+1}{3+3\omega} \right)}, \quad (4.17)$$

onde t_* denota um tempo específico. Na figura (17), analisamos os fatores de escala $R(t)$ e $Y(t)$.

Figura 17 – Evolução dos Fatores de Escala $R(t)$ e $Y(t)$, com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$, no modelo de Friedmann, usando as equações (2.9) e (4.17).



O Autor.

A lei de conservação do momento - energia para o caso dessa dimensão extra é dada por:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + P) + (\rho + \Pi)\frac{\dot{Y}}{Y} = 0, \quad (4.18)$$

onde Π é a pressão anisotrópica e $Y(t)$ é o fator de escala dessa dimensão adicional.

Vamos considerar uma fonte para a produção de partículas dada por:

$$\Psi = nF(t), \quad (4.19)$$

onde n é a densidade do número de partículas e a função $F(t)$ é dependente somente do tempo. Para determinar $F(t)$ vamos usar a equação de campo ligada a pressão anisotrópica (4.6), com a equação de estado $P = \rho\omega$, que fazendo as considerações possíveis temos:

$$\Pi = \rho\omega - \frac{(1 + \omega)\rho F(t)}{\dot{Y}/Y},$$

ou melhor:

$$F(t) = -\frac{(\Pi - \omega\rho)Y}{(1 + \omega)\rho\dot{Y}}. \quad (4.20)$$

Podemos encontrar uma relação para Π substituindo as expressões encontradas acima para $R(t)$ e $Y(t)$ na equação (4.6), e ρ é dado pela equação de campo (4.4), com isso teremos:

$$\Pi = -\frac{2(1-3\omega)}{3(1+\omega^2)t^2}. \quad (4.21)$$

Logo, teremos uma expressão para $F(t)$:

$$F(t) = -\frac{3(1+\omega)t}{(3\omega+1)}. \quad (4.22)$$

Podemos ainda substituir a fonte na equação de continuidade dada por (4.11) de modo que tenhamos a seguinte relação:

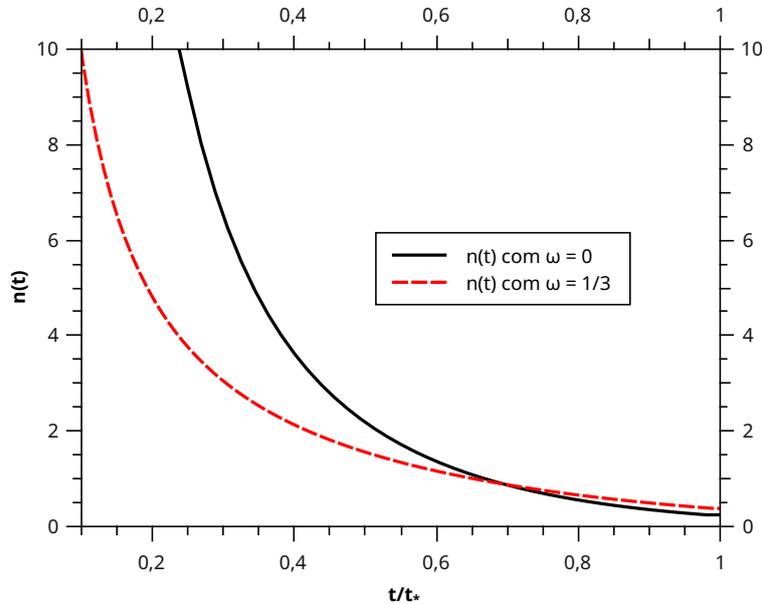
$$\frac{\dot{n}}{n} + \left(3\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\dot{Y}}{Y}\right) = -\frac{3(1+\omega)t}{(3\omega+1)}, \quad (4.23)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\frac{\ln n}{dt} + \frac{\ln R^3}{dt} + \frac{\ln Y}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{3(1+\omega)t^2}{3\omega+1} \right\} \quad (4.24)$$

que integrando fica:

Figura 18 – Gráfico da densidade do número de partículas com $\omega = 0$ e $\omega = 1/3$, usando a equação (4.26)



$$nR^3Y = e^{\left\{-\frac{3(1+\omega)}{3\omega+1} \frac{t^2}{2}\right\}}. \quad (4.25)$$

Explicitando $n(t)$ na equação acima, temos:

$$n(t) = \left(\frac{R_*}{R}\right)^3 \left(\frac{Y_*}{Y}\right) e^{\left\{-\frac{3(1+\omega)}{3\omega+1} \frac{(t/t_*)^2}{2}\right\}}, \quad (4.26)$$

onde R e Y são os fatores de escala dado pela equação (2.16) e pela equação (4.17), respectivamente. Podemos ver a evolução para a densidade do número de partículas, na figura (18).

4.2 MODELO ABERTO ANISOTRÓPICO COM DECAIMENTO NO MODELO DE DE SITTER

No capítulo 2, na seção (2.2), vimos um breve estudo sobre o modelo cosmológico de de Sitter. Levamos em conta as equações de campo da teoria da relatividade geral, dada pela equação (2.6) e pela equação (2.7), às condições $P = \rho = k = 0$, e obtivemos as equações de campo para o modelo o que nos levou ao fator de escala, dado pela equação (2.53) e que reescreveremos na forma:

$$R(t) = R_* e^{a(t-t_*)}, \quad (4.27)$$

onde a é uma constante com dimensão t^{-1} . Podemos substituir o fator de escala de de Sitter escrito acima e substituir na equação de campo (4.5), com $P = 0$, afim de encontrarmos uma expressão para o fator de escala para a dimensão cuja pressão é anisotrópica, com isso, obtemos:

$$Y(t) = \frac{\text{sen} \{a\sqrt{2}(t - t_*)\} + \text{cos} \{a\sqrt{2}(t - t_*)\}}{2 a e^{a(t-t_*)}}, \quad (4.28)$$

onde t_* é um tempo específico.

Podemos escrever a densidade de matéria-energia como:

$$\rho(t) = \frac{3a^2\sqrt{2} \{ \text{cos} [a\sqrt{2}(t - t_*)] - \text{sen} [a\sqrt{2}(t - t_*)] \}}{\text{sen} [a\sqrt{2}(t - t_*) + \text{cos} [a\sqrt{2}(t - t_*)]]}. \quad (4.29)$$

Neste caso, vamos omitir a feitura dos gráficos, já que podemos notar sem dificuldades que $R(t)$ é crescente, e que $Y(t)$ é uma função oscilatória decrescente e muito similar a solução de um oscilador harmônico amortecido.

5 MODELOS EMERGENTES

Os casos que tratamos no capítulo anterior resultam no modelo de Friedmann para quatro dimensões, e o segundo caso trata do modelo de de Sitter emergente de um espaço tempo com dimensões superiores e produção de partículas. Neste capítulo vamos tratar de uma solução potencial que generaliza o modelo de Friedmann, e também do modelo Λ CDM emergente. Este último é o principal resultado deste trabalho, pois de um modelo primordialmente anisotrópico obtemos um modelo quadridimensional que se adequa com boa concordância a vários experimentos cosmológicos ("barionic acoustic oscillation", distância luminosa de supernovas do tipo IA, anisotropia da radiação cósmica de fundo, lenteamento gravitacional, para citar alguns exemplos.)

5.1 CASO I - MODELO COM DEPENDÊNCIA POTENCIAL PARA O FATOR DE ESCALA

Além da expressão para a pressão anisotrópica dada pela equação (4.15), vamos ainda considerar mais duas expressões para esta pressão. Uma das expressões é dada pela equação de campo (4.6):

$$\Pi = -3\frac{\ddot{R}}{R} - 3\frac{\dot{R}^2}{R^2},$$

que pode, ser reescrita em termos da definição do parâmetro de desaceleração e da função de Hubble, na forma:

$$\Pi \propto (q_R + 1)H_R^2. \quad (5.1)$$

A segunda expressão para a pressão anisotrópica não é obtida de forma tão direta quanto a primeira, antes de fazê-la, devemos levar em conta alguns fatores. Vamos, primeiramente, aplicar a equação de estado na equação (4.15), e considerar a fonte de produção de partículas como sendo $\Psi \propto n\frac{\dot{Y}}{Y}$. Isso resultará em uma solução onde a pressão anisotrópica será proporcional a densidade de energia ρ , ou seja:

$$\Pi \propto \rho. \quad (5.2)$$

Logo, escrevemos a segunda expressão para a pressão como:

$$\Pi \propto \rho = 3\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 3\frac{\dot{R}\dot{Y}}{RY},$$

que também pode ser escrita em termos da função de Hubble:

$$\Pi \propto 3(H_R^2 + H_R H_Y). \quad (5.3)$$

Agora, temos mais duas expressões para a pressão anisotrópica, e se tivermos uma solução para o fator de escala do tipo: uma variável elevada a uma constante (t^β), teremos um parâmetro

de desaceleração constante. Com isso, esperamos ter uma relação linear entre as funções de Hubble: H_R e H_Y , que são referentes aos fatores de escala $R(t)$ e $Y(t)$, respectivamente. Então podemos escrever essa relação na forma:

$$H_R = \alpha^{-1} H_Y, \quad (5.4)$$

ou ainda:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \alpha^{-1} \frac{\dot{Y}}{Y}, \quad (5.5)$$

onde α é uma constante dimensional. A partir da equação (5.4), podemos reescrever a equação de campo de Einstein, dada pela equação (4.4) na forma:

$$\rho = 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} \left(1 + \frac{R \dot{Y}}{\dot{R} Y} \right), \quad (5.6)$$

ou:

$$\rho = 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} (1 + \alpha), \quad (5.7)$$

onde usamos a equação (5.5). A relação dada pela equação (5.5), ainda nos fornece diretamente, uma relação entre os parâmetros de desaceleração q_R e q_Y , e da constante α , na forma:

$$\alpha = \frac{1 + q_R}{1 + q_Y}, \quad (5.8)$$

onde q_R e q_Y são os parâmetros de desaceleração devido ao fator de escala $R(t)$ e $Y(t)$, respectivamente.

Usando as equações de campo dada pela equação (4.6) e pela equação (5.5), podemos escrever a seguinte equação diferencial:

$$(2 + \alpha) \frac{\ddot{R}}{R} + [(1 + \alpha)(1 + 3\omega) + \alpha^2] \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 0, \quad (5.9)$$

que podemos integrar e obter a expressão para o fator de escala $R(t)$:

$$\frac{R}{R_*} = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{2+\alpha}{(1+\alpha)(2+3\omega)+1+\alpha^2}}. \quad (5.10)$$

Já para o fator de escala da dimensão extra $Y(t)$, podemos escrevê-lo usando a equação (5.10) na equação (5.5):

$$\frac{Y}{Y_*} = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{\alpha(\alpha+2)}{(1+\alpha)(2+3\omega)+1+\alpha^2}}. \quad (5.11)$$

Podemos considerar a constante α como:

$$\alpha = -\frac{1 + 3\omega}{2}, \quad (5.12)$$

o que nos faz recuperar a solução usual do modelo cosmológico FLRW, dada pela equação (2.9):

$$\frac{R}{R_*} = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{\frac{2}{3(1+\omega)}}.$$

E para o fator de escala $Y(t)$, a expressão toma a forma:

$$\frac{Y}{Y_*} = \left(\frac{t}{t_*} \right)^{-\frac{1+3\omega}{3(1+\omega)}}.$$

É interessante ressaltar, que ao usarmos as expressões acima para os fatores de escala na equação (4.4), além de considerar o universo preenchido de radiação, onde a equação de estado assume a forma: $P = 1/3\rho$, obtemos uma solução na qual o universo é vazio. Trataremos mais cuidadosamente desse detalhe posteriormente.

O modelo cosmológico FLRW apesar de não mais assumir o posto de modelo cosmológico padrão, ele tem real importância no estudo de outros modelos, pois em qualquer momento na evolução do universo, temos um quadro que se aproxima do modelo FLRW usual. É um modelo que a certo modo se assemelha com o nosso modelo, pois o mesmo tem um parâmetro de desaceleração positivo, indicando assim um universo com expansão, porém não acelerada.

Em nosso modelo, o parâmetro de desaceleração assume a forma:

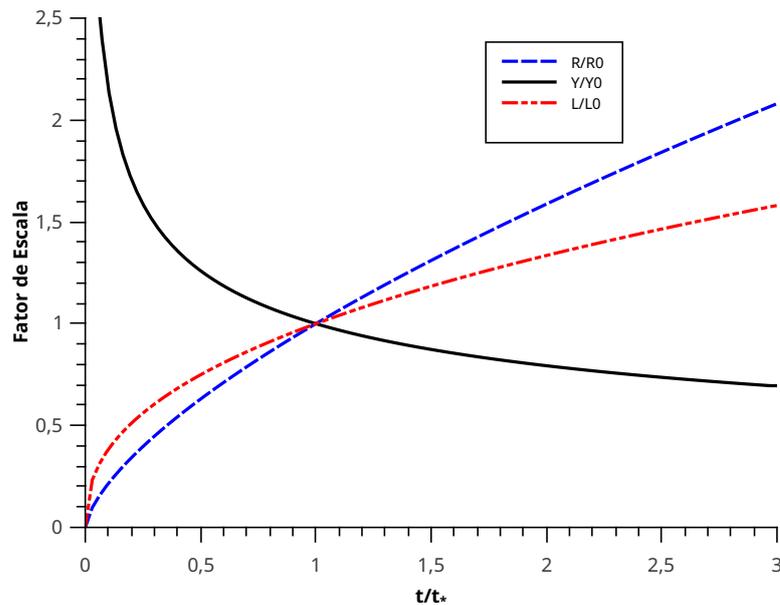
$$q_L(t) = -\frac{\ddot{L}L}{\dot{L}^2}, \tag{5.13}$$

onde L , que é o fator de escala efetivo, é dado por:

$$L = (R^3 Y)^{1/4}. \tag{5.14}$$

Na figura (19), podemos observar a evolução temporal e comparar o comportamento dos três

Figura 19 – Evolução dos fatores de escala $R(t)$, $Y(t)$ e $L(t)$, para o modelo emergente dependência potencial. Assumindo os valores: $\omega = 0$ e $\alpha = -1/2$.



Fonte: O Autor.

fatores de escala $R(t)$, $Y(t)$ e $L(t)$.

O parâmetro de desaceleração para o fator de escala efetivo pode assumir a forma:

$$q_L(t) = -\frac{3(1+\alpha)(1-\omega)}{(3+\alpha)(2+\alpha)}, \quad (5.15)$$

Podemos analisar a equação (5.15) da seguinte forma: no intervalo entre $-3 < \alpha < -2$, temos um universo em expansão e acelerada, enquanto que no intervalo de $-2 < \alpha < 0$, temos o colapso da dimensão adicional. Neste caso, não temos uma conciliação do colapso da dimensão extra, que conseqüentemente acontece o processo de isotropização, com o processo de expansão acelerada do universo.

5.2 CASO II - MODELO LAMBDA-CDM EMERGENTE

Nesta seção, usaremos uma fonte ligeiramente diferente da usada anteriormente, logo, fonte para a produção de partículas tem a forma:

$$\Psi = \gamma n \frac{\dot{Y}}{Y}, \quad (5.16)$$

onde γ é uma constante adimensional. Logo, usando a fonte dada pela equação (5.16) na expressão para a pressão anisotrópica dada pela equação (4.15) juntamente com o conjunto das equações de campo, podemos obter uma equação diferencial:

$$\ddot{Y} + (\Delta + 4) \frac{\dot{R}}{R} \dot{Y} + \left[-\frac{\ddot{R}}{R} + \Delta \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 \right] Y = 0, \quad (5.17)$$

onde $\Delta = 3(1+\omega)\gamma - 2$. Analisando o termo entre colchetes, temos que se trata de um termo constante:

$$-\frac{\ddot{R}}{R} + \Delta \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \beta, \quad (5.18)$$

e que sua integração mimetiza a solução para o fator de escala do modelo Λ CDM, ou seja:

$$R(t) \propto \sinh[\sqrt{\beta(1-\Delta)}t]^{\frac{1}{1-\Delta}}, \quad (5.19)$$

e podemos ver a sua evolução temporal na figura (20). E para a solução do fator de escala da dimensão extra, substituímos a equação (5.19) na equação (5.17), obtendo:

$$\ddot{Y} + \frac{\Delta + 4}{1 - \Delta} \sqrt{\beta(1 - \Delta)} \coth[\sqrt{\beta(1 - \Delta)}t] \dot{Y} + \beta Y = 0, \quad (5.20)$$

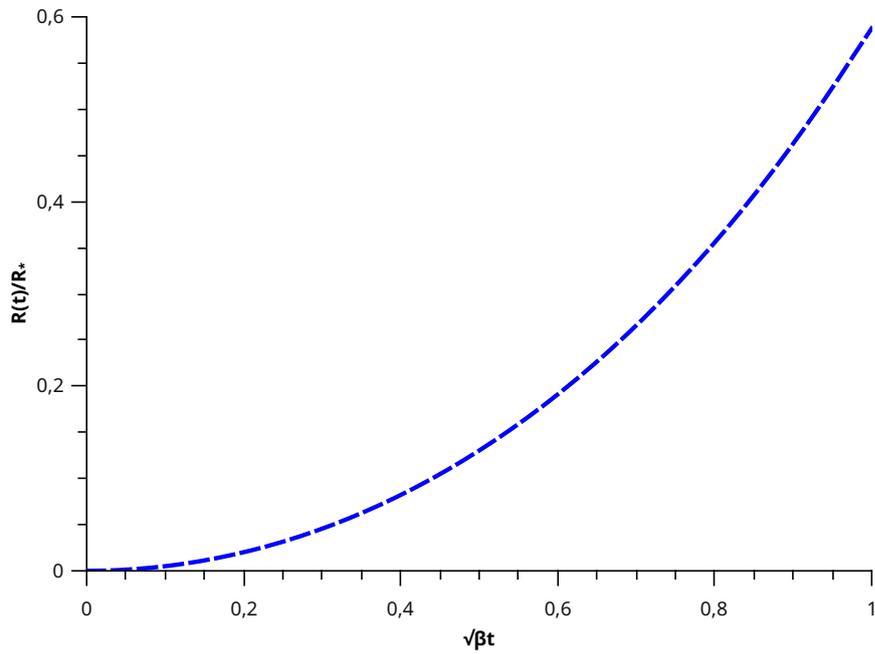
onde $\frac{\Delta+4}{1-\Delta} \sqrt{\beta(1-\Delta)} \coth[\sqrt{\beta(1-\Delta)}t] = f(t)$, logo a equação diferencial toma a forma:

$$\ddot{Y} + f(t) \dot{Y} + \beta Y = 0. \quad (5.21)$$

Integrando a equação (5.21), temos a seguinte solução para $Y(t)$:

$$Y(t) \propto \sinh[\sqrt{\beta(1-\Delta)}t]^{\frac{2\Delta+3}{2(\Delta-1)}} P_b^\alpha(\cosh[\sqrt{\beta(1-\Delta)}t]), \quad (5.22)$$

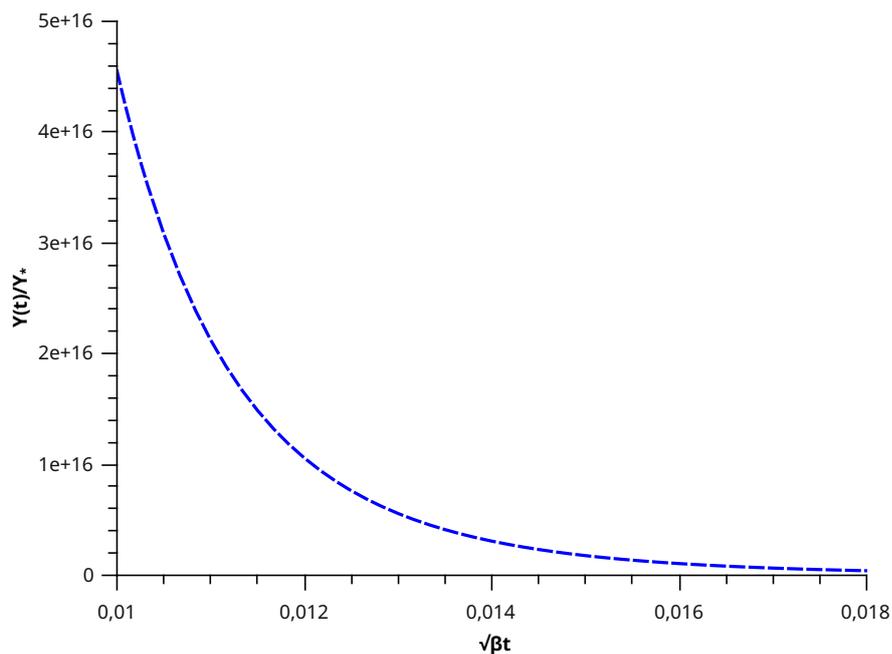
Figura 20 – Evolução do fator de escala $R(t)$, que mimetiza o modelo cosmológico Λ CDM, onde assumimos $\Delta = 1/2$.



Fonte: O Autor.

onde $a = \frac{3+2\Delta}{2(\Delta-1)}$, $b = \frac{(1-\Delta+\sqrt{\Delta^2+4\Delta+20})}{2(\Delta-1)}$ e P_b^a é uma função de Legendre do primeiro tipo. Podemos ainda, ver o comportamento da expressão para a dimensão extra, para o caso do modelo Λ CDM emergente, na figura (21).

Figura 21 – Evolução do fator de escala $Y(t)$, onde assumimos $\Delta = 1/2$.

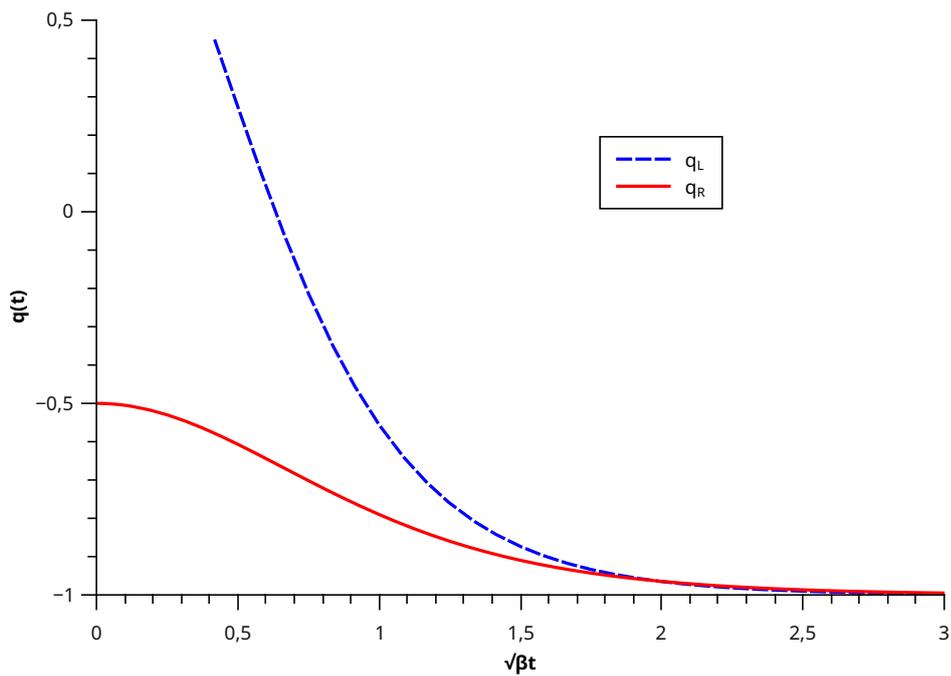


Fonte: O Autor.

A solução que mimetiza o modelo Λ CDM responde bem para o caso de poeira onde $\omega = 0$, não temos a necessidade de considerar uma componente da energia escura com uma equação de estado exótica.

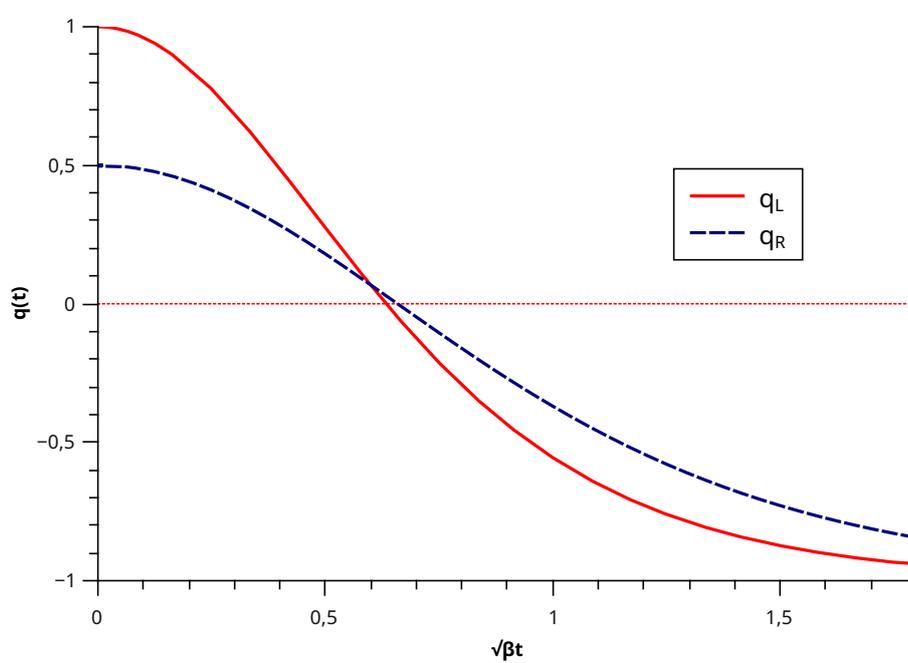
Nas figuras (22) e (23), observamos a evolução temporal do parâmetro de desaceleração para o fator de escala dado pela equação (5.19), assim como o parâmetro de desaceleração para o fator de escala efetivo dado pela equação (5.14), onde o $Y(t)$ usado é dado pela equação (5.22).

Figura 22 – Evolução do parâmetro de desaceleração, onde assumimos $\Delta = 1/2$.



Fonte: O Autor.

Figura 23 – Evolução do parâmetro de desaceleração, onde assumimos $\Delta = -1/2$.



Fonte: O Autor.

6 CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho fizemos um estudo da termodinâmica onde envolve um processo de produção de partículas em um espaço-tempo 5D, ou seja, o tipo Kaluza-Klein. Em nosso modelo, o processo de criação de partículas é realizada a custa da energia armazenada na dimensão adicional.

Originalmente, a métrica que usamos, dada pela equação (4.1), é anisotrópica, no entanto, como o processo de criação de partículas remove energia da dimensão extra, conseqüentemente, temos como um efeito colateral do processo de homogeneização do espaço-tempo (CAMPOS, 2016).

O nosso modelo têm três exemplos: no primeiro caso, avançamos para uma solução FLRW; enquanto que no segundo exemplo, temos o modelo de de Sitter, e por fim, o espaço-tempo que emerge a partir do processo de homogeneidade e compactificação, mimetiza o modelo Λ CDM.

Escrevemos a primeira lei da termodinâmica, onde aparece explicitamente o termo responsável pela produção de partículas, dada pela equação (4.9), e na equação (4.13) deixamos claro o decaimento da dimensão adicional, concomitantemente com a produção de partículas.

Ainda assim, antes do processo de homogeneidade ter lugar, temos características interessantes. Como um exemplo, os dois momentos distintos onde ocorrem as transições na aceleração da expansão do fluido cósmico para o fator de escala efetivo, enquanto que $R(t)$ não mostra transição.

Para eliminar qualquer dúvida sobre a ocorrência de singularidades, calculamos o escalar de Kretschmann. O escalar de Kretschmann é dado por $K = R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$, é escrito em termos de quantidades geométricas para o nosso modelo anisotrópico, resultando:

$$K \propto H_Y^4[3 - q_Y^2] + H_R^4 \left[3 \left(\frac{H_Y}{H_R} \right)^2 - 3q_R^2 \right]. \quad (6.1)$$

Embora possa haver pontos em que o valor de escala Kretschmann é muito grande, temos singularidades apenas em $t = 0$.

Outro ponto que vale a pena mencionar refere-se a distância do nosso modelo para o modelo Λ CDM. Uma maneira rápida de responder a esta pergunta é usando os parâmetros *statefinder* (SAHNI T. D. SAINI; ALAM, 2003). Para o modelo Λ CDM, o par *statefinder* é um ponto fixo, ou seja, $(r, s) = (1, 0)$. Como o modelo Λ CDM responde bem quando comparado aos dados observacionais, a proximidade de um determinado modelo com este ponto fixo é uma boa indicação de adequação para o que observamos presentemente.

Explicitamente o par (r, s) é dado por:

$$r = \frac{\ddot{R}}{RH^3}, \quad (6.2)$$

$$s = \frac{r - 1}{3(q - 1/2)}. \quad (6.3)$$

Independente do que usamos, o fator de escala dada pela equação (5.19), ou o fator de escala efetivo dado pela equação (5.14), o par (r, s) é dependente do tempo, mas com a passagem do tempo, eles irão chegar ao valor constante ($r = 1, s = 0$). Portanto, em nosso modelo nós podemos considerar os parâmetros *statefinder* substituindo a equação (5.19) ou o fator de escala efetivo $L(t)$. Apesar de inicialmente ter uma evolução do par (r, s) com a evolução do tempo, eles irão chegar ao valor constante $(1, 0)$. No entanto, certamente este ponto deve ser melhor estudado para os momentos iniciais do universo.

Os desdobramentos futuros para este trabalho são diversos, todavia, vamos nos restringir a três momentos diferentes: um primeiro momento no passado, onde a discente Rochelle Gomes (SOUZA, 2013) iniciou os estudos neste tipo de modelo; presentemente, onde nós aprimoramos substancialmente o trabalho de Rochelle, e por fim, futuramente, teremos uma discussão feita pelo discente Francisco Oliveira que fará uma comparação entre os modelos com criação de partículas e o modelo com uma componente de energia de vácuo com dependência temporal.

REFERÊNCIAS

- AMENDOLA, L.; TSUJIWAKA, S. *Dark Energy: Theory and Observations*. New York: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 27.
- BASILAKOS, S.; LIMA, J. **Constraints on Cold Dark Matter Accelerating Cosmologies and Cluster Formation**. *Physical Review D*, v. 82, p. 23504, 2010. Citado na página 29.
- CALVAO, J. L. M. O.; WAGA, I. **On the Thermodynamics of Matter Creation in Cosmology**. *Physics Letters A*, v. 162, p. 223, 1992. Citado na página 33.
- CAMPOS, M. de. **Anisotropic Open System Cosmology**. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, v. 13, n. 1, p. 1650059, 2016. Citado na página 60.
- D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. New York: Oxford University Press, 1992. Citado na página 25.
- GARNAVICH, P. et al. **High - Z Supernova Search**. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 493, p. 53, 1998. Citado na página 28.
- GRTESENSOR. <<http://grtensor.phy.queensu.ca/>>. Citado na página 18.
- HAWKING, S. W.; ELLIS, G. F. R. *Large Scale Structure of Space-Time*. New York: Cambridge University Press, 1994. Citado na página 27.
- HOBSON, G. P. E. M. P.; LASENBY, A. N. *General Relativity: An introduction for physicists*. New York: Cambridge University Press, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 18.
- KRAUSS, L. M. **The Cosmological Constant is Back**. *The Astrophysical Journal*, v. 27, p. 1137, 1995. Citado na página 27.
- LIDDLE, A. *An Introduction to Modern Cosmology*. 2nd ed. ed. New York: Wiley, 2003. Citado na página 27.
- LIDDLE, A. R.; LYTH, D. H. *Cosmological Inflation and Large - Scale Structure*. New York: Cambridge University Press, 2000. Citado na página 27.
- LIMA, J. A. S.; GERMANO, A. S. M.; ABRAMO, L. R. W. **FRW-type Cosmologies With Adiabatic Matter Creation**. *Physical Review D*, v. 21, n. 8, p. 4287, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 9, 33 e 42.
- PARKER, L. Particle creation and particle number in an expanding universe. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 45, n. 37, p. 374023, 2012. Citado na página 32.
- PERLMUTTER, S. et al. **Supernova Cosmology Project**. *The Astrophysical Journal*, v. 483, p. 565, 1997. Citado na página 28.
- PERLMUTTER, S. et al. **Supernova Cosmology Project**. *Nature*, v. 391, p. 51, 1998. Citado na página 28.
- PERLMUTTER, S. et al. **Supernova Cosmology Project**. *The Astrophysical Journal*, v. 517, p. 565, 1999. Citado na página 28.

- PRIGOGINE J. GEHENIAU, E. G. I.; NARDONE, P. **Thermodynamics and Cosmology**. *General Relativity and Gravitation*, v. 21, n. 8, p. 767, 1989. Citado 5 vezes nas páginas 9, 32, 37, 38 e 42.
- RIESS, A. **High - Z Supernova Search**. *The Astronomical Journal*, v. 116, p. 1009, 1998. Citado na página 28.
- RUBIN, V. C.; FORD, J. W. K. **Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions**. *Astrophysical Journal*, v. 159, p. 379, 1970. Citado na página 28.
- SAHNI T. D. SAINI, A. A. S. V.; ALAM, U. **Statefinder—A New Geometrical Diagnostic of Dark Energy**. *JETP Letters*, v. 77, n. 5, p. 201, 2003. Citado na página 60.
- SCHMIDT, B. et al. **High - Z Supernova Search**. *The Astrophysical Journal*, v. 507, p. 46, 1998. Citado na página 28.
- SOUZA, R. G.; CAMPOS, M. **Modelo Cosmológico de Friedmann**. *MensAgitat*, v. 9, n. 1, p. 27, 2014. Citado na página 22.
- SOUZA, R. G. de. *Estudo de um fluido cosmológico com produção de partículas em N dimensões*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Roraima, 2013. Citado na página 61.
- WEINBERG, S. **Gravitation and Cosmology**: Principles and applications of the general theory of relativity. New York: Wiley, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 22.